

UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS:

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL GLOBAL DE EDIFICIOS ALTOS POR EL
MÉTODO CONTINUO Y EL MÉTODO DE MATRIZ DE
TRANSFERENCIA UTILIZANDO FORMULACIÓN ENERGÉTICA**

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO CIVIL

PRESENTADO POR:

PINTO CRUZ MAO CRISTIAN

ASESOR:

M(o) MENDOZA FLORES CRISTIAN MILTON

HUACHO – LIMA – PERÚ

2022



PRESIDENTE
M(o) VALENCIA BARDALES JULIO CESAR



SECRETARIO
M(o) TORRES CALDERON ALEX FIDEL



VOCAL
M(o) ASCOY FLORES KEVIN ARTURO



ASESOR
M(o) MENDOZA FLORES CRISTIAN MILTON

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL GLOBAL DE EDIFICIOS ALTOS POR EL
MÉTODO CONTINUO Y EL MÉTODO DE MATRIZ DE
TRANSFERENCIA UTILIZANDO FORMULACIÓN ENERGÉTICA**

PINTO CRUZ, MAO CRISTIAN

TESIS DE PREGRADO

ASESOR:

M(º). MENDOZA FLORES CRISTIAN MILTON

**UNIVERSIDAD NACIONAL
JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL**

HUACHO- 2022

DEDICATORIA

A Jesucristo, REY de reyes y SEÑOR de señores. “*Encomienda tus obras al Señor, y tus propósitos se afianzarán*” (Proverbios 16-3).

Con mucho cariño e inmenso amor, a mi hija Zoé Juliette, con la esperanza de que este proyecto de investigación sirva de estímulo para su desarrollo personal y profesional. "*Sé el cambio que quieres ver en el mundo*" Mahatma Ghandi.

A mis padres Julio y Lucia, por ser el soporte de mi vida a lo largo de todos estos años. Agradezco profundamente los consejos en cada etapa de mi desarrollo personal y profesional, por el cariño y amor que siempre me han demostrado y sobre todo por la paciencia, desvelo y sacrificio.

A mis hermanos Yoselin, Marisol, Jeanpierre, Luana y sobrinos Elian y Gael; por la confianza que desinteresadamente depositan en mí y por los momentos vividos en cada etapa de sus vidas.

Con mucho cariño y profundo respeto a mi abuela Cirila ya la memoria de mi abuelo Corpus, por el amor y ejemplo que me dieron en mi niñez.

A mis tíos Virgilio y María, por el ejemplo, la motivación y el cariño que siempre me han brindado desinteresadamente.

Mao Cristian, Pinto Cruz

AGRADECIMIENTOS

Es difícil hacer una lista de todos aquellos que me apoyaron para culminar este proyecto de investigación. Sin embargo, algunas personas e instituciones merecen ser reconocidas:

Andrei M. Reinhorn, por ser fuente de inspiración, por las facilidades a documentos de investigación y por la respuesta a cada consulta planteada. Esta idea de proyecto de investigación surgió como resultado de estudiar su tesis de doctorado.

Károly A. Zalka, por las facilidades de documentos de investigación, por su seguimiento, motivación y por la respuesta a todas mis consultas.

Kanat Burak Bozdoğan, por su seguimiento y respuestas a todas mis consultas, por su seguimiento, motivación y por la respuesta a todas mis consultas.

Avigdor Rutenberg y al Instituto Tecnológico de Israel (TECHNION), por las facilidades a documentos de investigación.

Antonio Capsoni, Bianca Pârv, Hadi Moghadasi Faridani, Marco Mangione, Lorenzo Migliorati, Gabriella Tarján, Andrés Alonso Rodríguez, Paulina Gonzales, Giuseppe Lacidogna, Fabrizio Mollaioli, Konstantinos Kostinakis, Mingfeng Huang, Michele Palermo, Quek Ser Tong, Radu Hulea, Malik Atik, Nitti Giuseppe, Boutin Claude, Céline Chesnais y Carolina Franco Ariza; por brindarme el acceso a sus tesis doctorales y a documentos de investigación.

Al M(o) Cristian Mendoza Flores por las sugerencias, seguimiento, consejos y el tiempo dedicado a la revisión de este proyecto de investigación.

Al Profesor Juan Gutiérrez Guardales (Escuela Secundaria Coronel Pedro Portillo Silva). Esta tesis de investigación no hubiera sido posible sin su apoyo, motivación e inspiración durante mis años escolares. ¡Gracias por inspirar y cambiar vidas! “*El profesor mediocre cuenta. El buen maestro explica. El maestro superior demuestra. El gran maestro inspira*” (William Arthur Ward).

Por último y no siendo menos importante, a mi alma mater, Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, por la formación brindada.

Mao Cristian, Pinto Cruz

ÍNDICE

1	CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1	Descripción de la realidad problemática	1
1.2	Formulación del problema.....	4
1.2.1	Problema general.....	4
1.2.2	Problemas específicos.....	4
1.3	Objetivos de la investigación.....	5
1.3.1	Objetivo general	5
1.3.2	Objetivos específicos	5
1.4	Justificación de la investigación	5
1.5	Delimitaciones del estudio	7
2	CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO.....	8
2.1	Antecedentes de la investigación.....	8
2.1.1	Investigaciones internacionales.....	8
2.1.2	Investigaciones nacionales.....	16
2.2	Bases teóricas	16
2.3	Definición de términos básicos.....	43
2.4	Operacionalización de las variables.....	44
3	CAPÍTULO III. METODOLOGÍA.....	45
3.1	Diseño metodológico	45
3.2	Población y muestra	46
3.2.1	Población	46
3.2.2	Muestra	46
3.3	Técnicas de recolección de datos.....	46
3.4	Técnicas para el procesamiento de la información.....	46
4	CAPÍTULO IV. RESULTADOS	47
4.1	Análisis estático de los sistemas estructurales individuales.....	47
4.1.1	Viga de flexión de un campo (EBB)	50
4.1.2	Viga de corte de un campo (SB)	60

4.1.3	Viga Timoshenko de dos campos (TB)	67
4.1.4	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB)- comportamiento traslacional	81
4.1.5	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - Comportamiento torsional	96
4.1.6	Viga sándwich de dos campos (SWB)	104
4.1.7	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1).....	130
4.1.8	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2).....	140
4.1.9	Viga sándwich generalizada modificada de dos campos (MGSB)	150
4.1.10	Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB).....	157
4.1.11	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB).....	164
4.1.12	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)	176
4.1.13	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB).....	186
4.2	Análisis dinámico de los sistemas estructurales individuales	193
4.2.1	Viga de flexión de un campo (EBB)	194
4.2.2	Viga de corte de un campo (SB)	202
4.2.3	Viga Timoshenko de dos campos (TB)	208
4.2.4	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento traslacional.....	228
4.2.5	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - Comportamiento torsional	239
4.2.6	Viga sándwich de dos campos (SWB)	243
4.2.7	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1).....	256
4.2.8	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2).....	267
4.2.9	Viga sándwich generalizada modificada de dos campos (MGSB)	278
4.2.10	Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB).....	281
4.2.11	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB).....	286

4.2.12	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)	296
4.2.13	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB)	301
4.3	Análisis de estabilidad de los sistemas estructurales individuales	305
4.3.1	Viga de flexión de un campo (EBB)	308
4.3.2	Viga de corte de un campo (SB)	319
4.3.3	Viga Timoshenko de dos campos (TB)	322
4.3.4	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento traslacional.....	335
4.3.5	Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento torsional.....	346
4.3.6	Viga sándwich de dos campos (SWB)	350
4.3.7	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1).....	365
4.3.8	Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2).....	375
4.3.9	Viga sándwich Generalizada Modificada de dos campos (MGSB1)	385
4.3.10	Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB).....	388
4.3.11	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB)	399
4.3.12	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)	409
4.3.13	Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB)	421
4.4	Viga de reemplazo equivalente del edificio alto.....	429
4.5	Análisis estructural estático del edificio alto	439
4.5.1	Desplazamiento lateral del edificio	439
4.5.2	Desplazamiento torsional del edificio	439
4.5.3	Desplazamiento acoplado lateral-torsional del edificio.....	441
4.6	Análisis estructural dinámico del edificio alto	443
4.6.1	Periodo lateral del edificio	443
4.6.2	Periodo torsional del edificio	443
4.6.3	Periodo acoplado lateral-torsional del edificio	443

4.7	Análisis de estabilidad del edificio alto	444
4.7.1	Carga crítica lateral del edificio	444
4.7.2	Carga crítica torsional del edificio	444
4.7.3	Carga crítica acoplado lateral-torsional del edificio.....	444
4.8	Aplicaciones numéricas.....	445
4.8.1	Muro de corte	445
4.8.2	Pórtico.....	448
4.8.3	Muro de corte acoplado	453
4.8.4	Pórtico de concreto armado	458
4.8.5	Muro de corte acoplado	462
4.8.6	Edificio de pórticos.....	465
4.8.7	Edificio dual de pórtico y muro de corte	468
5	CAPITULO V. DISCUSIÓN.....	471
5.1	Discusión de resultados.....	471
6	CAPITULO VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	473
6.1	Conclusiones.....	473
6.2	Contribuciones personales.....	475
6.3	Recomendaciones	477
7	REFERENCIAS	479
7.1	Fuentes documentales	479
7.2	Fuentes bibliográficas	484
7.3	Fuentes electrónicas	485
8	ANEXO	486

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla.1	Rascacielos y las crisis económicas (Thornton, 2005).....	20
Tabla.2	Descripción de las variables e indicadores.....	44
Tabla.3	Expresiones analíticas de la rigidez a cortante global K_s para estructuras de pórtico simple, doble y triple (Chesnais, 2010).	141
Tabla.4	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 100$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	329
Tabla.5	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 15.5$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	341
Tabla.6	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	342
Tabla.7	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.0000 \leq \kappa \leq 1.0010$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	357
Tabla.8	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.0020 \leq \kappa \leq 1.0090$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	358
Tabla.9	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.01 \leq \kappa \leq 1.25$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	359
Tabla.10	Precisión de la viga Timoshenko (TB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte W1-W10.....	446
Tabla.11	Precisión de la viga de flexión (EBB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte W1-W10.	446
Tabla.12	Sección de columna y viga para pórticos F1-F60.....	448
Tabla.13	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo para $N \geq 5$ pisos.	451
Tabla.14	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo $N \geq 10$ pisos.	451
Tabla.15	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo $N \geq 15$ pisos.	451
Tabla.16	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 5$ pisos.	452
Tabla.17	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 10$ pisos.	452
Tabla.18	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 15$ pisos.	452

Tabla.19	Sección de muro y viga para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36.	453
Tabla.20	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.....	455
Tabla.21	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.....	455
Tabla.22	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.....	456
Tabla.23	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.....	456
Tabla.24	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.....	457
Tabla.25	Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.....	457
Tabla.26	Propiedades estructurales y geometrías de los pórticos.	458
Tabla.27	Propiedades estructurales y geometrías del muro de corte acoplado.....	462
Tabla.28	Propiedades estructurales y geometrías del edificio de pórticos.	465
Tabla.29	Propiedades estructurales y geometrías del edificio dual de pórtico y muro de corte.	468

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.	Muro de corte acoplado. a) Con vigas de conexión discretas, b) con vigas de conexión continuas (Migliorati y Mangione, 2015).....	3
Figura 2.	Proceso de idealización de RB del modelo 3D a un modelo 1D (Moghadasi, 2015).	3
Figura 3.	La Torre de Babel (Brueghel, 1563).	17
Figura 4.	Dibujo de la patente del ascensor (Otis, 1861).	18
Figura 5.	Chicago en llamas - La carrera por las vidas sobre el puente de la calle Randolph (Chapin, 1871).	18
Figura 6.	Puente Q’eswachaka en la actualidad (Palomo, 2020).	19
Figura 7.	Los 10 edificios más altos del mundo con mayor número de metros de vanidad (CTBUH, 2013).	22
Figura 8.	Fazlur Khan y Bruce Graham (de izquierda a derecha) junto a la maqueta del Hancock Center (Khouyali, 2021).	25
Figura 9.	Clasificación de sistemas estructurales de edificios altos según Fazlur Khan. (a) Sistemas estructurales de acero, (b) Sistemas estructurales de concreto armado, (c) Sistemas estructurales compuestos (acero estructural + concreto armado) (Sarkisian, 2016).	26
Figura 10.	Clasificación de las estructuras de los edificios de gran altura según Mir M. Ali. (a) Sistemas interiores, (b) Sistemas exteriores (Mir y Kyoung, 2007).	28
Figura 11.	Sistema de pórtico rígido. (a) Estructura tridimensional, (b) Deformación e interacción de vigas y columnas (Taranath, 2016).	29
Figura 12.	Sistema de muro de corte. (a) Muro de corte simple (sólido), (b) Muro de corte con aberturas (muros de corte acoplados) (Taranath, 2016).....	31
Figura 13.	Comportamiento del sistema pórtico – muro de corte (Cammarano, 2014).	32
Figura 14.	Edificio alto considerado como una viga cantiléver en voladizo (Schmidts, 1998).	34
Figura 15.	Sistema continuo plano que consta de varios elementos de viga alineados en paralelo (Moghadasi, 2015).	37
Figura 16.	Deformaciones esquemáticas de pared delgada, pared no delgada y pared ordinaria (Moghadasi, 2015).	39
Figura 17.	Modelos de un campo. a) viga EBB, b) viga SB y c) viga CTB.	41

Figura 18.	Modelos de dos campos. a) viga TB, b) viga SWB y c) viga GSWB.....	41
Figura 19.	Modelos de tres campos. a) viga GSB y b) viga CTB extensible de tres campos.....	42
Figura 20.	Efecto del parámetro adimensional a en la forma de distribución de la carga lateral para el caso 1 (Miranda E. , 1999).	48
Figura 21.	Estructura sujeta a carga lateral. a) Estructura y carga original, b) caso 1: Viga de reemplazo con carga continua y c) caso 2: Viga de reemplazo con carga concentrada.....	49
Figura 22.	Viga Euler Bernoulli (EBB) de un solo campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente.....	50
Figura 23.	Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral y b) Deriva de entrepiso.	53
Figura 24.	Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral normalizado y b) Deriva de entrepiso normalizado.....	54
Figura 25.	a) Equilibrio estático en el nivel j -ésimo y b) Segmentos estructurales de propiedades variables.	57
Figura 26.	Viga de corte (SB) de un solo campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente.....	60
Figura 27.	Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral y b) Deriva de entrepiso.	63
Figura 28.	Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral normalizado y b) Deriva de entrepiso normalizado.....	64
Figura 29.	Viga Timoshenko (TB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez TB.	67
Figura 30.	Desplazamiento lateral de la viga y efecto del parámetro a	73
Figura 31.	Deriva de entrepiso de la viga y efecto del parámetro a	74
Figura 32.	Efecto del parámetro a en el perfil del desplazamiento lateral normalizado.	75
Figura 33.	Efecto del parámetro a en el perfil de la deriva de entrepiso.....	76
Figura 34.	Influencia del desplazamiento por corte.....	77
Figura 35.	Desplazamiento por flexión, por cortante y total para $\alpha = 3$	77
Figura 36.	Acoplamiento de vigas de flexión y corte (CTB) de un campo. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez CTB.	81
Figura 37.	Desplazamiento lateral de la viga y efecto del parámetro a	87
Figura 38.	Deriva de entrepiso de la viga y efecto del parámetro a	88

Figura 39.	Efecto del parámetro a en el perfil del desplazamiento lateral normalizado.	89
Figura 40.	Efecto del parámetro a en el perfil de la deriva de entrepiso.	90
Figura 41.	Efecto del parámetro α en el perfil del desplazamiento lateral normalizado para una carga uniformemente distribuida ($a = 2000$).	91
Figura 42.	Variación de α vs. relación de deriva $\Delta g/\Delta s$ para diversos casos de a	91
Figura 43.	Ubicación del punto de inflexión.	93
Figura 44.	Núcleo estructural. (a) De sección cerrada, y b) De sección abierta (Zalka, 2020).	97
Figura 45.	Núcleo sometido a un momento torsional uniformemente distribuido.	98
Figura 46.	Núcleo parcialmente cerrado por las losas y/o vigas (Zalka, 2020).	99
Figura 47.	Comparación del parámetro torsional J	100
Figura 48.	Viga sándwich (SWB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez SWB.	104
Figura 49.	Desplazamiento lateral y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$	113
Figura 50.	Deriva de entrepiso y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$	114
Figura 51.	Desplazamiento lateral normalizado y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$	115
Figura 52.	Deriva de entrepiso normalizado y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$	116
Figura 53.	Desplazamiento lateral y efecto del parámetro κ para $a = 2000$	117
Figura 54.	Deriva de entrepiso y efecto del parámetro κ para $a = 2000$	118
Figura 55.	Desplazamiento lateral normalizado y efecto del parámetro κ para $a = 2000$	119
Figura 56.	Deriva de entrepiso normalizado y efecto del parámetro κ para $a = 2000$	120
Figura 57.	Tipos de desplazamiento (flexión, corte e interacción) para $k = 1.00148$	121
Figura 58.	Porcentaje de participación de la deflexión por interacción respecto al desplazamiento total.	122
Figura 59.	Ubicación del punto de inflexión para $\alpha H < 10$	124
Figura 60.	Ubicación del punto de inflexión para $0 < \alpha H < 100$	125
Figura 61.	Viga Sándwich generalizada (GSB1) de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez GSB1.	130
Figura 62.	Viga sándwich generalizada (GSB1) de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2.	140

Figura 63.	Viga sándwich generalizada modificada (MGSB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez MGSB.....	150
Figura 64.	Desplazamiento del edificio en función al peralte de las vigas de conexión.	152
Figura 65.	Desplazamiento del máximo del edificio en función del grado de acoplamiento.....	153
Figura 66.	Tendencia del parámetro η con la altura del edificio.....	154
Figura 67.	Acoplamiento de dos vigas modificada (MCTB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez MCTB.....	157
Figura 68.	a) Muro de corte acoplado, (b) modelo continuo equivalente y (c) equilibrio de fuerza y campos cinemáticos consistentes (Moghadasi, 2015).	164
Figura 69.	Viga CTB de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez CTB de tres campos.	166
Figura 70.	(a) Compatibilidad de rotación no modificada y (b) modificada con extensibilidad axial en una porción típica del modelo continuo (Moghadasi, 2015).	167
Figura 71.	Viga GCTB de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez GCTB de dos campos.....	176
Figura 72.	Viga GCTB de un campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez GCTB de un campo.....	186
Figura 73.	Función característica de la viga EBB.	197
Figura 74.	Formas naturales de la vibración de flexión para los primeros tres modos de vibración.	198
Figura 75.	Fuerzas dinámicas en el nivel i -ésimo.	199
Figura 76.	Función característica de la viga SB.	205
Figura 77.	Formas naturales de la vibración de corte para los primeros tres modos de vibración.....	206
Figura 78.	Relación entre el coeficiente de cortante de Faghidian y Cowper.....	213
Figura 79.	Variación de los parámetros δ y β en función de α para el primer modo de vibración.....	219
Figura 80.	Variación de los parámetros δ y β en función de α para el segundo modo de vibración.....	219
Figura 81.	Variación de los parámetros δ y β en función de α para el tercer modo de vibración.....	220
Figura 82.	Primer valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.	220

Figura 83.	Segundo valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.	221
Figura 84.	Tercer valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.....	221
Figura 85.	Formas de modos de vibración para $R=2.5$	224
Figura 86.	Formas del primer modo de vibración en función del valor R	225
Figura 87.	Formas del segundo modo de vibración en función del valor R	225
Figura 88.	Formas del tercer modo de vibración en función del valor R	226
Figura 89.	Primer valor propio β_1 para el caso de α variable.	232
Figura 90.	Segundo valor propio β_2 para el caso de α variable.	232
Figura 91.	Tercer valor propio β_3 para el caso de α variable.....	233
Figura 92.	Formas del primer modo de vibración en función del valor α	234
Figura 93.	Formas del segundo modo de vibración en función del valor α	235
Figura 94.	Formas del tercer modo de vibración en función del valor α	235
Figura 95.	Función característica para el caso $\alpha = 2.5$	237
Figura 96.	Función característica para el caso $\alpha = 30.0$ (Viga de Corte).	237
Figura 97.	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 10$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	328
Figura 98.	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 100$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	328
Figura 99.	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 50$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	340
Figura 100.	Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.	340
Figura 101.	Elementos estructurales y la viga de reemplazo equivalente tipo viga sándwich.	429
Figura 102.	Elementos estructurales y la viga de reemplazo equivalente tipo viga sándwich generalizada.....	429
Figura 103.	Elementos estructurales con su respectivo brazo de torsión (Zalka, 2020).....	440
Figura 104.	Planta estructural de un edificio a) Edificio simétrico, y b) Edificio asimétrico (Zalka, 2020).....	441
Figura 105.	Desplazamiento total de un edificio asimétrico. a) v =desplazamiento máximo, b) v_0 =desplazamiento debido a una fuerza aplicada en su centro de rigidez, y c) $v\phi$ =desplazamiento debido al momento torsional en su centro de rigidez (Zalka, 2020).....	442
Figura 106.	Desplazamiento lateral y torsional de un edificio (Schmidts, 1998).	442

Figura 107.	Muros de corte W1-W10 para el análisis de precisión.	445
Figura 108.	Precisión de la viga Timoshenko (TB) como viga de reemplazo para los muros de corte.....	446
Figura 109.	Precisión de la viga de flexión (EBB) como viga de reemplazo para los muros de corte.....	447
Figura 110.	Pórticos F1-F45 de un tramo con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión	449
Figura 111.	Pórticos F1-F45 de cuatro tramos con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión	450
Figura 112.	Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los pórticos F1-F45 de un tramo.	451
Figura 113.	Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los pórticos F1-F45 cuatro tramos.....	452
Figura 114.	Muros de corte acoplados CSW 1-36 de un tramo con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión.	454
Figura 115.	Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.	455
Figura 116.	Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.	456
Figura 117.	Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.	457
Figura 118.	Pórtico de concreto: (a) un tramo (b) dos tramos.	458
Figura 119.	Precisión del desplazamiento máximo del pórtico de dos tramos.	459
Figura 120.	Precisión del desplazamiento máximo del pórtico de tres tramos.....	459
Figura 121.	Precisión del periodo fundamental del pórtico de dos tramos.....	460
Figura 122.	Precisión del periodo fundamental del pórtico de tres tramos.	460
Figura 123.	Precisión de la carga crítica del pórtico de dos tramos.	461
Figura 124.	Precisión de la carga crítica del pórtico de tres tramos.	461
Figura 125.	Muro de corte acoplado.....	462
Figura 126.	Precisión del desplazamiento máximo del muro de corte acoplado.	463
Figura 127.	Precisión del periodo fundamental del muro de corte acoplado.....	464
Figura 128.	Precisión de la carga crítica del muro de corte acoplado.	464
Figura 129.	Edificio de pórticos.	465
Figura 130.	Precisión del desplazamiento máximo del edificio de pórticos.....	466

Figura 131.	Precisión del periodo fundamental del edificio de pórticos.	467
Figura 132.	Precisión del periodo fundamental del edificio de pórticos.	467
Figura 133.	Edificio dual de pórtico y muro de corte.	468
Figura 134.	Precisión del desplazamiento máximo del edificio dual de pórticos y muros de corte.	469
Figura 135.	Precisión del periodo fundamental del edificio dual de pórticos y muros de corte.	470
Figura 136.	Precisión de la carga crítica del edificio dual de pórticos y muros de corte.	470

NOMENCLATURA

E	Módulo de elasticidad del material
G	Módulo de corte
K_b	Rigidez a la flexión
K_s	Rigidez al corte
K_{b1}	Rigidez a la flexión global
K_{b2}	Rigidez a la flexión local
K_{s1}	Rigidez al corte global
K_{s2}	Rigidez al corte local
K_θ	Rigidez torsional
G_{eq}	Rigidez equivalente de la viga de conexión
I_w	Momento de inercia del muro de corte
I_c	Momento de inercia de la columna
I_b	Momento de inercia de la viga
I_w	Constante de torsión de alabeo
J	Constante de torsión de Saint Venant
\bar{J}	Constante que representa el efecto de la viga de conexión
A_w	Área de la sección transversal del muro de corte
A_c	Área de la sección transversal de la columna
A_0	Área encerrada por las líneas centrales medias de las secciones de la pared delgada
k	Factor de forma
h	Altura de piso
h_b	Peralte de la viga

l	Longitud a ejes de la columna o muro de corte
l^*	Longitud libre entre muros de corte o columnas
s	Distancia vertical entre vigas de conexión
v_i	Espesor del núcleo
w	Número de de muros de corte
c	Número de columnas
b	Número de vigas
t_w	Ancho de muro de corte
t_c	Ancho de columna
t_b	Ancho de viga
h_b	Peralte de la viga de conexión
c_i	Distancia desde el centroide de área de las columnas o muros de corte al centroide cada de cada columna o muro de corte
S_1	Longitud del muro de corte izquierdo
S_2	Longitud del muro de corte derecho
$M_{(x)}$	Momento flector
$V_{(x)}$	Fuerza de corte
$M_{(0)}$	Momento flector en los extremos del muro de corte
ρ	Densidad de masa

RESUMEN

El análisis estructural de un edificio alto puede resolverse mediante un análisis local o global. Se conoce que la respuesta global no es la simple superposición de respuestas de los sistemas estructurales individuales y es importante realizar un análisis estructural global del edificio alto que considere la compleja interacción tridimensional entre los sistemas estructurales. A pesar de que el avance tecnológico ha contribuido a que un análisis estructural completo utilizando paquetes comerciales de elementos finitos sea fácil de obtener, en una etapa temprana del proyecto los ingenieros estructurales necesitan tomar decisiones rápidas y el uso de modelos tridimensionales complejos pueden demandar mucho tiempo y resultar poco práctico y costoso. Por el contrario, el uso de métodos aproximados como el método continuo y el método de matriz de transferencia que sustituye un edificio alto como una viga de reemplazo equivalente, reduce drásticamente los grados de libertad de la estructura, involucra una mínima cantidad de tiempo y permite concentrar el análisis en las características estructurales más importantes e ignorar aquellas que no tienen una influencia importante (y a veces nula) en la respuesta estructural.

El objetivo principal de este proyecto de investigación es desarrollar y proponer un procedimiento analítico para el análisis estructural global del edificio alto que involucra un análisis estático, dinámico y de estabilidad basado en el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética. La formulación matemática utilizando el método continuo proporciona soluciones de forma cerrada para el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de edificios altos regulares y la utilización conjunta del método continuo y el método de matriz de transferencia permite evaluar el análisis estructural de los edificios altos que presentan variabilidad estructural en altura. El modelo simplificado se utiliza para calcular el perfil de desplazamiento lateral, el desplazamiento máximo, las derivas de entrepiso y la deriva global en el caso estático; para calcular las frecuencias y los periodos en el caso dinámico y para calcular la carga crítica global de pandeo en el caso de estabilidad.

Esta investigación se divide en dos partes. La primera parte presenta el procedimiento matemático que conduce a soluciones cerradas del análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de modelos de vigas de reemplazo adecuados a cada elemento estructural como

pórticos, muros de corte, muros de corte acoplado, núcleos y también se analiza estrategias para representar al edificio alto mediante una sola viga de reemplazo con sus rigideces características. La segunda parte presenta un análisis de precisión y fiabilidad de los modelos desarrollados comparando los resultados del método continuo y método de matriz de transferencia con el método de elementos finitos. Los resultados de la investigación demuestran una excelente precisión y fiabilidad de la aplicación de los modelos continuos desarrollados para los sistemas estructurales y para el edificio alto.

Como conclusión general, el procedimiento analítico propuesto en este proyecto de investigación para el análisis estructural global del edificio alto ha demostrado ser un procedimiento muy confiable en su precisión e involucra un reducido tiempo de procesamiento, lo que lo hace conveniente para implementarse en las oficinas de ingeniería como una excelente alternativa para el análisis estructural de edificios altos en una etapa preliminar y como un método de verificación en la etapa final del proyecto.

Palabras claves: Edificio alto, viga de reemplazo, método continuo, método de matriz de transferencia, formulación energética, principio de Hamilton, análisis estructural estático, análisis estructural dinámico, análisis estructural de estabilidad.

ABSTRACT

The structural analysis of a tall building can be solved by a local or global analysis. It is known that the global response is not the simple superposition of responses of the individual structural systems and is important to carry out a global structural analysis of the tall building that considers the complex three-dimensional interaction between the structural systems. Although technological advancement has made a full structural analysis using commercial finite element packages easy to obtain, at an early stage of the project structural engineers need to make quick decisions and the use of complex 3D models can be time consuming, be impractical and expensive. In contrast, the use of approximate methods such as the continuous method and the transfer matrix method substituting a tall building as an equivalent replacement beam drastically reduces the degrees of freedom of the structure, involves a minimal amount of time, and allows concentrate the analysis on the most important structural features and ignore those that have no significant (and sometimes no) influence on the structural response.

The main objective of this research project is to develop and propose an analytical procedure for the global structural analysis of the tall building that involves a static, dynamic and stability analysis based on the continuous method and the transfer matrix method using an energy formulation. The mathematical formulation using the continuum method provides closed form solutions for the static, dynamic and stability structural analysis of regular tall buildings and the joint use of the continuum method and the transfer matrix method allows to evaluate the structural analysis of tall buildings that present structural variability in height. The simplified model is used to calculate the lateral displacement profile, the maximum displacement, the interstory drifts and the global drift in the static case; to calculate the frequencies and periods in the dynamic case and to calculate the global critical buckling load in the stability case.

This investigation is divided into two parts. The first part presents the mathematical procedure that leads to closed solutions of the static, dynamic and stability structural analysis of replacement beam models suitable for each structural element such as frames, shear walls, coupled shear walls, cores and strategies are also analyzed to represent the tall building by a single

replacement beam with its characteristic stiffnesses. The second part presents an analysis of the accuracy and reliability of the models developed by comparing the results of the continuous method and the transfer matrix method with the finite element method. The results of the investigation demonstrate excellent accuracy and reliability of the application of the continuous models developed for the structural systems and for the tall building.

As a general conclusion, the analytical procedure proposed in this thesis for the global structural analysis of the tall building has proven to be a very reliable procedure in its precision and involves a reduced processing time, which makes it convenient to be implemented in engineering offices such as an excellent alternative for structural analysis of tall buildings at a preliminary stage and as a verification method at the final stage of the project.

Keywords: Tall building, replacement beam, continuous method, transfer matrix method, energy formulation, Hamilton's principle, static structural analysis, dynamic structural analysis, structural stability analysis.

INTRODUCCIÓN

En la literatura se han desarrollado numerosos métodos de análisis aproximados y exactos para evaluar el análisis estructural global de edificios altos. En este proyecto de investigación se presenta un procedimiento analítico que permite realizar de forma práctica y en un tiempo más corto el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad del edificio alto utilizando el método continuo y el método de matriz de transferencia con una formulación energética.

El método continuo conduce a soluciones cerradas del análisis estructural para edificios que son regulares en altura; es decir, cuyas propiedades estructurales no cambian a lo largo de la altura del edificio. Sin embargo, no todos los edificios altos son regulares en altura por motivos estructurales, estéticos y de costo. La aplicación conjunta del método continuo y el método de matriz de transferencia permite evaluar el análisis estructural de los edificios altos que presentan variabilidad estructural en altura. De esta forma, el procedimiento analítico desarrollado en este proyecto de investigación permite evaluar el análisis estructural global de edificios altos que son regulares e irregulares en altura.

Este proyecto de investigación se divide en siete capítulos, donde cada uno está dedicado a un aspecto particular de la investigación; sin embargo, el capítulo cuatro “resultados” contiene todo el sustento matemático de esta investigación.

El capítulo 1 abarca el planteamiento del problema, en el cual se describe la realidad problemática, la formulación del problema, los objetivos, la justificación y la delimitación del estudio de investigación.

El capítulo 2 contiene el marco teórico, en el cual se describe los antecedentes de la investigación donde se ha realizado un estudio exhaustivo de las investigaciones internacionales relacionadas al análisis de los edificios altos mediante el método continuo y el método de matriz de transferencia, se dan las bases teóricas que proporcionan una visión general del edificio alto y de los sistemas estructurales a estudiar, se describen los modelos de vigas de reemplazo existentes en la literatura y se describen los conceptos asociados al estudio de este proyecto de investigación.

El capítulo 3 se describe la metodología aplicada a este proyecto de investigación , el cual contiene el diseño, la población, la muestra, las técnicas de recolección de datos y de procesamiento de la información.

El capítulo 4 presenta los resultados de la investigación sobre el análisis estructural global de las vigas de reemplazo y del edificio alto y se divide en cinco partes:

- Análisis estático de los sistemas estructurales individuales. Se presenta el desarrollo matemático del análisis estático de trece vigas de reemplazo uniformes y escalonadas que representan el comportamiento de los sistemas estructurales. El análisis estático tiene como objetivo principal calcular el perfil del desplazamiento lateral, el desplazamiento máximo, las derivas de entrepiso y la deriva global de las vigas de reemplazo sujetas a una carga lateral general.
- Análisis dinámico de los sistemas estructurales individuales. Se presenta el desarrollo matemático del análisis dinámico de trece vigas de reemplazo uniformes y escalonadas que representan el comportamiento de los sistemas estructurales. El análisis dinámico tiene como objetivo principal calcular la frecuencia, el periodo, los valores propios y las formas de modo de las vigas de reemplazo sujetas a una carga vertical que puede ser uniforme o variable en altura.
- Análisis de estabilidad de los sistemas estructurales individuales. Se presenta el desarrollo matemático del análisis de estabilidad de trece vigas de reemplazo uniformes y escalonadas que representan el comportamiento de los sistemas estructurales. El análisis de estabilidad tiene como único objetivo principal calcular la carga crítica de pandeo global de las vigas de reemplazo sujetas a una carga vertical que puede ser uniforme o variable en altura.
- Análisis global del edificio alto. Se presenta el desarrollo matemático para representar a todo el edificio alto mediante una sola viga de reemplazo adecuada y se calculan sus rigideces características. El análisis se aplica directamente a los edificios simétricos en planta (no presentan efectos de torsión); sin embargo para el caso de los edificios asimétricos (presentan efectos de torsión) se hace uso de la analogía conocida como “analogía de Vlasov”.

- Aplicaciones numéricas. Para demostrar la eficiencia del procedimiento analítico propuesto se desarrolla el análisis global de sistemas estructurales y de edificios altos. La comparación de resultados del método aproximado y del método por elementos finitos demuestran la eficiencia de la formulación propuesta.

El capítulo 5 presenta la discusión de los resultados de la investigación.

El Capítulo 6 está dedicado a las conclusiones extraídas y a una descripción de los resultados alcanzados, haciendo referencia a las contribuciones personales y a posibles investigaciones futuras.

Finalmente el capítulo 7 contiene la extensa fuente de información. Fue importante dar un amplio espacio a las referencias bibliográficas para proporcionar al lector un punto de partida eficiente para profundizar en los futuros temas de investigación.

1 CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Los edificios altos se han vuelto cada vez más populares en ciudades densamente pobladas y han representado el símbolo del desarrollo urbano de las naciones en muchos países del mundo, esta popularidad se debe principalmente al rápido crecimiento de las actividades económicas, a la gran demanda de viviendas y a la limitación de la tierra. Aún con los avances tecnológicos desarrollados en los análisis informáticos como computadoras cada vez más potentes y paquetes de software sofisticados, se requiere un alto esfuerzo computacional y altos recursos económicos para realizar el análisis estructural de un edificio alto. Además, la rigidez horizontal de un edificio alto no puede considerarse como la simple suma de las rigideces individuales de los elementos estructurales debido a que la rigidez global asegura que los elementos estructurales trabajen en conjunto y desarrollen una compleja interacción estructural. Como consecuencia, es de gran interés desarrollar una metodología de análisis estructural con un enfoque global donde el edificio alto puede idealizarse como una viga continua y donde las rigideces y campos cinemáticos asociados a la viga continua puedan representar lo más real posible las características estructurales y el comportamiento del edificio alto.

El análisis estructural global de edificios altos se puede resolver por dos tipos de métodos diferentes: el método exacto (modelo completo) y el método aproximado (modelo condensado). El método exacto se basa en un modelo matemático lo más preciso posible considerando muchos elementos estructurales individuales, propiedades de los materiales, características geométricas y de rigidez, resultando una estructura indeterminada altamente redundante. Por otro lado, el método aproximado debe basarse en las características estructurales más importantes e ignorar aquellas que no tienen una influencia importante (y a veces nula) en la respuesta estructural. El método de elementos finitos es el claro ejemplo del método exacto (modelo completo), mientras que dos de

los métodos aproximados (modelo condensado) que más se han utilizado son el método continuo y el método de la matriz de transferencia.

El método continuo (CM) supone que todos los elementos horizontales que conectan los componentes verticales están efectivamente unidos sobre la altura del edificio para producir un medio de conexión continua; es decir, las vigas de conexión se reemplazan por un sistema de láminas distribuidas uniformemente (Figura 1). Como consecuencia, la estructura tridimensional (3D) conduce a una viga de reemplazo (RB) que se caracteriza por las rigideces equivalentes K_i y los campos cinemáticos (Figura 2). Se ha utilizado ampliamente en la literatura para analizar estructuras cuyas propiedades estructurales no varían con la altura del edificio. El método de matriz de transferencia (TMM) ha sido utilizado ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales con discontinuidades, aplicado al campo estructural permite analizar sistemas continuos con propiedades estructurales variables y/o discontinuas con la altura del edificio transformando las condiciones de borde en condiciones iniciales y de esta manera permite expresar las ecuaciones en función de las constantes iniciales.

En una etapa inicial del proyecto estructural, los ingenieros necesitan tomar decisiones rápidas y suelen optar por modelos tridimensionales complejos que resultan ser poco prácticos y costosos. Analizar a los edificios altos mediante el método continuo y el método de matriz de transferencia se justifica debido a que reduce drásticamente los grados de libertad de la estructura. Cualquier error en el modelado estructural y en la introducción de las cargas aplicadas conducirán a resultados erróneos e imprecisos del análisis; además, en estructuras complejas dependiendo de la experiencia del ingeniero estructural, se hace difícil investigar y encontrar los errores dentro de los enormes datos de salida de los resultados del método discreto (método de elementos finitos). Sumado a este punto el análisis estructural mediante el método continuo permite verificar los resultados obtenidos del método discreto, lo cual resulta ventajoso debido a que ambos métodos siguen una naturaleza matemática diferente.

Tal vez la mejor manera de analizar los edificios altos es utilizar ambos métodos: en la fase preliminar de diseño, el método continuo y el método de matriz de transferencia pueden ayudar rápidamente a identificar los parámetros claves del proyecto y establecer las dimensiones estructurales; mientras que, en la fase final del diseño, el método discreto permite realizar análisis más detallados por medio de cálculos más exactos.

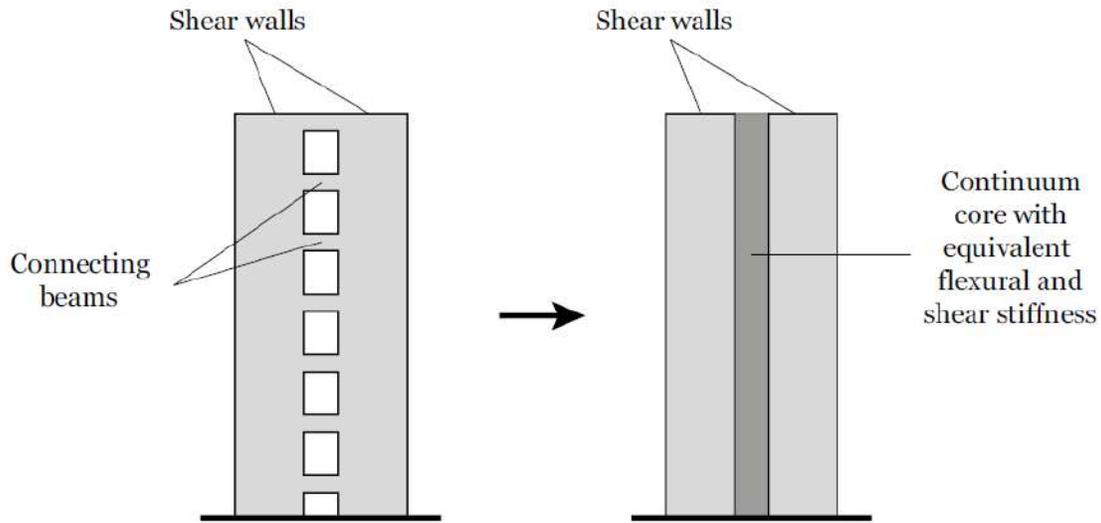


Figura 1. Muro de corte acoplado. a) Con vigas de conexión discretas, b) Con vigas de conexión continuas (Migliorati & Mangione, 2015).

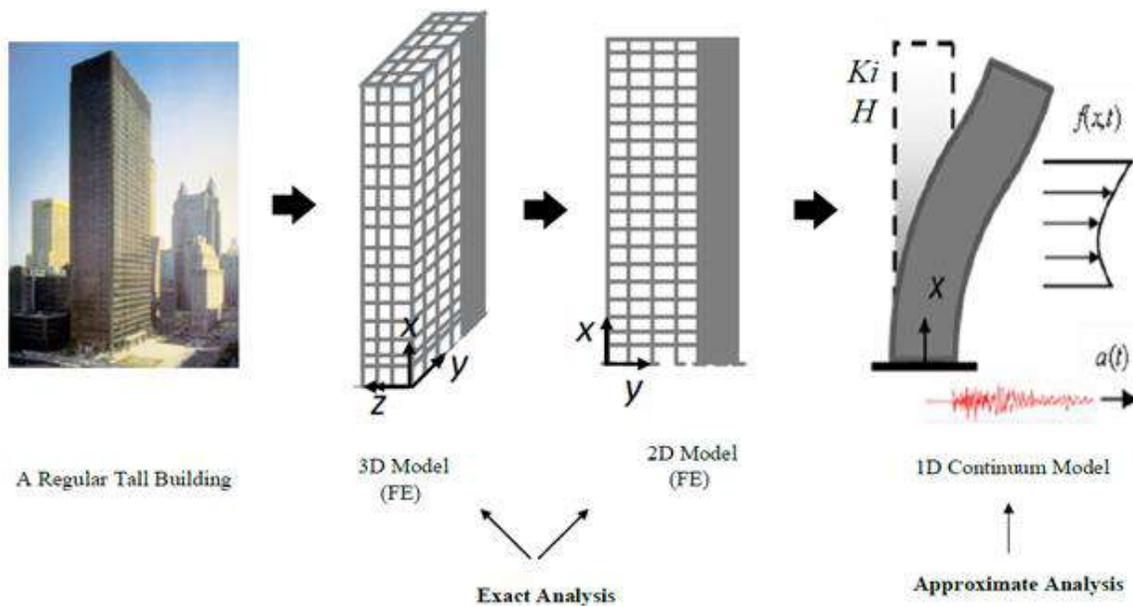


Figura 2. Proceso de idealización de RB del modelo 3D a un modelo 1D (Moghadasi, 2015).

En este sentido el uso de métodos aproximados como el método del medio continuo y el método de matriz de transferencia permiten analizar las estructuras con un enfoque global de una forma relativamente simple y permite al ingeniero estructural comprender el correcto comportamiento complejo de los edificios altos y saber cuáles son los parámetros y características claves que tienen un papel dominante en el comportamiento del edificio alto.

Dentro de este contexto, este proyecto de investigación de investigación se enfoca en cinco temas principales dentro del análisis estructural de edificios altos: El desarrollo de modelos continuos que conducirán a una viga de reemplazo equivalente (RB), el desarrollo de una metodología para el análisis estructural estático del edificio alto, el desarrollo de una metodología para el análisis estructural dinámico del edificio alto, el desarrollo de una metodología para el análisis estructural de estabilidad del edificio alto, y la definición de indicadores de daños para la evaluación de la vulnerabilidad del edificio alto.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1 Problema general

- ¿Será posible desarrollar una metodología de análisis estructural global de los edificios altos por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética?

1.2.2 Problemas específicos

- ¿Será posible desarrollar una metodología de análisis estructural global estático del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética?
- ¿Será posible desarrollar una metodología de análisis estructural global dinámico del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética?
- ¿Será posible desarrollar una metodología de análisis estructural global de estabilidad del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética?

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Objetivo general

- Desarrollar una metodología de análisis estructural global de los edificios altos por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética.

1.3.2 Objetivos específicos

- Desarrollar una metodología de análisis estructural global estático del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética.
- Desarrollar una metodología de análisis estructural global dinámico del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética.
- Desarrollar una metodología de análisis estructural global de estabilidad del edificio alto por el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

- **Justificación teórica:** Uno de los problemas que se le presenta al ingeniero estructural al analizar edificios altos, es el problema de las cargas laterales horizontales. Si bien es cierto, estas cargas laterales son pequeñas en comparación con las cargas gravitacionales, la transferencia de estas cargas a los cimientos requiere de un trabajo de diseño especial. Los edificios altos son muy sensibles a las vibraciones dinámicas debido a su altura y esbeltez; y, por lo tanto, para realizar el análisis estructural exacto mediante el método de elementos finitos se requiere un gran esfuerzo tecnológico y económico. Este proyecto de investigación plantea un método aproximado preciso y confiable basado en el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética para calcular las deflexiones laterales y torsionales, los periodos, frecuencias no acopladas y acopladas, y las cargas críticas en los edificios altos.

- **Justificación metodológica:** Para cumplir con los objetivos de este proyecto de investigación, se utilizará el método continuo y el método de matriz de transferencia con una formulación energética. El método continuo supone que todos los elementos horizontales que conectan los componentes verticales están efectivamente unidos sobre la altura del edificio para producir un medio de conexión continua, es decir, las vigas de conexión se reemplazan por un sistema de láminas distribuidas uniformemente. Como consecuencia del método continuo, la estructura tridimensional (3D) conduce a una viga de reemplazo (RB) que se caracteriza por las propiedades equivalentes K_i que tratan de representar de forma adecuada a la rigidez real del sistema estructural. Es importante mencionar que con el objetivo de obtener sistemas RB más precisos para el análisis estructural de los edificios altos, se va a utilizar un modelo matemático con campos cinemáticos y propiedades de rigidez adicionales a los existentes en la literatura. Con el propósito desarrollar una metodología integral y tener en cuenta las discontinuidades verticales existentes en muchos edificios altos, se decidió no limitarse a edificios altos con sistemas estructurales regulares y se implementó el método de matriz de transferencia al método continuo.
- **Justificación práctico:** El autor espera que los resultados de este proyecto de investigación ayuden a las oficinas de ingeniería especializadas en el desarrollo de proyectos estructurales en edificios altos, a minimizar costo y tiempo en tecnología computacional y recursos humanos enfocándose prioritariamente en la elección de sistemas estructurales óptimos a cada proyecto estructural. Además, espera que la metodología desarrollada se tome en cuenta para que la comunidad académica pueda seguir desarrollando más análisis estructural utilizando métodos aproximados enfocados en otros problemas estructurales de interés.
- **Justificación social:** Los resultados de esta investigación resulta beneficioso principalmente para el ingeniero estructural; sin embargo, la sociedad en general puede también beneficiarse cuando se requiera evaluar a gran escala un plan de fortalecimiento estructural de las estructuras existentes previo a un desastre natural como los terremotos.

1.5 DELIMITACIONES DEL ESTUDIO

El desarrollo del proyecto de investigación comprende los siguientes elementos: el espacio geográfico, los sujetos que participan en la investigación y el contenido.

- **Espacio geográfico.** La investigación tiene un espacio geográfico a nivel mundial debido a que actualmente todos los países tienen edificios altos. El proyecto de investigación se limita al estudio de los sistemas lineales, se reconoce la necesidad de estudiar la respuesta no lineal de las estructuras; sin embargo, estudios anteriores han demostrado que se percibe un mayor aumento de las fuerzas sísmicas en el rango lineal con respecto al rango no lineal. Como consecuencia el enfoque lineal puede considerarse conservador para sistemas no lineales. Se consideran que las losas son rígidas en su plano y únicamente transfieren fuerzas horizontales; es decir no transfieren fuerzas verticales o de flexión. Además, el proyecto de investigación se enfoca en un análisis global que no se limita a sistemas estructurales que son regulares, permitiendo analizar sistemas estructurales con discontinuidades verticales en la altura del edificio.
- **Sujetos que participarán en la realización del estudio.** La población de estudio lo constituyen los edificios altos. Al respecto, no existe una definición universalmente reconocida del edificio alto, porque la altura es un parámetro relativo. Para efectos del proyecto de investigación la altura mínima a considerar es el correspondiente a un edificio de 4 pisos debido a que para utilizar el método continuo es necesario que existan suficientes vigas de conexión como para considerar una conexión continua entre los componentes verticales.
- **Contenidos.** Para llevar a cabo la operacionalización de las variables, se trabajará con la variable independiente “método continuo y método de matriz de transferencia” y con la variable dependiente “análisis estructural global de edificios altos”.

2 CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

2.1.1 Investigaciones internacionales

Resumir una cronología completa sobre el estudio del análisis estructural de los edificios altos utilizando el método continuo y el método de matriz de transferencia sería demasiado extenso. Por lo tanto, se hará una revisión de las investigaciones más relevantes al tema de estudio del presente proyecto de investigación.

El uso de la técnica del medio continuo en ingeniería estructural se remonta al trabajo de Jacobsen (1930), quien modeló el suelo subyacente como una viga de corte, con el objetivo de evaluar la respuesta del sitio. Un poco más tarde, Biot (1933) y Westergaard (1933) consideraron el mismo modelo continuo para estimar el comportamiento del edificio.

Probablemente el método de conexión continua fue creado por Chitty (1947), quien propuso la primera formulación del método de conexión continua utilizando una viga de corte y una viga de flexión acopladas mediante barras rígidas. Investigó vigas paralelas interconectadas por barras transversales, sometidas a una carga lateral uniforme, y estableció la ecuación diferencial que resuelve el problema. En un trabajo posterior Chitty y Wan (1948) aplicaron la técnica del medio continuo para analizar edificios altos sujetos a una carga de viento uniformemente distribuida en altura pero sin considerar la deformación axial de las columnas.

Rosenblueth y Holtz (1960), utilizaron una viga de corte para relacionar la pendiente con el momento de flexión y la deriva de entrepiso. Resolvieron la distribución de corte entre el muro y el pórtico, utilizando un método de aproximaciones sucesivas.

Vlasov (1961), fue el creador de la teoría de las áreas sectoriales. Fue el primero en combinar la teoría de sección abierta de pared delgada con el enfoque continuo para analizar el comportamiento torsional de muros de corte tridimensionales, definiendo la tendencia de la acción del bimomento como resultado de esta deformación. Basados en esta teoría, muchos investigadores introdujeron formulaciones continuas para el caso de secciones cerradas y abiertas.

Khan y Sbarounis (1964), utilizaron el acoplamiento de una viga de corte y una viga de flexión y resolvieron la interacción entre los muros de corte y los pórticos mediante una solución en la cual el muro de corte es tratado como el sistema primario y el marco como el sistema secundario, o viceversa. Las deformaciones resultantes del sistema primario se imponen en el sistema secundario. Las fuerzas de resistencia inducidas en el sistema secundario se toman como la carga de corrección en el sistema primario. Este proceso se repite sucesivamente hasta lograr la convergencia del equilibrio y la compatibilidad de las deformaciones.

Glück (1970), presentó un método continuo tridimensional para estructuras que consisten en muros de corte y pórticos dispuestos asimétricamente en el plano del piso. Utilizó el enfoque continuo y la teoría de las secciones de paredes delgadas de Vlasov (1961). En función de las condiciones de compatibilidad y equilibrio, derivó un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas con las funciones de desplazamiento traslacional y rotacional. Sin embargo, este análisis no incluyó el efecto de las deformaciones axiales de los muros de corte y de los pórticos.

Glück y Gellert (1972), desarrollaron un análisis tridimensional de un edificio alto asimétrico más completo y tuvieron en cuenta la influencia de las deformaciones axiales en los pórticos y en los muros de corte. Derivaron las ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden de las fuerzas de corte en el sistema de láminas. Con las funciones básicas conocidas, establecieron todas las fuerzas y desplazamientos interiores de los elementos de refuerzo individuales.

Tso y Bismas (1973), desarrollaron un método para el análisis tridimensional de muros de corte acoplados no planos de sección transversal arbitraria y consideraron las deformaciones axiales de los muros de corte. Basado en las condiciones de compatibilidad y equilibrio, derivaron un conjunto de tres ecuaciones diferenciales acopladas, que pueden reducirse a una sola ecuación con la deformación rotacional como variable.

Heidebrecht y Stafford (1973), representaron el muro de corte mediante una viga de flexión y el pórtico mediante una viga de corte, y los conectaron mediante un medio de enlace axialmente rígido distribuido a lo largo de la altura del edificio. Las columnas de los pórticos se consideraron axialmente rígidas. A partir de esa representación continua, propusieron la solución para las deflexiones de estructuras uniformes de muro de corte - pórticos basados en la ecuación diferencial que rige el sistema.

Reinhorn (1978), desarrolló un modelo analítico aproximado para el análisis estructural estático de elementos estructurales basado en el método continuo e incluyó las deformaciones axiales a través de solo tres deformaciones horizontales (dos traslaciones y una rotación), para el caso de edificios con variabilidad estructural en altura utilizó el método de matriz de transferencia. El modelo desarrollado fue parte de un modelo general perturbativo, donde la solución perturbativa permitió verificar y corregir errores si era necesario. Además, investigó la influencia de las cargas estáticas y el efecto del acoplamiento traslacional torsional en la respuesta dinámica.

Nollet (1979), proporcionó una exposición detallada sobre el comportamiento de las estructuras continuas y discontinuas de muro de corte - pórtico, considerando la influencia de la interacción horizontal entre los muros de corte y los pórticos para rigidizar la estructura. Desarrolló soluciones continuas que permiten generalizaciones sobre el comportamiento de una amplia gama de estructuras de muro de corte - pórtico. Para estructuras de muro de corte - pórtico con variabilidad estructural en altura, encontró que las paredes se pueden reducir sin modificar significativamente la interacción horizontal general y la rigidez lateral.

Stafford, Kuster y Hoenderkamp (1981), generalizaron la técnica del medio continuo que se había aplicado antes a las estructuras de muros de corte acoplados, para que pudiera aplicarse a cualquier tipo de voladizos de flexión y corte. Definieron los parámetros característicos αH y k^2 , donde k^2 incluye la consideración de la deformación axial de los elementos verticales.

Hoenderkamp (1983), extendió la solución continua para estructuras asimétricas, propuso una solución generalizada que incluía las deformaciones axiales de los muros de corte y los pórticos. Las ecuaciones diferenciales de torsión-flexión acopladas se desacoplaron usando una transformación ortogonal.

Miranda (1999), utilizó el modelo continuo para estimar las demandas máximas de desplazamiento lateral en edificios altos que responden principalmente en un modo fundamental cuando se someten a movimientos sísmicos. Este método permite una estimación rápida del desplazamiento máximo y de la deriva de entrepiso máxima para una historia de aceleración o para un espectro de respuesta de desplazamiento. El procedimiento se basa en un modelo simplificado de edificios de varios pisos que consiste en una combinación de una viga en voladizo de flexión y una viga en voladizo de corte. El modelo simplificado se utiliza para investigar la relación entre el desplazamiento espectral, el desplazamiento máximo y la relación de deriva de entrepiso máxima

a la relación de deriva del edificio. Sin embargo, descuidó las deformaciones axiales, que son importantes de considerar en el análisis estructural de edificios altos.

Shiu Cho (1999), basado en el método continuo desarrolló una solución general aproximada basada en el método de Galerkin al problema de valores propios de estructuras complejas en vibraciones triplemente acopladas. Además, desarrolló un estudio paramétrico que permite visualizar como las frecuencias acopladas y las formas de modo se relacionan con los parámetros claves del comportamiento dinámico del edificio; construyendo varios gráficos de que diseño útiles para las oficinas de ingeniería.

Kuang y Ng (2000), propusieron un método para determinar los modos y períodos interconectados de estructuras asimétricas. Se ha utilizado el enfoque de Galerkin para obtener el modelo. En una estructura asimétrica que se examinó con el fin de mostrar la precisión del método, se observó que el modo y los períodos obtenidos por el método propuesto eran lo suficientemente cercanos a los períodos y modos encontrados con elementos finitos.

Wang y Liu (2001), basados en el método continuo y el método de matriz de transferencia investigaron el efecto de la altura del muro de corte de sobre el comportamiento dinámico de los sistemas estructurales de muros de corte - pórtico. Demostraron que la altura del muro de corte no influye en el comportamiento dinámico, salvo en casos muy especiales y que no es necesario extender el muro de corte sobre toda la altura del edificio.

Hans (2002), desarrolló un programa experimental sobre edificios antes y después de la demolición de un edificio de muros de corte de 16 pisos con el objetivo de recopilar información para integrarlo en un diagnóstico de vulnerabilidad sísmica de los edificios existentes. Resultados de la información recopilada permitió caracterizar el comportamiento dinámico de los edificios mediante modelos simples del tipo viga de corte, viga de flexión y viga Timoshenko. Además, demostró en base a la información recopilada que el método de homogeneización de medios periódicos discretos proporciona una justificación teórica para el uso de modelos de vigas continuas para caracterizar el comportamiento dinámico de estructuras reales.

Potzta (2002), desarrolló un modelo de viga de reemplazo para todo el edificio utilizando una viga sándwich con un enfoque energético y derivó las tres rigideces características de la viga sándwich aplicando un desplazamiento sinusoidal y equilibrando la energía de deformación total

del edificio con la suma de las energías de deformación de cada sistema estructural. Utilizó este modelo de viga de reemplazo para los análisis de viento, terremoto y estabilidad del edificio.

Rafezy (2004), presentó dos enfoques de análisis global para el cálculo de las frecuencias de los edificios altos. Ambos métodos suponen diafragmas de piso rígidos y requieren un conocimiento de la excentricidad estática del edificio en cada nivel de piso. Debido a que los métodos para calcular la excentricidad estática son complicados, se presenta un método práctico de cálculo y un pequeño estudio paramétrico. Un análisis de precisión confirma que los métodos propuestos pueden arrojar resultados de precisión suficiente para los cálculos de ingeniería.

Takabatake y Satoh (2006), propusieron un método analítico que reemplaza al edificio por una varilla equivalente continua para el análisis dinámico de edificios de gran altura que consisten en tubos de estructura doblemente simétrico con o sin arrostamientos. La solución de las ecuaciones diferenciales se resolvió por el método de diferencia finita, la idoneidad del método se verificó con cuatro tipos diferentes de edificios analizados con el método de elementos finitos. Además, se discute el efecto de la interacción suelo - estructura utilizando el método propuesto.

Espezúa (2009), utilizó un método de análisis basado en la técnica del medio continuo para estudiar el comportamiento estático y dinámico de los edificios altos frente a los terremotos. La aproximación del método se comparó con los resultados de un análisis por elementos finitos con el programa SAP 2000, obteniéndose valores con una aproximación aceptable para los términos de ingeniería.

Jigorel (2009), desarrolló diferentes modelos continuos utilizando el método de homogeneización de medios periódicos discretos para representar el comportamiento dinámico de los edificios. Destacó una nueva ecuación genérica de las cuales se derivan los demás comportamientos particulares, encontrando un nuevo parámetro que mide la influencia de la rigidez a cortante local de los muros de corte

Bozdoğan (2010), utilizó el método continuo y el método de matriz de transferencia para el análisis estático, dinámico y estabilidad del edificio alto cuyas propiedades geométricas, materiales y de carga varían a lo largo de la altura modelando al edificio como una viga de reemplazo tipo sándwich. Para el caso de las estructuras asimétricas descuidó la rigidez al corte de los muros de corte y las deformaciones axiales de los pórticos y muros de corte acoplados.

Chesnais (2010), estudió el comportamiento dinámico de una familia de estructuras reticulares, formadas por una red de vigas mediante el método de homogeneización de medios periódicos discretos permitiendo construir un medio continuo equivalente a escala macroscópica que permite representar edificios cuando el tamaño de la celda es muy pequeño en comparación con la longitud de onda. Desarrolló diferentes modelos continuos y generalizó el modelo de viga tipo sándwich incluyendo la rigidez al corte local para el caso de edificios con muros de corte de longitud importante.

Pârv (2012), desarrolló programas de cálculo basados en el análisis global de edificios altos y análisis espacial basado en formulaciones matriciales utilizando el lenguaje Matlab. Además, realizó un análisis de sensibilidad para desarrollar un programa de optimización estructural utilizando algoritmos genéticos.

Lavan (2012), adoptó un enfoque continuo para modelar la estructura y evaluar rigurosamente la eficiencia de los amortiguadores viscosos que conectan dos paredes para dar como resultado a los muros de corte viscosamente acoplados. Encontró que bajo ciertas aproximaciones consideradas, la relación de amortiguamiento del sistema es un parámetro simple que controla la reducción de la respuesta de un sistema no amortiguado. Además, revela la eficiencia del amortiguamiento agregado para reducir no solo los desplazamientos, las derivas entre pisos y los momentos del muro, sino también las aceleraciones absolutas, el corte del muro, el corte total y los momentos de vuelco total.

Cammarano (2014), propuso un enfoque tridimensional sintético basado en el método continuo y la teoría de las áreas sectoriales de Vlasov. Este enfoque aproximado es adaptable al análisis estático y dinámico de los edificios altos uniformes o escalonados en la altura del edificio. Además, realiza una prueba experimental para medir el efecto de las vigas de pared delgada sujetas a torsión.

Huang (2009), encontró que el análisis pushover subestima la deriva en los pisos superiores y es deficiente para predecir los momentos de volteo, las fuerzas cortantes debido a que descuidan los modos de vibración altos. Para superar ese problema desarrolló un modelo continuo simplificado para el análisis sísmico de estructuras altas de muro de corte - pórticos diseñados para cargas de viento. Además, verificó la precisión del modelo investigando tres edificios altos de pórtico - muro de corte, con resultados satisfactorios en comparación con el análisis pushover.

Tuncay (2014), desarrolló un método continuo para determinar los efectos de la torsión no uniforme de Vlasov causada por cargas horizontales en los edificios altos. Como resultado de un análisis de sensibilidad, se obtuvo una buena precisión del modelo y demostró que la torsión no uniforme es de gran importancia, el cual no debe descuidarse en el análisis.

Moghadasi (2015), propuso dos vigas de reemplazo basados en el método continuo para el análisis estructural de edificios altos. La primera viga consiste en el acoplamiento en paralelo de dos vigas Timoshenko y tiene en cuenta las cuatro rigideces características de un edificio alto, y es aplicable a todos los sistemas estructurales. La segunda viga consiste en el acoplamiento en paralelo de una viga Timoshenko extensible y un núcleo continuo como una restricción de rotación de soporte. Debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales acopladas, desarrolló una formulación de elementos finitos unidimensionales evaluando las respuestas estáticas y dinámicas. Además, usando un sistema discreto de muros de corte acoplados estableció teóricamente la amortiguación viscosa interna distribuida del tipo Kelvin-Voigt con los mecanismos de flexión y corte.

Lavan y Abecassis (2015), estudiaron el comportamiento sísmico de un sistema continuo de muro de corte - pórticos en el contexto de la rehabilitación de estructuras de pórticos existentes. Primero identificaron los parámetros no dimensionales de control de tales sistemas. A esto le sigue un riguroso y extenso estudio paramétrico que revela los pros y los contras del nuevo sistema frente a los sistemas de muro de corte - pórtico. Se analizan y discuten los efectos de los parámetros de control sobre el comportamiento del nuevo sistema.

Aydin (2016), desarrolló una metodología para calcular las cargas críticas de pandeo de edificios sobre cimentaciones elásticas y rígidas resolviendo las ecuaciones de estabilidad expresadas por ecuaciones diferenciales con el Método de la Transformada Diferencial (DTM).

Migliorati y Mangione (2015), utilizando el método continuo modelaron cada sistema estructural de forma diferente y estudiaron su combinación tridimensional. Desarrollaron un modelo continuo acoplado de Timoshenko - Vlasov y un modelo discreto para tener en cuenta los efectos de la flexión local. Debido a la complejidad del acoplamiento entre las ecuaciones diferenciales, formularon un modelo de elementos finitos unidimensionales para el análisis estático y dinámico de los edificios altos.

Puthanpurayil, Lavan, Carr y Dhakal (2016), adoptaron el modelo de amortiguamiento continuo local para el análisis sísmico aplicando el procedimiento de Galerkin. Dos modelos locales de amortiguamiento continuo utilizados en el régimen de análisis dinámico lineal se adaptan y extienden al escenario de análisis dinámico no lineal. Además, se presentó esquemas para implementar los modelos utilizando el marco clásico de Newmark. Demostraron que todos los modelos propuestos parecen producir resultados más fiables que los modelos globales sin aumentar la demanda computacional.

Anesi (2018), desarrolló una metodología simple para abordar el problema de la definición de la acción dominante entre el viento y el terremoto, con especial referencia al caso de estructuras ubicadas en una zona de baja sismicidad, así como para refinar este procedimiento adoptando un modelo analítico de viga de reemplazo continuo que consiste en el acoplamiento en paralelo de una viga de flexión y corte. Como resultado de tres estructuras de referencia, destacó una mayor influencia del sismo en la definición de acción dominante cuando se tienen en cuenta los modos de orden superior.

Kara (2019), con el objetivo de estudiar la interacción suelo - estructuras investigó el comportamiento dinámico de edificios asentados sobre cinco clases de suelos diferentes. Determinó que el modelo de viga de corte que representa al suelo, proporciona resultados consistentes y aceptables ingenierilmente. Además, este modelo es adecuado para comprender el comportamiento de la interacción suelo - estructura con menos parámetros que los utilizados con el método de elementos finitos.

Zalka (2020), basado en el enfoque continuo desarrolló ecuaciones de forma cerrada para dos categorías de análisis: a) Un análisis individual y b) Un análisis tridimensional (enfoque global), donde desarrolló ecuaciones de forma cerrada para los desplazamientos presentando dos metodologías: el método simple y el método preciso (utilizando la interacción entre las deformaciones de flexión y cortante), la estabilidad, la frecuencia y la carga crítica de edificios enteros. Además, introdujo la relación de carga crítica global que actúa como una característica genérica con la que el diseñador puede monitorear el desempeño general de todo el edificio.

Dinh (2020), basado en el método de homogeneización de medios periódicos discretos estableció un método práctico que estima el comportamiento dinámico de edificios utilizando modelos de vigas generales e integró estos modelos para incluir a los amortiguadores viscosos en

el análisis. Concluyó que la adición de amortiguadores viscosos solo modifica el parámetro de cortante en los modelos genéricos de vigas.

Franco (2021), basada en el método de homogeneización de medios periódicos discretos y el método de elementos finitos multifibras, propuso una estrategia para mejorar la integración de las escalas local y global en la definición de indicadores de daños en la respuesta del edificio. Implementó el método de homogeneización en estructuras complejas de múltiples pórticos, describió el modelado numérico (MEM) de un solo piso y propuso una novedosa estrategia que podría utilizarse como criterio de daño.

Gungor y Bozdogan (2021), utilizando el método continuo y el método de transformación diferencial adaptaron una viga de reemplazo tipo Timoshenko para el análisis dinámico de sistemas de muros de corte de placa de acero. Además, en base a las características dinámicas realizaron un análisis de espectro de respuesta encontrando el desplazamiento, la fuerza cortante y los momentos flectores.

2.1.2 Investigaciones nacionales

Se ha realizado una exhaustiva búsqueda de investigaciones similares en el Perú. Al respecto, no se ha encontrado ninguna investigación relacionada con este proyecto de investigación.

2.2 BASES TEÓRICAS

Desde tiempos inmemorables, el hombre ha querido construir estructuras que fueran más allá de sus posibilidades para demostrar poder y riqueza; para honrar a los líderes y creencias religiosas e incluso simplemente como un objetivo de competencia entre propietarios, familias, arquitectos y constructores.

Estructuras como la Torre de Babel (figura 3) a la que la Biblia hace referencia: “Y dijeron: Vamos, edifiquémonos una ciudad y una torre, cuya cúspide llegue al cielo; y hagámonos un nombre, por si fuéramos esparcidos sobre la faz de la tierra” (Génesis (11:4), 2019). Los hijos de los hombres pareciera que estuvieran afrentando o rivalizando con Dios, pues querían edificar una torre cuya cúspide llegue al cielo. Además, esperaban hacerse un nombre que sea recordado por los hombres a través de tiempo, dejando como legado este monumento símbolo de su orgullo, de

su ambición y de su insensatez. Sin embargo, hasta la fecha no existe ningún libro de la historia en el que se recuerde ni un solo nombre de estos edificadores de la torre de Babel. Paradójicamente, Babel significa confusión; esto nos debe recordar que quienes ambicionan un gran nombre, salen ordinariamente con un mal nombre.



Figura 3. La Torre de Babel (Brueghel, 1563).

Los factores que contribuyeron decisivamente al desarrollo de los edificios altos se dieron en el siglo XIX. El primero fue la creación del ascensor seguro en 1853 por el inventor estadounidense Elisha Graves Otis (figura 4), quien desarrolló un dispositivo de seguridad que evitaba la caída de los ascensores tradicionales cuando se rompía el cable, poco tiempo después se abrió al público el primer ascensor de pasajeros en el edificio E. V. Haughwout de Nueva York; el segundo factor se dio en el devastador incendio de Chicago en 1871 (figura 5), donde contrario al sentido común la ciudad experimentó un crecimiento exponencial, tan solo nueve años después, el terreno disponible para la construcción de nuevos edificios no pudo satisfacer la demanda lo que condujo como única opción de construir en altura.

Según Darío Trabucco: “En las plantas más altas solía vivir la gente más pobre, pero el ascensor cambió este escenario y pronto se pusieron de moda los pisos altos al ofrecer una luz más natural, un aire más limpio y menos ruido de tráfico”. Los nuevos métodos de construcción permitieron alcanzar alturas cada vez mayores, nació el rascacielo, comenzando así la carrera por el edificio más alto.

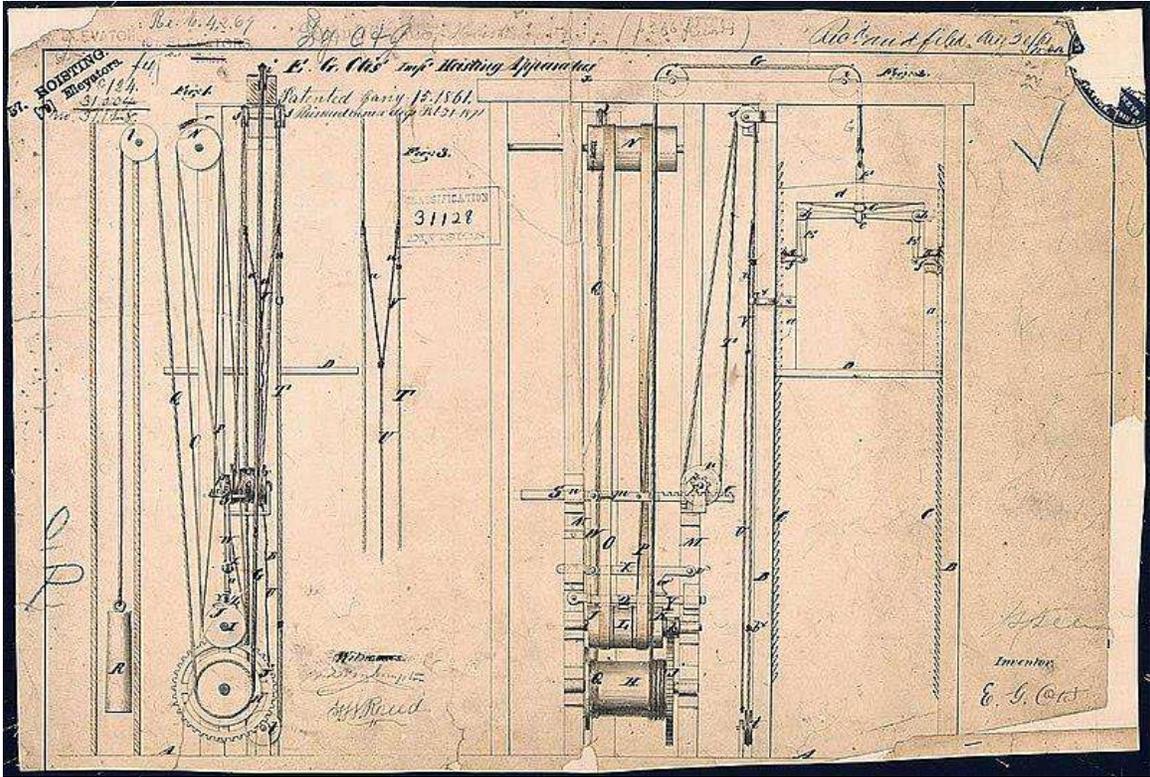


Figura 4. Dibujo de la patente del ascensor (Otis, 1861).

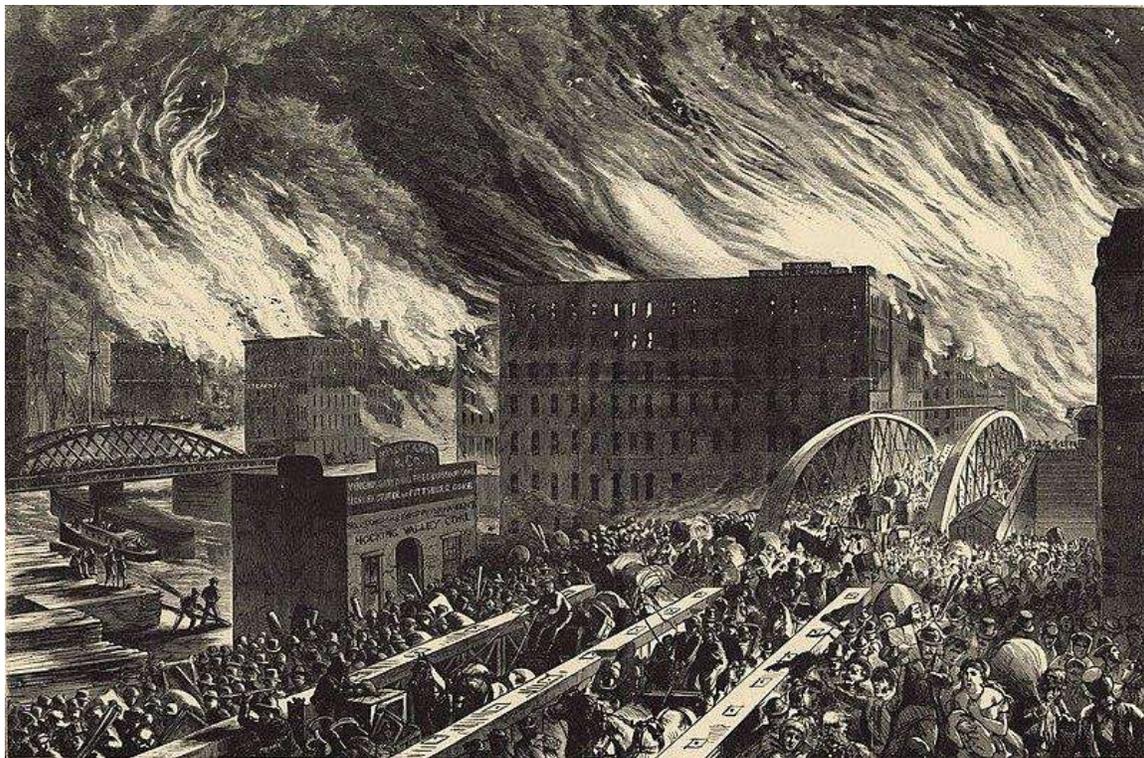


Figura 5. Chicago en llamas - La carrera por las vidas sobre el puente de la calle Randolph (Chapin, 1871).

Hoy, el mundo está presenciando un rápido crecimiento de la población. En los últimos 200 años, la población mundial pasó de los 1000 millones en el año 1800 a los 7900 millones a inicios del 2022. Este patrón de desarrollo se basa en un suministro inagotable de tierra cultivable, agua y energía que no podrá sostenerse en los próximos años. Si bien es cierto los edificios no son la única fuente de contaminación ambiental; el lugar donde construimos, la forma como construimos y la forma como nos movemos son las principales causas del cambio climático. Una forma de solucionar este desafío es diseñando formas inteligentes de asentamiento humano, que sean densos, compactos y altamente habitables. Un ejemplo claro de sostenibilidad y contaminación cero es el puente Q'eswachaka (Figura 6), ubicado sobre el río Apurímac en Cusco Perú. De Wolf (2015) afirma: “los materiales crecen naturalmente, son de origen local y su construcción a mano no contamina, así que es un proceso histórico que debe inspirar a los ingenieros de la actualidad”.



Figura 6. Puente Q'eswachaka en la actualidad (Palomo, 2020).

Sin embargo, el rápido crecimiento en altura de los edificios altos al parecer está relacionado directamente con las crisis económicas. En 1999, el economista Andrew Lawrence (Thornton, 2005) creó el índice de rascacielos, cuyo objetivo era demostrar que la construcción de los rascacielos más altos del mundo coincide con los ciclos económicos. Concluyó que la construcción del edificio más alto del mundo es un buen indicador para determinar el inicio de grandes crisis económicas.

Si se observa la tabla 1, es claro afirmar que la capacidad del índice de rascacielos para predecir el colapso económico es sorprendente. Por ejemplo, el Pánico de 1907 fue presagiado por el edificio Singer Building y el Edificio Metropolitan Life; la Gran Depresión fue presagiado con

precisión por los edificios Chrysler Building, Empire State Building y el 40 Wall Tower; la estanflación que sufrió Estados Unidos entre 1970 y 1982 fueron presagiados sorprendentemente por los edificios World Trade Center (uno y dos) y Sears Tower; la culminación de las Petronas Tower en 1997 marcó el comienzo de la caída extrema en el mercado de valores de Malasia, la rápida depreciación de su moneda y el descontento social generalizado, extendiendo estos problemas económicos a todas las economías de la región (contagio asiático) y el Burj Khalifa de Dubái que se terminó en 2010 poco tiempo después de que el país entrara en crisis financiera. Sin embargo, hay excepciones importantes en la capacidad del índice para predecir una crisis económica, ejemplos claros son la construcción del edificio Woolworth (al parecer no fue una excepción completa debido a que la Primera Guerra Mundial no proporcionó suficiente tiempo para que la depresión económica se profundizara) y la recesión económica continua de Japón desde 1990. Esto no sugiere que las alturas de los edificios altos deben limitarse para evitar las crisis económicas, tal como lo propone Thornton (2005) las instituciones que regulan el financiamiento de la deuda deben reevaluarse o ser cambiados por instituciones más eficientes y estabilizadoras.

Tabla.1 *Rascacielos y las crisis económicas (Thornton, 2005).*

Completed	Building	Location	Height	Stories	Economics Crisis
1908	Singer	New York	612 ft.	47	Panic of 1907
1909	Metropolitan Life	New York	700 ft.	50	Panic of 1907
1913	Woolworth	New York	792 ft.	57	-
1929	40 Wall Street	New York	927 ft.	71	Great Depression
1930	Chrysler	New York	1,046 ft.	77	Great Depression
1931	Empire State World Trade	New York	1,250 ft.	102	Great Depression
1972/73	Center	New York	1,368 ft.	110	1970s stagflation
1974	Sears Tower	Chicago	1,450 ft.	110	1970s stagflation
1997	Petronas Tower	Kuala Lumpur	1,483 ft.	88	East Asian
2012	Shanghai	Shanghai	1,509 ft.	94	China?

Estudios demuestran que la vanidad es la principal justificación que llevan a los inversores a arriesgar recursos a la construcción de edificios muy altos. En 1998, todavía el que se convertiría en el ex presidente de los Estados Unidos de Norteamérica, Donald Trump, declaró como justificación para la construcción de su Torre Trump una frase sin sentido financiero: “Creo que Nueva York debe tener el edificio más grande del mundo” (Lawrence, 1998).

Knutsen (2011) en su tesis doctoral conjeturó que los rascacielos podrían darnos pistas sobre quienes los construyeron. Afirma: “los regímenes autocráticos tienden a construir tales edificios más excesivos y, en contraste con las democracias, tienden a construir rascacielos independientemente de si el país está urbanizado o no”. Gjerlow y Knutsen (2017) afirman: “las autocracias construyen más rascacielos que las democracias y las autocracias construyen rascacielos más derrochadores que las democracias”. Además, señalaron que la subvención de tales proyectos a menudo restarán recursos a las inversiones más importante como carreteras locales, escuelas o clínicas de salud en todo el país; esto es importante en países pobres y en vías de desarrollo (como el Perú) donde los recursos son escasos y donde la población tiende a limitar la construcción de edificios muy altos.

Cabe resaltar que el Consejo de Edificios Altos y Hábitat Urbano (CTBUH), clasifica a los edificios más altos del mundo por altura y por pináculo, notando que varios edificios aparecen más altos en la clasificación de lo que lo serían debido a sus agujas, mástiles y estructuras extras que añaden a los edificios con el único fin de ganar altura. Al respecto Gjerlow y Knutsen (2017), afirman: “La altura de vanidad, se presentan más en las autocracias que en las democracias”. Como ejemplo, el edificio más alto del mundo en la actualidad, el Burj Khalifa de 828 metros de altura, ubicado en los Emiratos Árabes Unidos, tiene una excesiva área no ocupada del 30% y lo que sería probablemente el siguiente edificio más alto del mundo, la Torre Jeddah de 1000 metros de altura (potencialmente realizando el “Sueño imposible” de Ludwig Mies van der Rohe de la década de 1920 y “Mile High Illinois” de Frank Lloyd Wright de 1956 (Skelton, 2016)), ubicado en Arabia Saudita, tendrá un 37% de la altura total que no podrá ser utilizada. Analizando estos datos, cuesta no preguntarse acerca del exagerado papel que cumple la vanidad en las decisiones constructivas más espectaculares de los últimos años.

- **Definición del edificio alto**

No existe una definición universalmente reconocida del edificio alto, porque la altura es un parámetro relativo. Históricamente se han definido a los edificios de poca altura como aquellos que tienen menos de 8 pisos, edificios de mediana altura aquellos que tienen entre 8 y 20 pisos, y edificios altos aquellos que superan los 20 pisos.

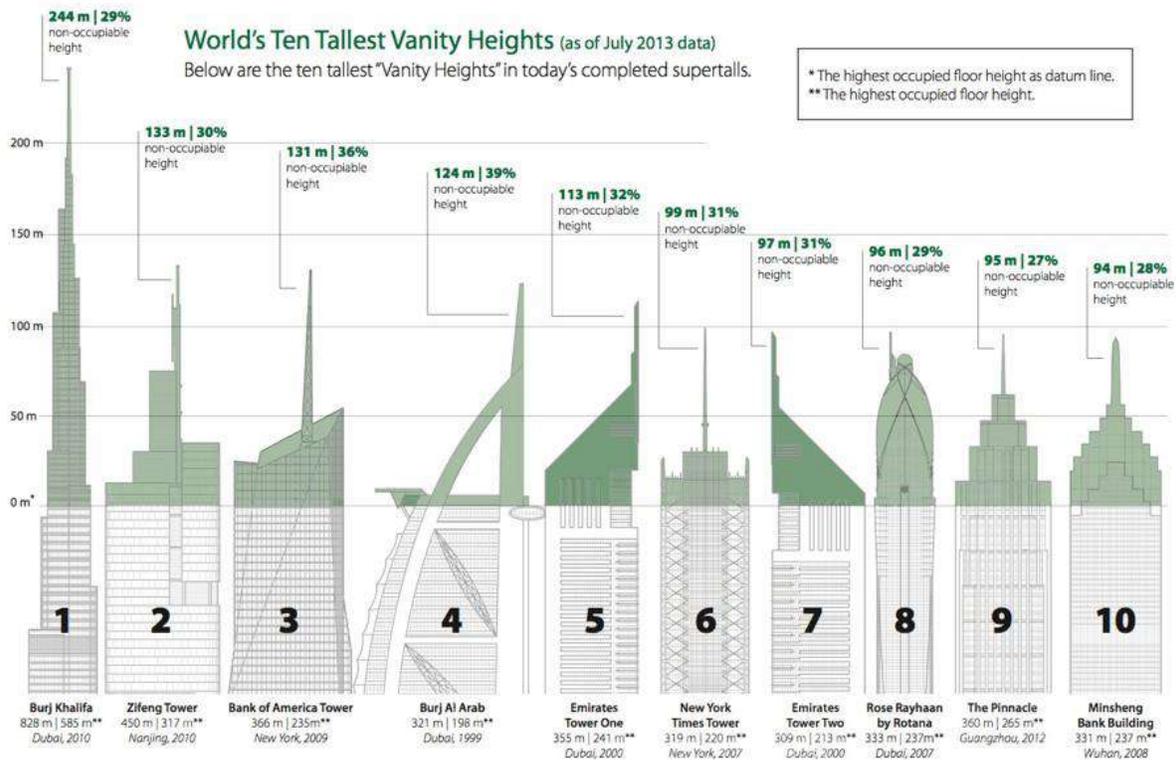


Figura 7. Los 10 edificios más altos del mundo con mayor número de metros de vanidad (CTBUH, 2013).

Cuando se analiza con más detalle aquello que nos parece evidente, se comienzan a presentar ciertas dudas. Si se le preguntara a una persona ¿Qué es un edificio alto?, tal vez su respuesta inmediata sería precisamente eso: “un edificio alto, es un edificio alto, es decir, con muchos pisos”. La pregunta que debería hacerse en realidad es: ¿Qué es un edificio alto dentro de un contexto histórico, regional y mundial? En la actualidad, la gente ya casi no puede llamar a un edificio de 20 pisos como un edificio alto, si es que se lo va a comparar con los edificios más altos del mundo. La definición que más se acerca a esta aclaración es la Stafford y Coull (1991), en la que se señala que no es seguro indicar cuantos pisos se necesitan para definir a un edificio alto porque esto está condicionado con el periodo histórico en el que la estructura se encuentra; además, del tipo de edificios que se encuentran presente en la ciudad donde se ubica el edificio.

Según el Consejo de Edificios Altos y Hábitat Urbano (CTBUH), la autoridad que anuncia el título de “El edificio más alto del mundo”, la clasificación de las estructuras altas es subjetiva y depende de la altura de un edificio en relación con el contexto en el que se encuentra, de su proporción (o esbeltez) y de tecnologías adoptadas relacionadas con la altura. En ese sentido, para

que un edificio sea considerado como un edificio alto, debe tener una de las siguientes características:

- ✓ Altura relativa al contexto: cuando un edificio es claramente más alto que el valor medio de las alturas de los edificios de su entorno.
- ✓ Proporción: cuando el edificio es lo suficientemente esbelto como para dar la impresión de verticalidad de un edificio alto.
- ✓ Tecnologías de construcción alta: el edificio contiene tecnologías que son un producto de la altura de los edificios, como tecnologías específicas de transporte vertical y arriostramiento estructural contra el viento.

Según lo definido por el Consejo de Edificios Altos y Hábitat Urbano (CTBUH), un edificio de 14 pisos o que tenga una altura de 50 m o más se considera típicamente un edificio alto. Las estructuras cuya altura excede los 300 m se clasifican como súper altos (supertall) y aquellos que superen los 600 m se clasifican como mega altos (megatall). El mismo principio de medición de la altura de un edificio recto se aplica a los edificios inclinados, lo que significa que la altura se mide verticalmente desde la base hasta la parte superior.

Günel e Ilgin (2014) definieron a los edificios altos según la especialidad: Por los diseñadores estructurales como edificios que requieren un sistema estructural inusual y donde las cargas de viento son prominentes en el análisis y el diseño; por los diseñadores arquitectónicos como edificios que requieren trabajo interdisciplinario, en particular con diseñadores estructurales, y con expertos en los campos de aerodinámica, mecánica y planificación urbana que afectan el diseño y el uso; y por los ingenieros civiles como edificios que necesitan técnicas de construcción inusuales y sofisticadas.

De lo anterior, desde el punto de vista de un ingeniero estructural, podemos definir una estructura como un edificio alto cuando la primera prioridad en la consideración del análisis estructural y el diseño es el sistema de estabilidad lateral, debido a que su análisis estructural y diseño se ven afectados principalmente por las cargas laterales como el viento y el terremoto.

No podemos olvidar que, aunque la altura de los edificios altos es un parámetro importante debido a que determina las fuerzas laterales distribuidas en altura, la esbeltez es quizás el parámetro fundamental en términos de ingeniería estructural debido que condiciona el reparto de las cargas

en los elementos estructurales. Definida como la relación entre la altura y el ancho estructural, condiciona muchos aspectos relacionados con los efectos de las acciones horizontales.

✓ **Sistemas estructurales de los edificios altos**

La característica clave de un edificio alto desde el punto de vista del análisis y diseño estructural es su sistema estructural de estabilidad lateral. Hubo varios intentos a lo largo de los años para clasificar los sistemas estructurales que son apropiados para edificios altos.

Fazlur Khan (1969), considerado como “el Einstein de la ingeniería estructural”, “el mejor ingeniero estructural del siglo XX” y “el padre de los sistemas tubulares”, clasificó los sistemas estructurales para edificios altos en relación con sus alturas con consideraciones de eficiencia estructural en forma de diagramas: "Alturas para sistemas estructurales". Más tarde desarrolló nuevos diagramas basados en el material estructural utilizado: acero estructural, concreto armado y sistemas compuestos.

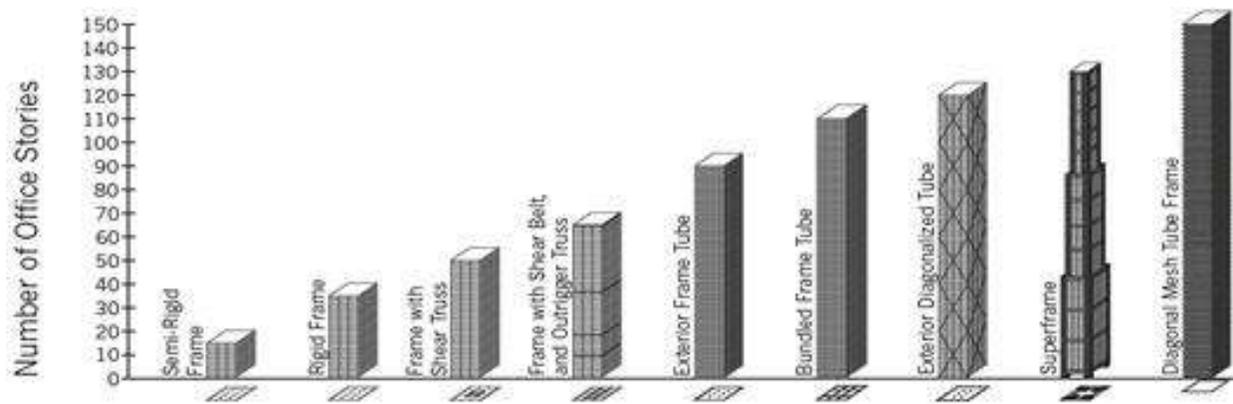
Aunque inicialmente Khan trabajó en estructuras pretensadas, cuando se enfrentó al desafío de analizar y diseñar edificios altos, se centró en ellas con pasión. Con una comprensión intuitiva de los aspectos técnicos de las estructuras se propuso encontrar el sistema estructural adecuado para edificios altos.

Argumentó que el pórtico rígido que había dominado el diseño y la construcción de los edificios altos durante tanto tiempo no era el único sistema estructural adecuado para los edificios altos y que los sistemas estructurales podrían analizarse en forma tridimensional, en lugar de una serie de sistemas planos. Los sistemas estructurales viables que mencionó son: El pórtico rígido, los muros de corte, muro de corte - pórtico y los sistemas tubulares.

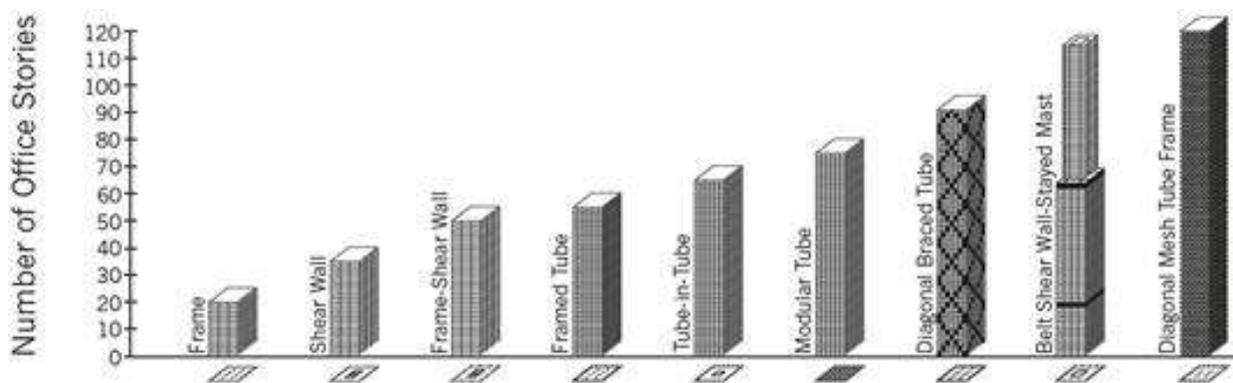


Figura 8. Fazlur Khan y Bruce Graham (de izquierda a derecha) junto a la maqueta del Hancock Center (Khouyali, 2021).

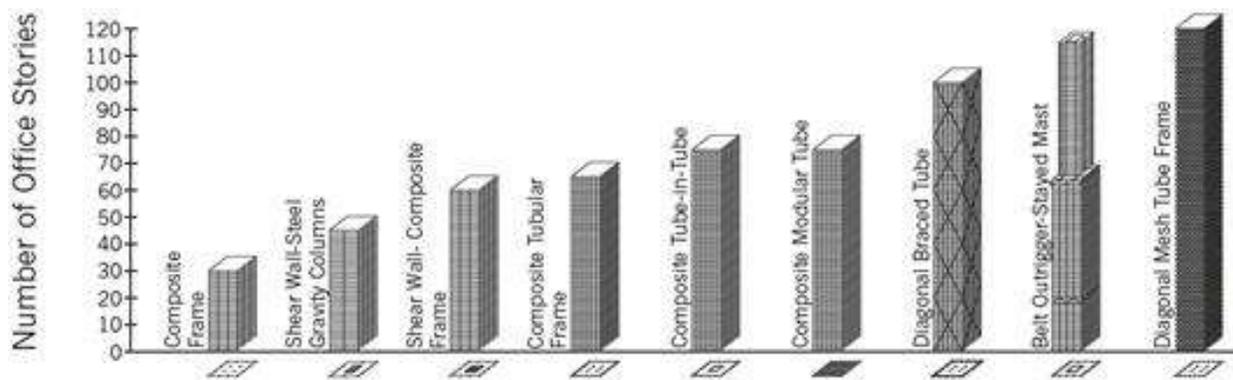
Existen varias formas de combinar los sistemas estructurales para lograr el desempeño adecuado. Por ejemplo, a principios del siglo XX, el sistema estructural que regía el análisis y diseño de los edificios altos era el sistema de pórtico rígido de concreto armado; este sistema consta de columnas y vigas que están conectadas rígidamente en sus nudos, lo que proporciona la ventaja de reducir el momento flector y la longitud de pandeo de las columnas. Sin embargo, este sistema no proporciona la rigidez adecuada lo que limitaba la altura de los edificios altos. Para superar este problema se desarrolló el sistema estructural de muro de corte - pórtico, que combinaba las ventajas del pórtico rígido con el muro de corte; con este nuevo sistema estructural se logró alcanzar la suficiente rigidez horizontal y conservar la flexibilidad de los espacios logrando alcanzar alturas mayores. Conforme aumentó el crecimiento de las ciudades este nuevo límite en altura no fue suficiente. Para construir estructuras aún más altas, se inventó el sistema estructural central, el cual, se suele combinar con otros sistemas estructurales más básicos como pórticos o arriostramientos en el perímetro del edificio para proporcionar estabilidad lateral al edificio.



(a)



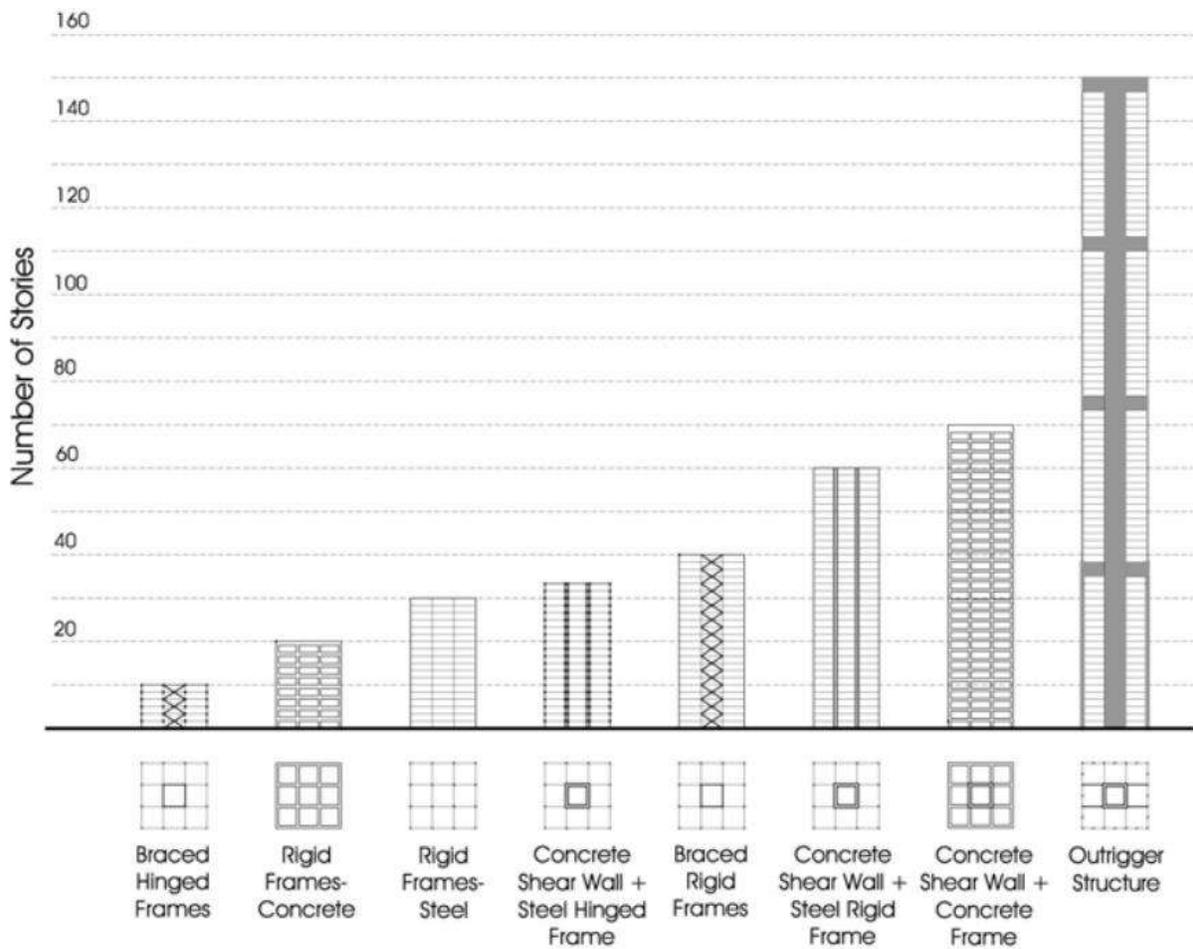
(b)



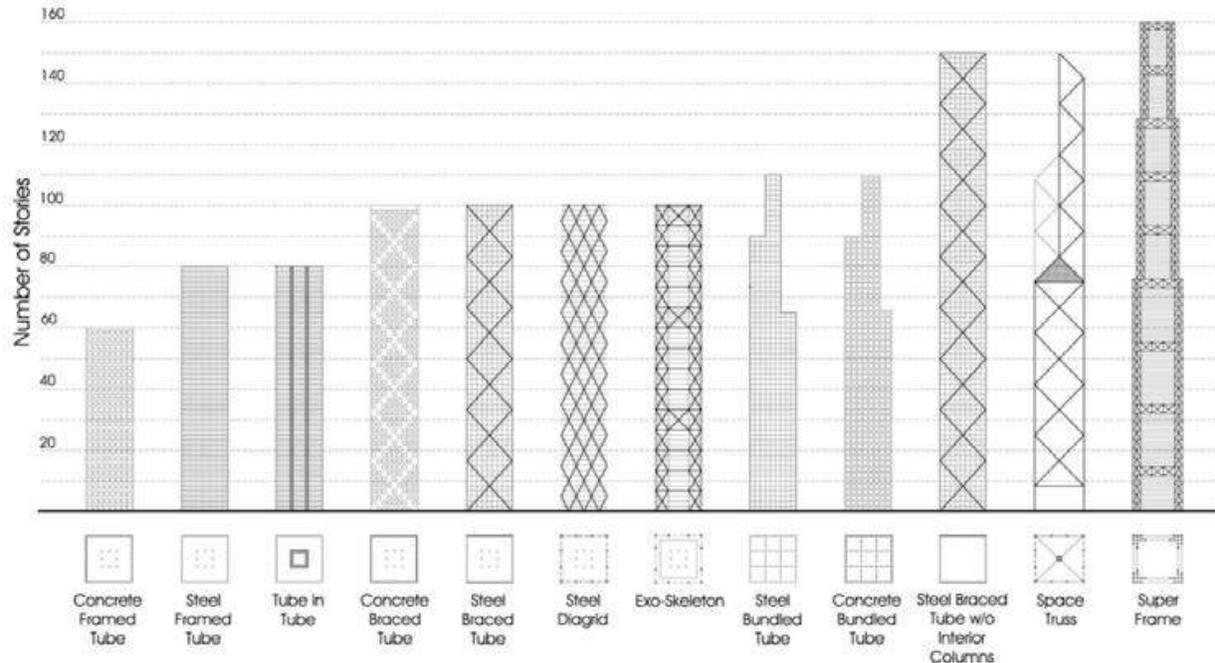
(c)

Figura 9. Clasificación de sistemas estructurales de edificios altos según Fazlur Khan. (a) Sistemas estructurales de acero, (b) Sistemas estructurales de concreto armado, (c) Sistemas estructurales compuestos (acero estructural + concreto armado) (Sarkisian, 2016).

En 2007, Mir y Kyoung (2007) desarrollaron una nueva clasificación basado en las capacidades de resistencia a la carga lateral. Dividieron a los sistemas estructurales de los edificios altos en dos grandes categorías: estructuras interiores y estructuras exteriores. Un sistema se clasifica como una estructura interior cuando la mayor parte del sistema de resistencia a la carga lateral se encuentra dentro del interior del edificio, del mismo modo, si la mayor parte del sistema de resistencia a la carga lateral se encuentra en el perímetro del edificio, un sistema se clasifica como una estructura exterior. Es importante mencionar que es deseable colocar la mayor cantidad de elementos resistentes lo más lejos posible acercándose al perímetro del edificio para resistir eficiente y conjuntamente las fuerzas laterales y torsionales.



(a)



(b)

Figura 10. Clasificación de las estructuras de los edificios de gran altura según Mir M. Ali. (a) Sistemas interiores, (b) Sistemas exteriores (Mir & Kyoung, 2007).

Hay varios factores a considerar al seleccionar un sistema estructural para los edificios altos: la seguridad, la comodidad de los ocupantes, la economía, la función prevista, las consideraciones arquitectónicas, el flujo de tráfico interno, la altura y la intensidad de la carga.

Es importante mencionar que solo los sistemas que sean adecuados y económicos para los edificios altos serán investigados en este proyecto de investigación. Por lo tanto, los sistemas especificados para edificios muy altos, no son los temas de este proyecto de investigación. Los sistemas estructurales considerados en esta sección son los siguientes: pórticos resistentes al momento, muros de corte, muros de corte acoplados, sistemas duales (Pórtico + Muro de corte) y núcleos.

- **Sistema de pórtico**

Los materiales de construcción más comunes son el acero y el concreto. En este sistema, la resistencia a cargas laterales es proporcionada por la interacción de las vigas y las columnas, es decir, por la rigidez a la flexión y al corte de la red de vigas y columnas (figura 11). En carácter general funciona mejor en concreto que en acero debido a que en acero los nudos suelen

considerarse como semirrígidas, mientras que en el concreto suelen considerarse como rígidos, esta característica a su vez parece ser una desventaja, debido a que el pórtico requiere conexiones rígidas que por lo general son costosas. Se requiere que, en el nudo rígido, la resistencia a la flexión de las columnas sea como mínimo un 20% mayor que la resistencia a la flexión de las vigas, para asegurar que en presencia de cargas cíclicas (como el sismo) las rótulas plásticas se generen en las vigas y no en las columnas.

Generalmente se elige este sistema estructural cuando las fuerzas horizontales no son predominantes en comparación con las fuerzas verticales, de lo contrario, esto implicaría un aumento excesivo en las dimensiones de los elementos estructurales. Cuando se diseña solo por consideraciones de resistencia, la deriva lateral causa molestias en los ocupantes y daños en los elementos no estructurales, sumado a esto el efecto P-Delta provoca una flexión adicional en el edificio.

La altura de diseño eficiente sin sistemas de resistencia de carga lateral adicionales es de 30 pisos en estructuras de acero y de 20 pisos en estructuras de concreto armado. El espacio entre columnas generalmente varía desde aproximadamente la altura de piso a piso hasta el doble de la altura de piso a piso; en general el espacio varía entre 4.5 metros y 9 metros.

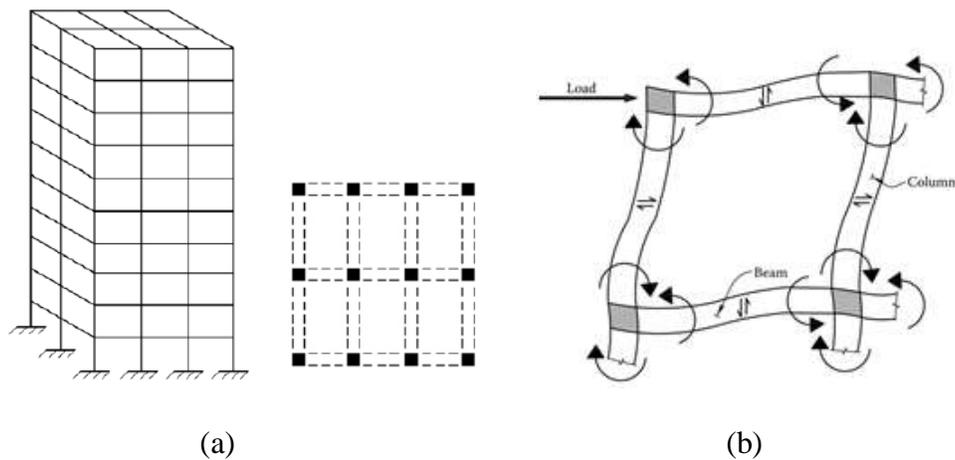


Figura 11. Sistema de pórtico rígido. (a) Estructura tridimensional, (b) Deformación e interacción de vigas y columnas (Taranath, 2016).

Aunque el pórtico suele ser la primera opción para los edificios altos, llegado a una cierta altura las fuerzas laterales hacen que el pórtico sea insuficiente para trabajar solo, una forma eficiente de superar la altura consiste en disponer de elementos arriostrados cambiando completamente su comportamiento pues el edificio se comportaría como una armadura, donde las

columnas serían los cordones, las vigas las montantes y los arriostres las diagonales que transmitirían cortantes. Esta solución es interesante debido a que las vigas no tendrían una participación significativa lo que permitiría uniformizar su sección en altura y diseñarlo solo por cargas de gravedad.

- **Sistema de muro de corte**

Se utilizan en estructuras de concreto armado. Pueden consistir en muros de corte simples (sólidos) y los que tienen aberturas (muros de corte acoplados). Los muros de corte acoplados (figura 12) han sido uno de los sistemas más populares que se han utilizado para la construcción de edificios altos para resistir las fuerzas laterales como el viento y el terremoto. En estructuras con programas residenciales, los muros de corte pueden distribuirse por todo el plano del piso resistiendo todas las cargas en el edificio sin columnas. En algunos casos, estos muros de corte se ubican excéntricamente en el plano del piso produciendo una torsión significativa cuando el edificio está sujeto a cargas laterales debido a la excentricidad generada entre el centro de masa y el centro de rigidez.

Los edificios diseñados con muros de corte son generalmente más rígidos que los sistemas de pórticos rígidos, reduciendo así la posibilidad de deformaciones laterales excesivas, y como consecuencia, daños. Se les conoce como muros de corte debido a que absorben gran parte de la totalidad de la fuerza de corte lateral. Aunque es apropiado el nombre, se debe controlar el comportamiento a cortante sobre todo frente a cargas cíclicas (comportamiento inelástico). En la práctica esto se logra con facilidad debido a que los muros de corte proporcionan excelente rigidez, resistencia y ductilidad.

Es importante elegir ubicaciones óptimas de los muros de corte. Se deben ubicar la mayor cantidad de muros de corte en la periferia del edificio para obtener una mejor resistencia a la torsión y es importante que los muros de corte carguen una importante fracción de la carga de gravedad para reducir la demanda de flexión en el muro y reducir las tensiones en los cimientos.

La altura de diseño eficiente es de 35 pisos para estructuras de concreto armado y generalmente las ubicaciones de separación están a 9 m de distancia. Las vigas de acoplamiento, que interconectan segmentos de muro de corte donde se requieren aberturas, generalmente se maximizan para obtener la mayor resistencia al corte y a la flexión.

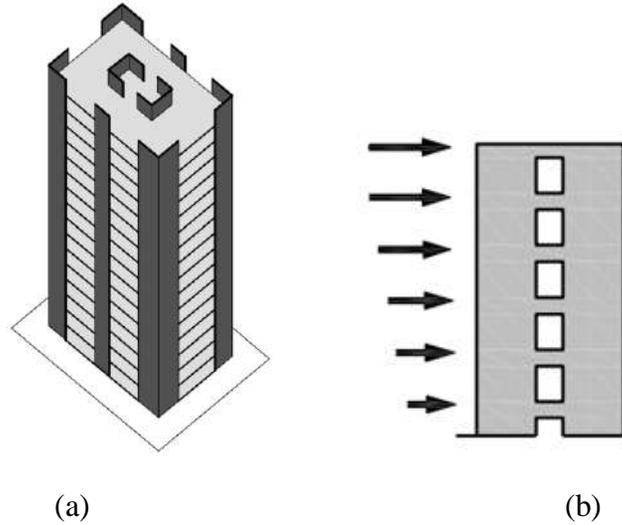


Figura 12. Sistema de muro de corte. (a) Muro de corte simple (sólido), (b) Muro de corte con aberturas (muros de corte acoplados) (Taranath, 2016).

- **Sistema de muro de corte - pórtico**

Los sistemas estructurales anteriores se pueden adoptar juntos para aumentar la rigidez horizontal global del edificio. Esta efectividad se debe a la diferente deformación característica con la que cada uno de los subsistemas responde en presencia de cargas laterales. Un pórtico se deforma predominantemente al corte, debido a la flexión de la red de vigas y columnas, mientras que el muro de corte responde con deformación a la flexión. Como consecuencia, cuando ambos subsistemas trabajan en forma conjunta, el muro de corte sostiene al pórtico en la parte inferior, mientras que, el pórtico lo hace en la parte superior; de esta manera el sistema desarrolla un buen rendimiento frente a cargas laterales al reducir la deformación global del sistema resistente.

La altura de diseño eficiente es de 50 pisos para estructuras de concreto armado y generalmente las ubicaciones de separación están entre 4.5 m y 9 m de distancia.

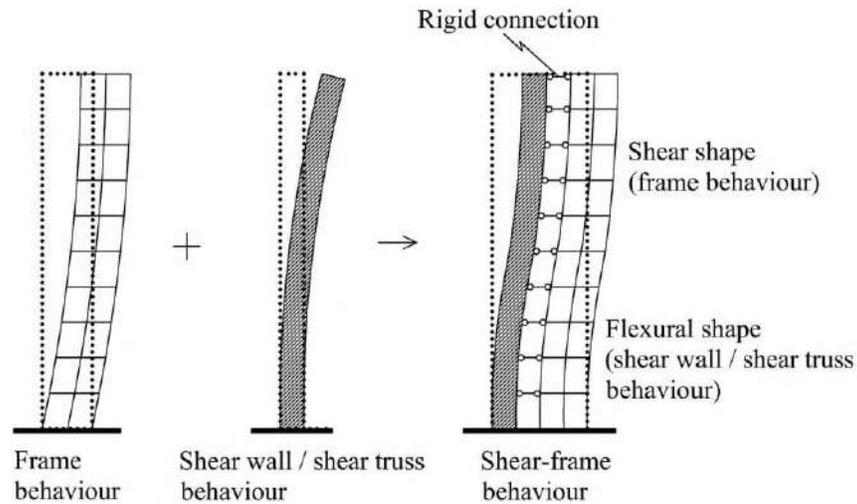


Figura 13. Comportamiento del sistema pórtico – muro de corte (Cammarano, 2014).

- **Limitación de los sistemas estructurales en la actualidad**

Aunque en la actualidad los sistemas estructurales actuales ya permiten a los ingenieros analizar, diseñar y construir edificios muy altos, todavía existe una limitación en cuanto a los sistemas estructurales. Los sistemas de núcleo central tienen la suficiente rigidez horizontal para alcanzar alturas muy altas; sin embargo, estos núcleos centrales también ocupan un gran espacio en cada piso. Por motivos aerodinámicos y para mantener las estructuras estables, los edificios muy altos suelen reducir el perímetro del edificio con el aumento de la altura. Entonces aparece un problema, el área de los núcleos aumenta con la altura y el perímetro del edificio se reduce con la altura; es decir, después de cierta altura, los edificios ya no pueden levantar a las personas hasta la parte superior, ya que el área central requerida para los ascensores será incluso mayor que el área del piso. Un claro ejemplo de este problema es el edificio Burj Khalifa, el edificio más alto del mundo con una altura de 828 m, donde la altura real ocupada es de solo 584 m. Por lo tanto, una de las limitaciones de los edificios muy altos, es que las personas no pueden llegar a la parte superior de los edificios.

- **El edificio alto como una viga cantiléver en voladizo**

La simplificación conceptual fundamental del edificio alto es una viga vertical en voladizo, como consecuencia, globalmente es una viga determinada estáticamente donde se conocen a priori las fuerzas totales aproximadas. Esto significa que, a cualquier altura del edificio, las fuerzas totales son generalmente conocidas. Como tal, frente a solicitaciones laterales, las fuerzas totales

que actúan en la viga en voladizo se presentan en forma de fuerzas cortantes y momentos de volteo que resultan en deformaciones de corte y flexión. Las cargas de gravedad son la suma de todo lo que se encuentra por encima de una elevación dada, la fuerza cortantes y el momento de volteo se integran de arriba hacia abajo, e incluso las fuerzas sísmicas se pueden aproximar de esta manera.

Es una ironía estructural que cuanto más alto sea el edificio, más pura debe ser la viga y, de alguna manera, más simple es su solución. Por ilógico que parezca los edificios más pequeños pueden ser conceptualmente más complejos que los edificios altos. Aunque están en voladizo desde el suelo, el sistema estructural es a menudo una serie de sistemas paralelos o elementos individuales que se comportan con una interacción tridimensional complicada. Por otra parte, al tomar algo tan grande y complejo como un edificio alto e imaginarlo como una viga simple en voladizo, el diseñador puede diseñarlo de manera racional y aproximada.

Muchos diseños exitosos de edificios altos se basan en la analogía que emerge entre un edificio alto y un árbol. Al igual que un edificio alto, un árbol es una estructura muy delgada, con un tronco que emerge desde el suelo hasta que se convierte en una serie de ramas que se mueven en voladizo desde el tronco.

Cualquier estructura que lleve las fuerzas laterales al suelo debe resistir dos fenómenos estructurales: corte y flexión. Cuanto más alto y delgado es el edificio, más eficiente debe ser el sistema de resistencia al corte, debido a que es esencial para transportar las cargas laterales a los elementos verticales que, a su vez, resisten las fuerzas de volteo en el voladizo. Es necesario un sistema de corte rígido para que todo el edificio actúe como una viga gigante en lugar de un conjunto de elementos o subsistemas individuales. Debido a que no es posible crear un sistema de corte completamente rígido, existe un fenómeno llamado "retraso de corte". Esto ocurre cuando las tensiones de volteo no se distribuyen linealmente, lo que resulta en un uso menos efectivo de los elementos verticales para resistir los momentos de volteo en la estructura.

Aunque los sistemas eficientes y rígidos de resistencia al corte pueden reducir los desplazamientos por corte, no es práctico hacer lo mismo para los desplazamientos por flexión. La deformación generalmente solo se puede reducir a costa de aumentar el tamaño de las columnas y/o muros. El desplazamiento de la viga se puede reducir, por ejemplo, a la mitad doblando el área de la sección transversal. El gran gasto de reducir las deflexiones al aumentar el área de la sección

transversal del elemento vertical impone límites muy prácticos para reducir la deflexión por flexión.

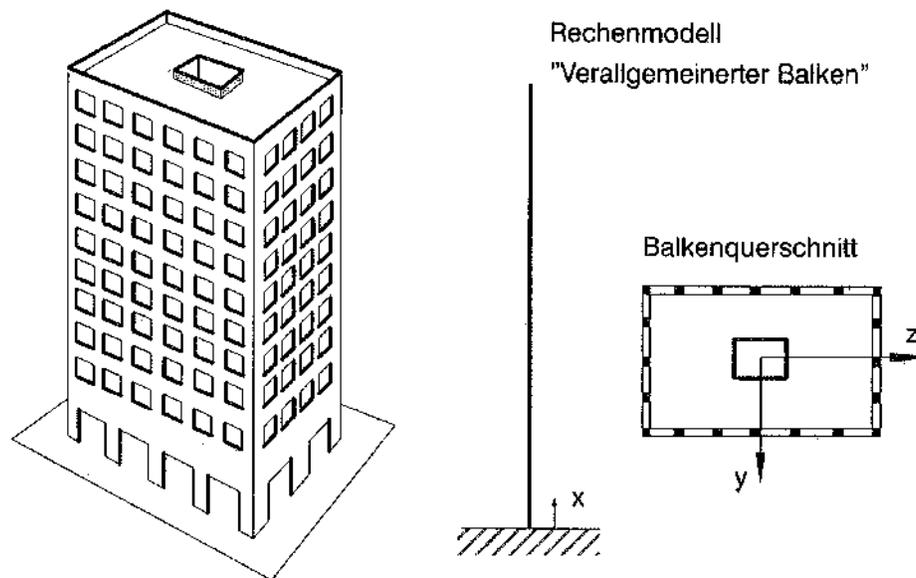


Figura 14. Edificio alto considerado como una viga cantiléver en voladizo (Schmidts, 1998).

- **Análisis estructural global de edificios altos**

Un análisis estructural global de edificios altos implica la modelación numérica y la caracterización estática, dinámica y de estabilidad.

En primer lugar, un modelado numérico se vuelve indispensable para una evaluación de la respuesta estructural. Con el avance tecnológico de los últimos años, para simular el comportamiento estructural del edificio se han desarrollado y utilizado métodos más finos como el método de elementos finitos (FEM); sin embargo, debido al alto costo computacional y de recursos siempre se ha dedicado interés al desarrollo de modelos simplificados que permitan realizar análisis rápidos, de bajo costo y con una precisión aceptable ingenierilmente. Al respecto se han propuestos dos enfoques: idealizar al edificio como un sistema de masas concentradas unidimensionales e idealizar al edificio como un sistema continuo.

Un sistema de masas concentradas unidimensionales está conectada por varillas sin masas caracterizadas por la rigidez del piso. Este modelo es ampliamente conocido en la ingeniería sísmica como modelo de viga de corte, donde se asume una rigidez a la flexión infinita y se consideran inextensibles a los elementos estructurales verticales; sin embargo el considerar inextensible a los elementos verticales no es válido para edificios esbeltos cuya deformación axial

no es despreciable. Con el objetivo de modelar el edificio como un sistema de masas concentradas y tener en cuenta sus rigideces características más importantes, en este proyecto de investigación se hará uso del método de matriz de transferencia para resolver en primer lugar edificios con discontinuidades verticales que no permiten desarrollar una ecuación de forma cerrada y en segundo lugar edificios uniformes en altura como verificación al modelo continuo con fórmulas cerradas.

Un sistema continuo conecta dos vigas de reemplazo mediante elementos inextensibles (enlaces rígidos) que solo transmiten las cargas horizontales. Estos modelos son ampliamente utilizados cuando se requiere realizar análisis sensibles paramétricos o una estimación rápida de la respuesta del edificio. Es ideal para modelar edificios que no tienen discontinuidades verticales porque permiten desarrollar fórmulas cerradas de fácil y rápida aplicación. Su formulación es completamente analítica permitiendo identificar fácilmente los parámetros estructurales claves que gobiernan el comportamiento del edificio reduciendo drásticamente el costo computacional.

En segundo lugar, la caracterización estática, dinámica y de estabilidad permiten comprender el comportamiento del edificio. La caracterización estática permite calcular los desplazamientos horizontales estáticos del edificio y consecuentemente las derivas, permitiendo así verificar el cumplimiento de la normativa vigente y sobre todo evaluar el desempeño del edificio. La caracterización dinámica permite la identificación modal proporcionando así las frecuencias, periodos y factores de masas participativas para un análisis modal espectral; teniendo como resultados indicadores globales como desplazamientos dinámicos y derivas útiles para determinar el nivel de daño de una estructura. La caracterización de estabilidad permite determinar la carga crítica global del edificio como un indicador de rendimiento; como lo menciona Zalka (2020) cualquier debilidad detectada durante el análisis de estabilidad también conduce a un comportamiento desfavorable en el análisis dinámico y estático del edificio.

- **Método continuo**

El método continuo supone que todos los elementos horizontales que conectan los componentes verticales están efectivamente unidos sobre la altura del edificio para producir un medio de conexión continuo; es decir, las vigas de conexión se reemplazan por un sistema de láminas distribuidas uniformemente. Como consecuencia del método continuo, la estructura tridimensional (3D) conduce a una viga de reemplazo equivalente (RB) que se caracteriza por las

propiedades equivalentes K_i que tratan de representar de la mejor manera posible a la rigidez real del sistema estructural.

Los supuestos básicos del método considera que los elementos estructurales son elásticos y lineales, los diafragmas se consideran rígidos en su plano y solo transfieren fuerzas horizontales, los puntos medios de las vigas de conexión se consideran puntos de contraflexión, las fuerzas de corte discretas en las vigas de conexión son reemplazadas un flujo de corte continuo equivalente a lo largo del punto medio de las láminas de conexión, la hipótesis de Bernoulli - Navier es válido para las vigas de conexión, el número mínimo de pisos del edificio es cuatro, los efectos de P-delta son insignificantes, las vigas de conexión no se deforman axialmente y reemplazaremos todo el edificio (que consta de elementos discretos) por una viga continua para luego analizar esta viga continua en reemplazo del edificio.

- **Modelos continuos de viga de reemplazo (RB)**

La naturaleza estructural de un edificio alto es tridimensional; sin embargo, el representar al edificio alto mediante una viga de reemplazo adecuada solo es posible si la compleja combinación entre los sistemas estructurales puede simplificarse drásticamente manteniendo el comportamiento de la estructura y con resultados de precisión razonables. Por lo tanto, es importante elegir vigas de reemplazo adecuados para cada sistema estructural, que puedan representar adecuadamente los modos predominantes de comportamiento; y luego combinarlos para tener en cuenta la compleja interacción entre los sistemas estructurales.

El número completo de campos cinemáticos de los sistemas planos conectados entre sí en paralelo dependen del número de campos cinemáticos asociados a cada elemento (figura 15). Si cada elemento contiene tres campos cinemáticos (transversal u_i , rotacional ϑ_i y axial w_i), entonces el número de campos cinemáticos de todo el sistema es tres veces el número de elementos. Debido a que los elementos se conectan mediante enlaces rígidos inextensibles, es posible suponer un campo de desplazamiento horizontal idéntico para todo el sistema ($u_1 = u_2 \dots u_{i-1} = u_i = u$), mientras los otros campos cinemáticos pueden ser diferentes en cada elemento.

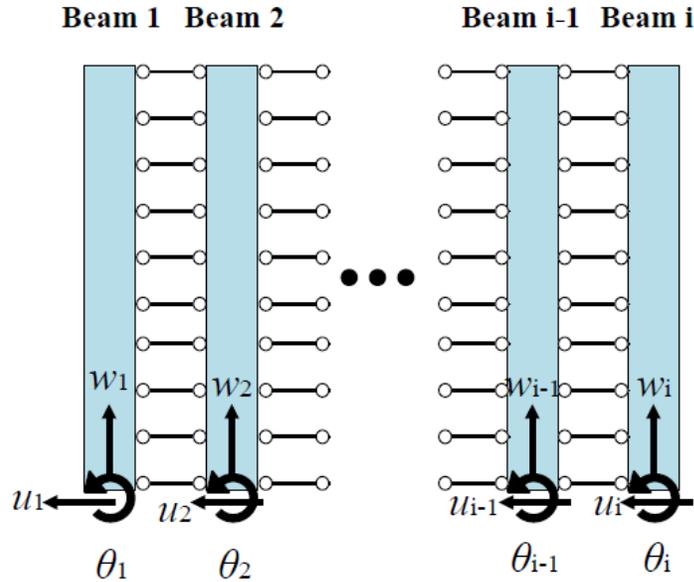


Figura 15. Sistema continuo plano que consta de varios elementos de viga alineados en paralelo (Moghadasi, 2015).

Dependiendo de las características estructurales de los sistemas estructurales que componen el edificio es posible usar varios modelos de viga de reemplazo equivalente (RB). Las dos características principales que definen la idealización apropiada son:

- La rigidez equivalente: rigidez a la flexión K_f y rigidez al corte K_c .
- Los campos cinemáticos: transversal u y rotacional θ y φ .

Con respecto a los modelos RB aplicados en el análisis de edificios y desde el punto de vista del campo cinemático, los modelos continuos actuales se pueden clasificar generalmente en tres categorías: Modelos de un campo, modelos de dos campos y modelos de tres campos.

a) Modelos de un campo:

El campo de deformación transversal es u y son los más simples de formular como sistemas RB.

- Viga de flexión (EBB)

Adecuado para un primer acercamiento al modelado estructural de los edificios altos, se caracteriza por un comportamiento y rigidez a la flexión K_b , como consecuencia es apropiado para modelar a los muros de corte esbeltos. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{EBB} = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx \quad (1)$$

- Viga de corte (SB)

Se caracteriza por un comportamiento y rigidez al corte K_s . Apropriados para modelar a los marcos de corte. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{SB} = \frac{1}{2} \int_0^H K_s u'(x)^2 dx \quad (2)$$

- Acoplamiento de dos vigas (CTB)

Consiste en el acoplamiento paralelo de una viga flexión (EBB) y una viga de corte (SB), están conectados por un medio continuo que transmiten solo fuerzas horizontales y ambas vigas experimentan un único campo cinemático u . Son fundamentalmente apropiados para modelar pórticos; y en menor aplicación para modelar muros de corte acoplados y sistemas muro de corte - pórtico. Como caso particular el modelo CTB se aproxima a una viga de flexión y a una viga de corte cuando K_b y K_s tienden al infinito respectivamente. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{CTB} = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_s u'(x)^2 dx \quad (3)$$

b) Modelo de dos campos

El campo de deformación transversal es u y el campo de rotación es θ .

- Viga Timoshenko (TB)

Se caracteriza por un acoplamiento en serie entre una viga de flexión (EBB) y una viga de corte (SB). La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{TB} = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'(x)^2 + K_s [\theta(x) - u'(x)]^2\} dx \quad (4)$$

Es importante mencionar que en comparación con el modelo de viga de flexión (EBB), se puede utilizar el modelo de viga Timoshenko (TB) para modelar con mayor precisión un muro de

corte. Esto ayuda a tener en cuenta la deformación por corte, donde dicha deformación puede ser significativo en paredes relativamente no esbeltas y ordinarias.

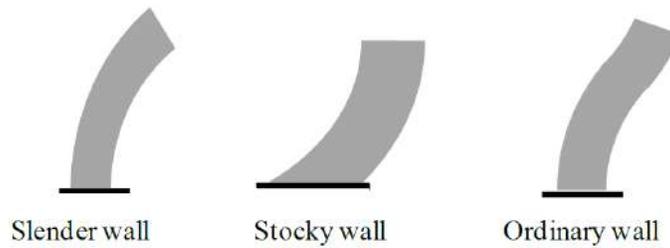


Figura 16. Deformaciones esquemáticas de pared delgada, pared no delgada y pared ordinaria (Moghadas, 2015).

- Viga Sándwich (SWB)

Se caracteriza por un acoplamiento en paralelo entre una viga Timoshenko (TB) y una viga de flexión (EBB). En la literatura es considerado el modelo más completo que utiliza dos campos cinemáticos (u, θ) , porque se caracteriza por tres rigideces diferentes: rigidez a la flexión local (K_{b1}), rigidez a la flexión global (K_{b2}) y rigidez al corte (K_{s1}). Este modelo es apropiado para modelar correctamente pórticos y muros de corte acoplados. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{SWB} = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{b2} u''_{(x)}{}^2 dx \quad (5)$$

El modelo de RB de viga Sándwich ha sido estudiado exhaustivamente en la literatura debido a que es posible representar todos los esquemas estructurales mediante sus tres rigideces características.

Potzta (2002) desarrolló un modelo RB para todo el edificio utilizando una viga SWB con un enfoque energético y derivaron las tres rigideces características del SWB aplicando un desplazamiento sinusoidal y equilibrando la energía de deformación total del edificio con la suma de las energías de deformación de cada esquema estructural. Utilizó este SWB para los análisis de viento, terremoto y estabilidad del edificio. Bozdogan (2010) desarrolló el análisis lateral estático, dinámico y de estabilidad utilizando una viga SWB y el método de la matriz de transferencia. Zalka (2020) derivó sus soluciones utilizando como base el comportamiento de un pórtico debido a que tiene cada una de las tres rigideces características de una SWB. Ofreció un tratamiento

completo para todos los esquemas estructurales (deflexión lateral, rotacional, frecuencia y estabilidad) y demostró que estas áreas están muy relacionadas entre sí.

- Viga Sándwich generalizado (GSWB)

Es un modelo SWB generalizado, se caracteriza por un acoplamiento en paralelo entre una viga Timoshenko (TB) y el acoplamiento de dos vigas (CTB). Si se descuida la rigidez al corte del CTB (K_{s2}), el GSWB resulta en una SWB. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{GSWB} = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \left[K_{b2} u''_{(x)}{}^2 + K_{s2} u'_{(x)}{}^2 \right] dx \quad (6)$$

c) Modelo de tres campos

Estos modelos fueron propuestos por Moghadasi (2015). El campo de deformación transversal es u y el campo de rotación es θ y φ .

- Viga Sándwich generalizado (GSB)

Se caracteriza por un acoplamiento en paralelo entre dos vigas Timoshenko (TB); es decir, el acoplamiento de dos vigas que se caracterizan por un acoplamiento en serie de su rigidez a la flexión (K_{b1}, K_{b2}) y de su rigidez al corte (K_{s1}, K_{s2}). Moghadasi (2015) presentó este modelo GSB y resolvió el análisis estático y dinámico. Debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento diferenciales parciales, discretizó las ecuaciones diferenciales para resolverlo numéricamente por medio de un modelo de elementos finitos unidimensionales transformando el GSB (voladizo de parámetro distribuido) a un sistema de múltiples grados de libertad. La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{GSB} = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b2} \psi'^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (7)$$

- CTB extensible de tres campos

Moghadasi (2015) presentó este modelo CTB de tres campos para representar adecuadamente un muro de corte acoplado. Este modelo CTB de tres campos se caracteriza por el acoplamiento en paralelo entre una viga Timoshenko extensible (TB) y un núcleo continuo con una restricción de rotación de soporte (RC). La TB representa la equivalencia condensada de los

dos muros de corte y se caracteriza por su rigidez a la flexión K_{b1} , su rigidez al corte K_{s1} y su rigidez axial K_{a1} ; y el RC representa el efecto continuo de la viga de conexión y se caracteriza por su rigidez al corte K_{s2} . La energía potencial asociada a este modelo es:

$$v_{CTB-3} = \frac{1}{2} \int_0^H \{ K_{b1} \theta'(x)^2 + K_{a1} w'(x)^2 + K_{s1} [u'(x) - \theta(x)]^2 \} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s2} \gamma_c^2 dx \quad (8)$$

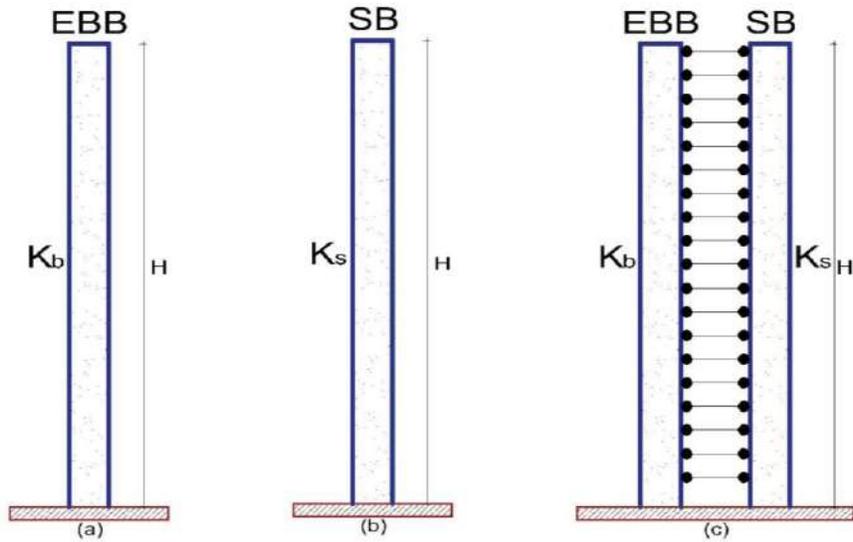


Figura 17. Modelos de un campo. a) viga EBB, b) viga SB y c) viga CTB.

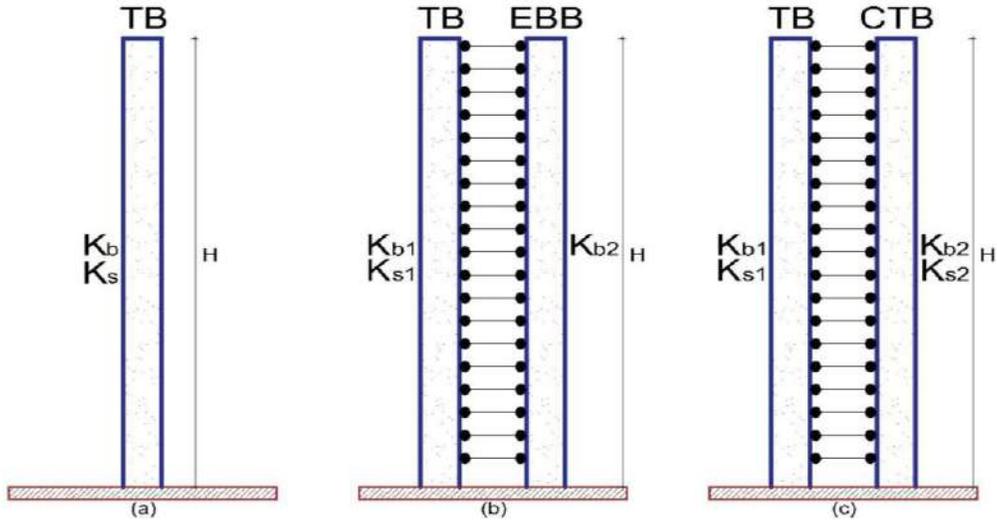


Figura 18. Modelos de dos campos. a) viga TB, b) viga SWB y c) viga GSWB.

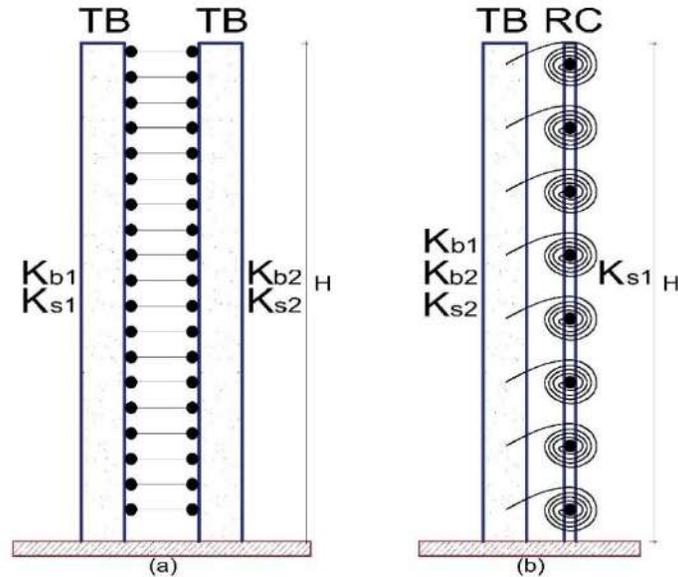


Figura 19. Modelos de tres campos. a) viga GSB y b) viga CTB extensible de tres campos.

- **Método de matriz de transferencia**

Existen diversos problemas en ingeniería que son especificados con condiciones de frontera, el trabajar con un número alto de constantes no es práctico y está sujeto a posibles errores de cálculo. Con el objetivo de reducir los errores de cálculo y trabajar con el número mínimo de constantes se implementó el método de matriz de transferencia (TMM) para lograr matemáticamente reducir el problema de condiciones de contorno a un problema de condiciones iniciales.

El método de matriz de transferencia (TMM) implica construir una relación entre los nodos finales de un elemento estructural. Su aplicación en un edificio con propiedades estructurales que son uniformes en cada subestructura es adecuada debido a que es posible calcular la matriz de transferencia de cada subestructura y luego ensamblarlo en una sola matriz de transferencia global de toda la estructura. Al eliminar los nodos internos mediante condensación, el tamaño de la matriz de transferencia se reduce al mínimo y se mantiene constante en el proceso de cálculo e igual al orden de la ecuación diferencial de la estructura.

- **Cargas estructurales**

Los edificios altos y de gran altura están sujetos principalmente a cargas verticales (vivas y muertas) y cargas horizontales (viento y sismo). A medida que aumenta la altura del edificio,

también aumenta el efecto de las cargas horizontales. Por lo tanto, para edificios altos, es importante elegir sistemas estructurales que tengan suficiente rigidez horizontal.

Desde el punto de vista del diseño estructural, los edificios altos muestran una mayor sensibilidad a las cargas laterales inducidas por el viento que los edificios de mediana y baja altura. Mientras que las cargas sísmicas aumentan con el peso del edificio, las cargas de viento aumentan con la altura del edificio. Esto trae como consecuencia que en ciertos casos, la deriva lateral debido al viento sea más crítica que la deriva debido al sismo.

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

En relación a la terminología aplicada a este proyecto de investigación, se hace necesario aclarar que el término “sistema” se aplica para hacer referencia a la estructura tridimensional completa, mientras que “elemento” a las diferentes estructuras planas estudiadas, tales como: pórticos, muros de corte, muros de corte acoplados, núcleos etc.

- **Viga de reemplazo:** Equivalencia continua unidimensional resultado de la aplicación del método continuo al análisis estructural de un edificio alto (Moghadasi, 2015).
- **Método continuo:** Método aproximado en el que la estructura discreta se representa por una estructura continua, reemplazando las vigas de conexión horizontales (Glück, Gellert, & Danay, 1972). El método necesita de las rigideces características, los campos cinemáticos y las cargas externas para utilizarlo en el análisis estructural de un edificio alto uniforme en altura.
- **Método de matriz de transferencia:** Método utilizado en matemáticas para resolver ecuaciones diferenciales que contienen discontinuidades (Bozdogan, 2010). El método necesita de las rigideces características, los campos cinemáticos y las cargas externas para utilizarlo en el análisis estructural de un edificio alto con discontinuidades estructurales en altura.
- **Rigidez equivalente:** Rigidez correspondiente a un tipo de deformación de la estructura (flexión local, flexión global, corte local y corte global).
- **Campo cinemático:** Grados de libertad independientes de una viga de reemplazo (desplazamiento y rotación).

- Cargas externas: Solicitaciones externas a la estructura (cargas laterales, densidad de masa distribuida y cargas puntuales).
- Análisis estructural global de edificios altos: Análisis estructural del edificio donde se considera al edificio como una unidad completa. Comprende el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad del edificio.
- Análisis estático: El edificio se somete a cargas laterales externas y como consecuencia se obtienen desplazamientos, rotaciones, derivas de entrepiso y deriva global.
- Análisis dinámico: El edificio se somete a vibración libre y como resultado se obtiene las frecuencias, los periodos de vibración y las formas modales.
- Análisis de estabilidad: El edificio se somete a cargas verticales externas uniformemente distribuidas y/o puntuales y como resultado se obtiene la carga crítica de pandeo global del edificio.

2.4 OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

Tabla.2 Descripción de las variables e indicadores.

Variable	Dimensiones	Indicadores	Unidades	
V1	Rigidez característica	Rigidez a flexión local	tn	
		Rigidez a flexión global	tn	
		Rigidez a corte local	tn	
		Rigidez a corte global	tn	
	Método continuo / Método de matriz de transferencia	Campo cinemático	Desplazamiento del RB	m
			Rotación de cada RB	rad
			Cargas laterales	tn/m
V2	Carga	Densidad de masa distribuida	kg-masa/m	
		Carga puntual	tn	
	Análisis estructural global de edificios altos	Análisis estático	Desplazamiento lateral	m
			Derivas de entrepiso	m/m
		Análisis dinámico	Rotación	rad
			Frecuencia	hz
			Periodo	s
Análisis de estabilidad		Carga crítica	tn	

3 CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

Es una investigación básica, porque se busca generar conocimiento científico para enriquecer el conocimiento teórico y científico, orientado al conocimiento de principios y leyes (Valderrama, 2006). En este proyecto de investigación se ha establecido y resuelto las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento estático, dinámico y de estabilidad de vigas de reemplazo novedosas, generando nuevos conocimientos teóricos.

El método empleado es el deductivo, porque se analizan los casos particulares a partir de los cuales se extraen conclusiones de carácter general (Valderrama, 2006). En este proyecto de investigación para formular y desarrollar la viga de reemplazo generalizada se han utilizado teorías e indicios dejadas por otros autores que estudiaron el tema.

El diseño es no experimental, porque es una investigación sistemática y empírica, en la que las variables independientes no se manipulan, porque ya están dadas (Valderrama, 2006). En este proyecto de investigación el análisis de precisión y confiabilidad se realizó manteniendo constante las variables independientes y solo se hizo variar la altura del edificio alto para ir variando los parámetros globales.

En una primera etapa el trabajo tendrá un enfoque cualitativo, porque que se describe, comprende e interpreta el fenómeno a través de la experiencia del investigador (Valderrama, 2006). En el proyecto de investigación el enfoque cualitativo permitirá obtener modelos de vigas de reemplazo para los sistemas estructurales (pórticos, muros de corte, muros de corte acoplados y núcleos) y para el edificio alto.

En una segunda etapa el trabajo tendrá un enfoque cuantitativo, porque se desarrollan y prueban teorías; además, se utiliza la recolección, el análisis y el procesamiento de los datos para contestar a la formulación del problema (Valderrama, 2006). En el proyecto de investigación el enfoque cuantitativo permitirá realizar un análisis de precisión y sensibilidad para evaluar la eficiencia de la metodología propuesta.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

3.2.1 Población

- La población de estudio comprende a todos los edificios altos (sistemas estructurales).

3.2.2 Muestra

- La muestra de estudio comprende a un total de 1017 sistemas estructurales: 90 muros de corte, 558 pórticos, 333 muros de corte acoplados y 36 edificios altos.

3.3 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Los datos para el análisis de precisión y confiabilidad de la metodología propuesta tomaron como referencia el criterio del autor de este proyecto de investigación y algunas plantas estructurales utilizadas en la literatura existente sobre el análisis estructural de edificios altos.

3.4 TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Para el procesamiento de la información se utilizó la técnica computacional. El instrumento que se utilizó fue un computador personal, el software de hoja de cálculo Microsoft Excel y los programas de elementos finitos SAP 2000 y ETABS 2016.

4 CAPÍTULO IV. RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS ESTÁTICO DE LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES INDIVIDUALES

La rigidez horizontal de un edificio alto está compuesta por el aporte de diferentes sistemas estructurales: muros de corte, pórticos, muros de corte acoplados y núcleos. El aporte de cada sistema estructural a la rigidez horizontal del edificio se distribuye en forma proporcional a su rigidez individual, pero la naturaleza de su comportamiento es algo diferente; por lo que es esencial que el ingeniero conozca el comportamiento de cada sistema estructural para lograr una estructura con una rigidez horizontal óptima.

Es común suponer una distribución de carga triangular para el análisis estático por sismo y una carga uniformemente distribuida para el análisis estático por viento. Sin embargo, con el propósito de generalizar el análisis se proponen dos casos:

- **Caso 1:** Se considera un análisis continuo porque el método utilizado únicamente se basa en el método continuo; se asume una carga lateral general distribuida en la altura del elemento. Esta carga es dependiente de un parámetro a que controla su forma en altura. Este modelo de carga lateral general fue propuesto por Miranda (1999).

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a\frac{x}{H}} \right) \quad (9)$$

Donde W_{max} es la intensidad de la carga distribuida en la parte superior del modelo ($z = 0$) y a es un parámetro adimensional que controla la forma de la carga lateral. Como se muestra en la figura 20, los valores extremos de $a \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$ corresponden a distribuciones de carga uniforme y triangulares, respectivamente.

La principal desventaja es que solo es aplicable a estructuras en donde la sección transversal es uniforme en altura y la carga lateral es continua y su principal ventaja es que se obtienen soluciones continuas de forma cerrada que permiten realizar análisis paramétricos.

- **Caso 2:** Se considera un análisis híbrido porque los métodos utilizados son el método continuo y el método de matriz de transferencia; se asume una carga horizontal puntual

arbitraria aplicada a nivel de los pisos. Estas cargas puntuales pueden ser el resultado de cargas puntuales directamente aplicadas a nivel de los pisos o el resultado de las cargas transmitidas de la fachada a las losas del piso.

La principal desventaja es que no se obtienen soluciones continuas cerradas que permitan realizar análisis paramétricos y su principal ventaja es que permite analizar estructuras cuya sección transversal no es continua en altura y/o para estructuras donde las cargas se aplican a nivel de los pisos, sea su sección transversal uniforme o no; es decir se considera un caso de análisis general porque incluso sirve como verificación del caso 1.

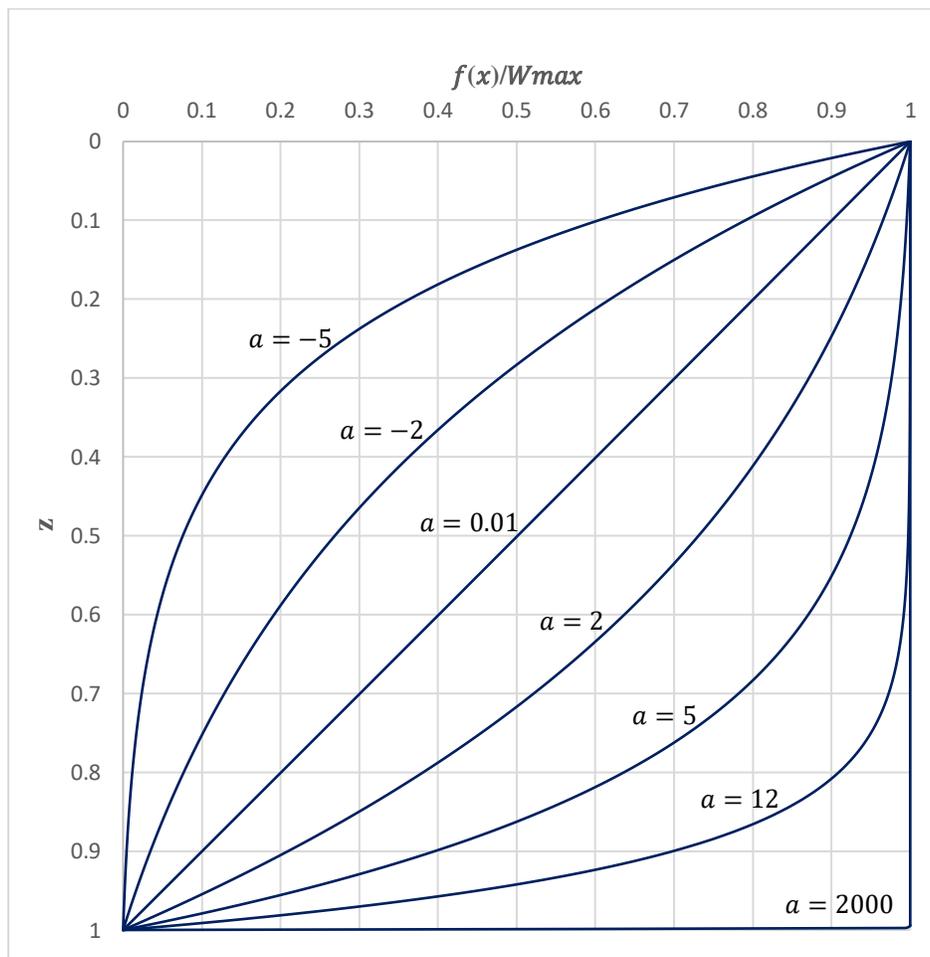


Figura 20. Efecto del parámetro adimensional a en la forma de distribución de la carga lateral para el caso 1 (Miranda E. , 1999).

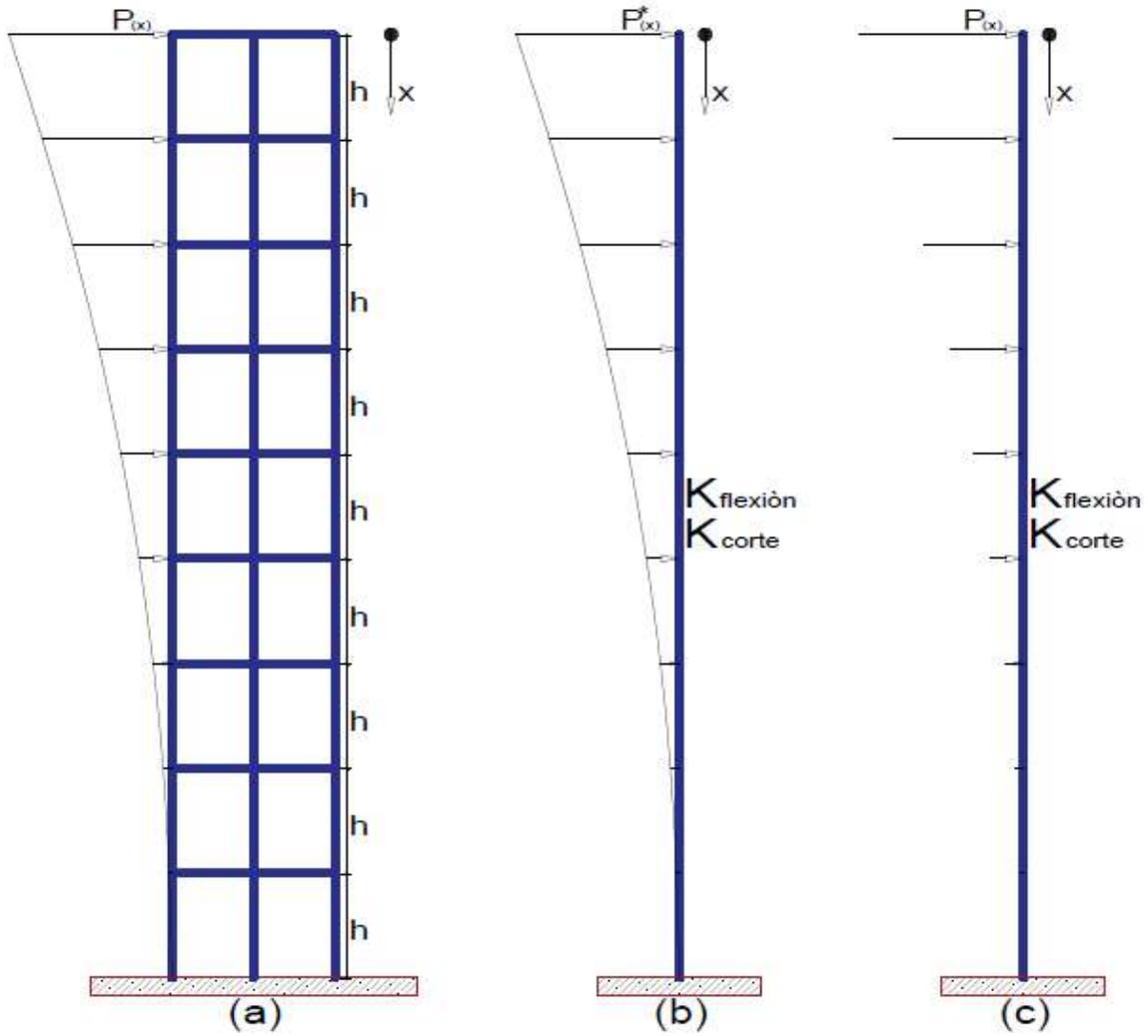


Figura 21. Estructura sujeta a carga lateral. a) Estructura y carga original, b) caso 1: Viga de reemplazo con carga continua y c) caso 2: Viga de reemplazo con carga concentrada.

4.1.1 Viga de flexión de un campo (EBB)

Este modelo se suele utilizar para los muros de corte esbeltos y/o columnas de edificios con losas planas; es decir, donde la rigidez al corte es infinita y por lo tanto, se puede considerar despreciable su deformación por cortante. El modelo toma en cuenta un movimiento transversal u y una rigidez a la flexión.

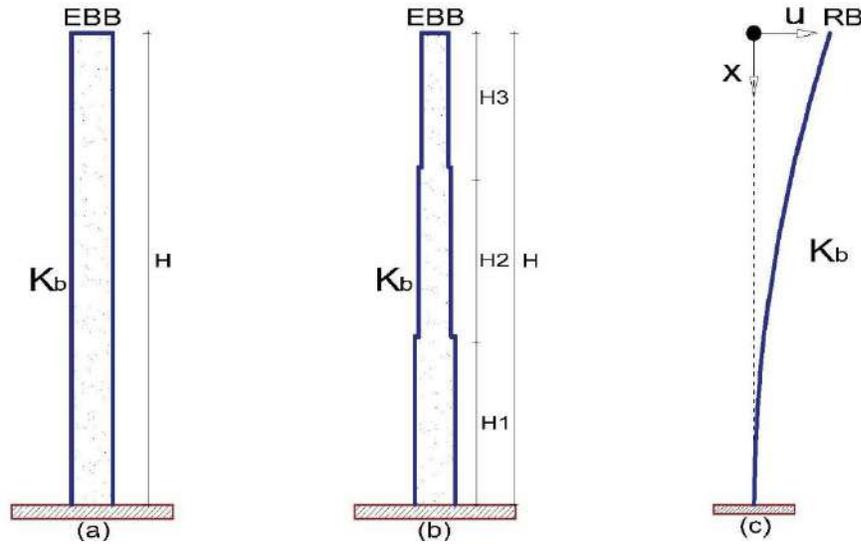


Figura 22. Viga Euler Bernoulli (EBB) de un solo campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente.

4.1.1.1 Caso 1

La energía potencial del modelo de viga EBB de un campo es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx \quad (10)$$

Donde:

$$K_b = \sum_{i=1}^{w,c} EI_{w,c,i} \quad (11)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (12)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga EBB de un campo sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx - \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (13)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H K_b u''(x) \delta u''(x) dx - \int_0^H f(x) \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \quad (14)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta U = [K_b u''(x) \delta u'(x)]_0^H - [K_b u'''(x) \delta u(x)]_0^H + \int_0^H [K_b u''''(x) - f(x)] \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \quad (15)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_b u''''(x) - f(x) = 0 \quad (16)$$

Y condiciones de borde:

$$\begin{cases} u''(0) = 0 \\ u'''(0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u''''(z) = \frac{H^4}{K_b} f(z) \quad (18)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{ax}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a + az}) \quad (19)$$

Reemplazándolo en la ecuación diferencial:

$$u_{(z)}'''' = \lambda(1 - e^{-a+az}) \quad (20)$$

Donde:

$$\lambda = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \quad (21)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \frac{\lambda}{24}z^4 - \frac{\lambda}{a^4}e^{-a+az} \quad (22)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes:

$$\left. \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} \right) \right] \\ C_1 = \lambda \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} \right) \right] \\ C_2 = \lambda \frac{e^{-a}}{2a^2} \\ C_3 = \lambda \frac{e^{-a}}{6a} \end{array} \right\} \quad (23)$$

El desplazamiento lateral se obtiene reescribiendo la expresión de $u_{(z)}$:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \frac{1}{24}z^4 + \frac{e^{-a}}{6a}z^3 + \frac{e^{-a}}{2a^2}z^2 + \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} \right) \right] z \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} \right) \right] - \frac{1}{a^4}e^{-a+az} \right\} \quad (24)$$

El desplazamiento máximo se obtiene evaluando en 0 a $u_{(z)}$:

$$u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{a^4} \right) e^{-a} \right\} \quad (25)$$

La distorsión de piso puede obtenerse derivando una vez $u_{(z)}$:

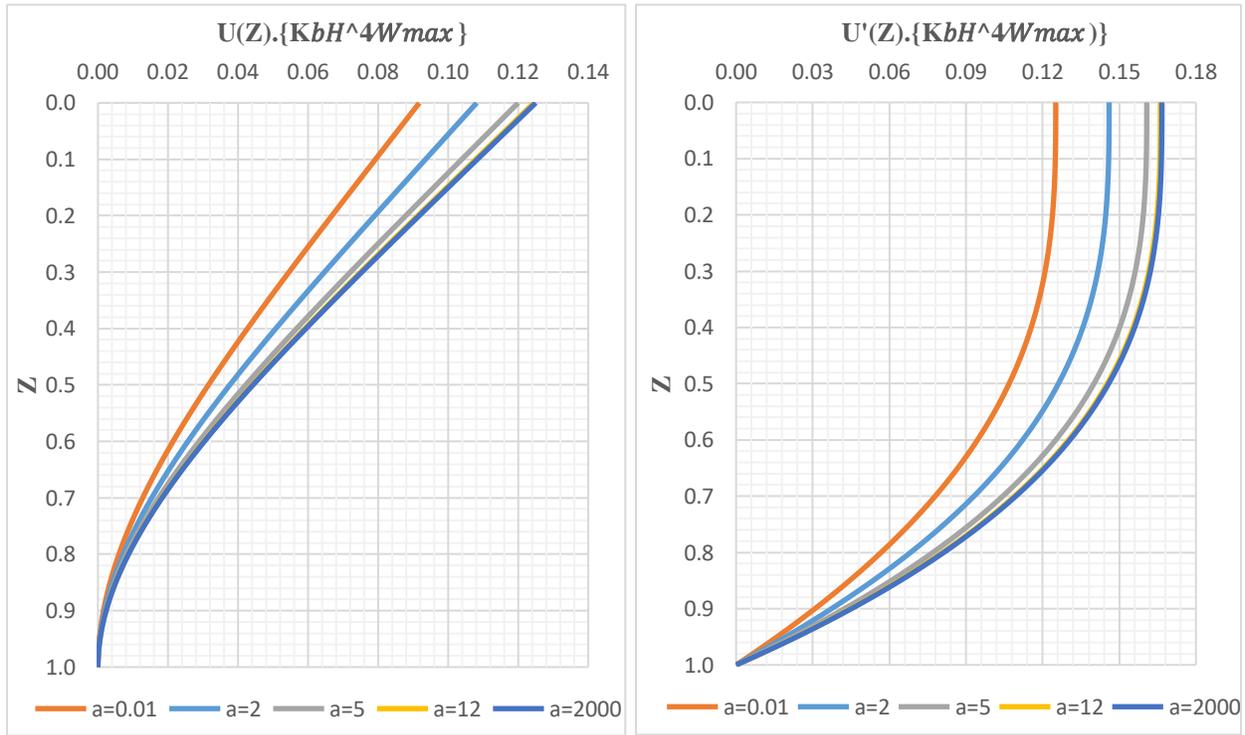
$$\Delta_s = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \frac{1}{6}z^3 + \frac{e^{-a}}{2a}z^2 + \frac{e^{-a}}{a^2}z + \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} \right) \right] - \frac{1}{a^3}e^{-a+az} \right\} \quad (26)$$

La deriva global se obtiene como el cociente entre desplazamiento máximo y la altura total:

$$\Delta_g = \frac{W_{max}H^3}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{a^4} \right) e^{-a} \right\} \quad (27)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) \\ u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{8K_b} \\ \Delta_s = \frac{W_{max}H^4}{6K_b} (z^3 - 1) \\ \Delta_g = \frac{W_{max}H^3}{8K_b} \end{array} \right. \quad (28)$$



(a)

(b)

Figura 23. Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral y b) Deriva de entropiso.

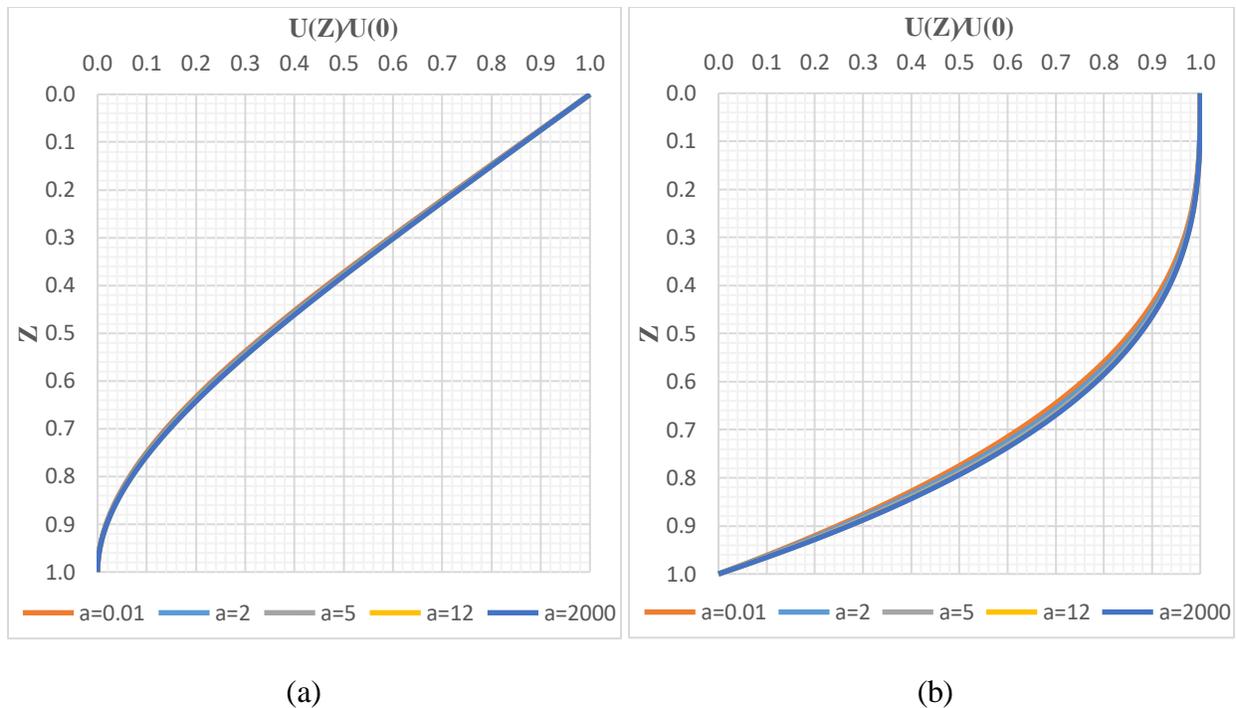


Figura 24. Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral normalizado y b) Deriva de entrepiso normalizado.

Según el análisis de las ecuaciones y de los gráficos:

- La rigidez es inversamente proporcional a la cuarta potencia de su altura.
- El perfil de desplazamiento lateral muestra un comportamiento a favor de la carga lateral (concavidad hacia la derecha) con una tendencia a reducirse hasta llegar a una pendiente infinita en la base.
- El perfil de la deriva de entrepiso muestra un comportamiento en contra de la carga lateral (cóncavo hacia la izquierda) con una máxima eficiencia en la zona inferior de la viga con una tendencia a cero en la base.
- El perfil de desplazamiento lateral normalizado y el perfil de deriva de entrepiso normalizado son prácticamente idénticos para todos los casos e independientes del parámetro a .

4.1.1.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$u''''_{(x)} = \frac{1}{K_b} f(x) \quad (29)$$

Suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$u''''_{(z)} = 0 \quad (30)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 \\ u'_{(z)} = C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 \end{cases} \quad (31)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_b u''_{(z)} = (2K_b)C_2 + (6K_b z)C_3 \\ V_{(z)} = K_b u'''_{(z)} = (6K_b)C_3 \end{cases} \quad (32)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & z_i^2 & z_i^3 \\ 0 & 1 & 2z_i & 3z_i^2 \\ 0 & 0 & 2K_b & 6K_b z_i \\ 0 & 0 & 0 & 6K_b \end{bmatrix}_i \quad (34)$$

Evaluando en la base del piso i -ésimo; es decir para $z_i = h_i$:

$$\begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} = K_i(h_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Reemplazando el vector de coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} = T_i(z_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Donde:

$$T_i(z) = K_i(z) K_i^{-1}(h_i) \quad (37)$$

Si evaluamos las fuerzas y desplazamientos en la parte superior del i-ésimo piso, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Esta ecuación muestra la relación de fuerzas y desplazamientos entre la parte superior e inferior del piso i-ésimo.

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

Para el piso j-ésimo:

$$V_{j+1} = V_j - P_j \quad (39)$$

Es decir:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (40)$$

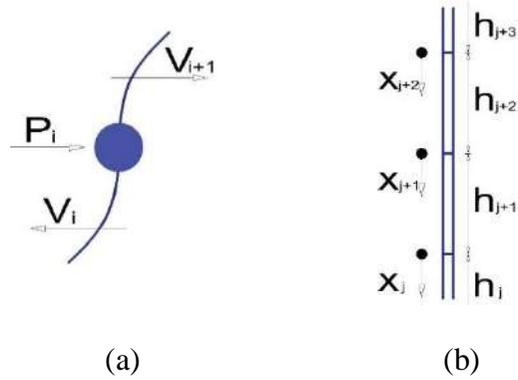


Figura 25. a) Equilibrio estático en el nivel j-ésimo y b) Segmentos Estructurales de Propiedades Variables.

Para el primer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_1'(0) \\ M_1(0) \\ V_1(0) \end{Bmatrix} = T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u_1'(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - T_1(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Para el segundo piso:

$$\begin{Bmatrix} u_2(0) \\ u_2'(0) \\ M_2(0) \\ V_2(0) \end{Bmatrix} = T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u_1'(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} - T_2(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Para el tercer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_3(0) \\ u_3'(0) \\ M_3(0) \\ V_3(0) \end{Bmatrix} = T_3(0)T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u_1'(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - T_3(0)T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} - T_3(0)T_2(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \end{Bmatrix} - T_3(0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Para el n-ésimo piso (parte superior de la viga):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} &= T_n(0) \dots T_2(0) T_1(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} - T_n(0) \dots T_2(0) T_1(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{pmatrix} \\
&\quad - T_n(0) \dots T_2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \end{pmatrix} - T_n(0) \dots T_3(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \end{pmatrix} - \dots - T_n(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{44}$$

Expresando la ecuación entre símbolos de producto y suma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} &= \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} - \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_0 \end{pmatrix} - \prod_{k=2}^n T_k(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \end{pmatrix} - \prod_{k=3}^n T_k(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \end{pmatrix} \\
&\quad - \prod_{k=4}^n T_k(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_3 \end{pmatrix} - \dots - \prod_{k=n}^n T_k(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{45}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \tag{46}$$

Definiendo dos parámetros adicionales:

$$\begin{pmatrix} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{pmatrix} \tag{47}$$

Reemplazando estos dos parámetros:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} + f \tag{48}$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(0)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

El desplazamiento lateral y su derivada en la parte superior del modelo:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Sustituyendo las fuerzas internas:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (53)$$

4.1.2 Viga de corte de un campo (SB)

Este modelo se suele utilizar para modelar a los pórticos que tienen vigas y columnas con rigidez a la flexión infinita y cuyas deformaciones axiales de las columnas son despreciables. El modelo toma en cuenta un movimiento transversal u y una rigidez al corte.

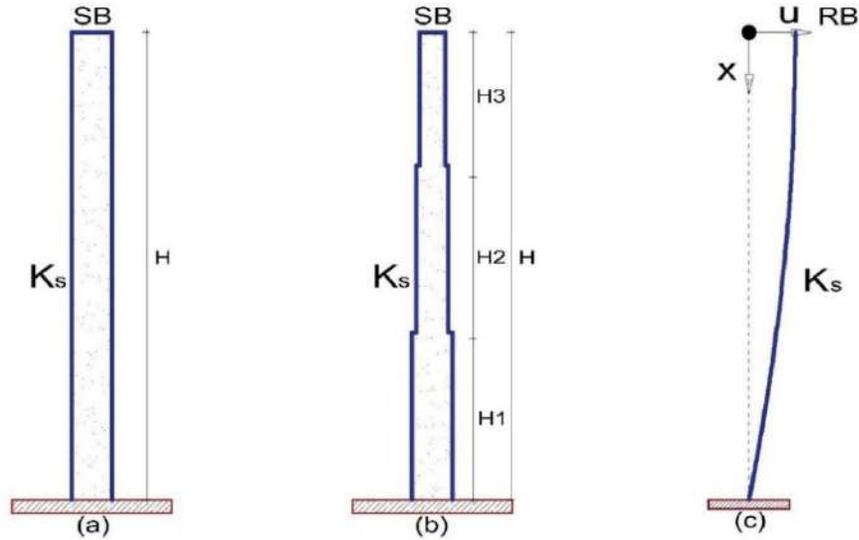


Figura 26. Viga de corte (SB) de un solo campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente.

4.1.2.1 Caso 1

La energía potencial total de la viga SB de un campo sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_s u'(x)^2 dx \quad (54)$$

Donde:

$$\left\{ K_s = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} = \frac{K_b K_c}{K_b + K_c}, K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{lh}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2} \right\} \quad (55)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (56)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga SB de un campo sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H K_s u'(x)^2 dx - \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (57)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H K_s u'(x) \delta u'(x) dx - \int_0^H f(x) \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \quad (58)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta U = [K_s u'(x) \delta u(x)]_0^H - \int_0^H [K_s u''(x) + f(x)] \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \quad (59)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_s u''(x) + f(x) = 0 \quad (60)$$

Y condición de borde:

$$u'(0) = 0 \quad (61)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u''_{(z)} = -\frac{H^2}{K_s} f(z) \quad (62)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{ax}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a + az}) \quad (63)$$

Reemplazándolo en la ecuación diferencial:

$$u''_{(z)} = -\lambda(1 - e^{-a+az}) \quad (64)$$

Donde:

$$\lambda = \frac{W_{max}H^2}{K_s(1 - e^{-a})} \quad (65)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1z - \frac{\lambda}{2}z^2 + \frac{\lambda}{a^2}e^{-a+az} \quad (66)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_0 = \lambda \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{e^{-a}}{a} \right] \\ C_1 = -\lambda \frac{e^{-a}}{a} \end{cases} \quad (67)$$

El desplazamiento lateral se obtiene reescribiendo la expresión de $u_{(z)}$:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{K_s(1 - e^{-a})} \left[-\frac{1}{2}z^2 - \frac{e^{-a}}{a}z + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) + \frac{e^{-a+az}}{a^2} \right] \quad (68)$$

El desplazamiento máximo se obtiene evaluando en 0 a $u_{(z)}$:

$$u_{(0)} = \frac{W_{max}H^2}{K_s(1 - e^{-a})} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right) e^{-a} \right] \quad (69)$$

La deriva de piso puede obtenerse derivando una vez $u_{(z)}$:

$$\Delta_s = \frac{W_{max}H^2}{K_s(1 - e^{-a})} \left(-z - \frac{e^{-a}}{a} + \frac{e^{-a+az}}{a} \right) \quad (70)$$

La deriva global se obtiene como el cociente entre desplazamiento máximo y la altura total:

$$\Delta_g = \frac{u_{(0)}}{H} = \frac{W_{max}H}{K_s(1 - e^{-a})} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right) e^{-a} \right] \quad (71)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_s}(1 - z^2) \rightarrow u_{(0)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_s} \\ \Delta_s = -\frac{W_{max}H^2}{K_s}z \\ \Delta_g = \frac{W_{max}H}{2K_s} \end{array} \right\} \quad (72)$$

Según el análisis de las ecuaciones y de los gráficos:

- La rigidez es inversamente proporcional a la segunda potencia de su altura.
- El perfil de desplazamiento lateral muestra un comportamiento a en contra de la carga lateral (concavidad hacia la izquierda).
- El perfil de deriva de entrepiso muestra con una máxima eficiencia en la zona superior de la viga con una tendencia a cero en el techo del edificio.
- El perfil de desplazamiento lateral normalizado y el perfil de deriva de entrepiso normalizado son dependientes del parámetro a .

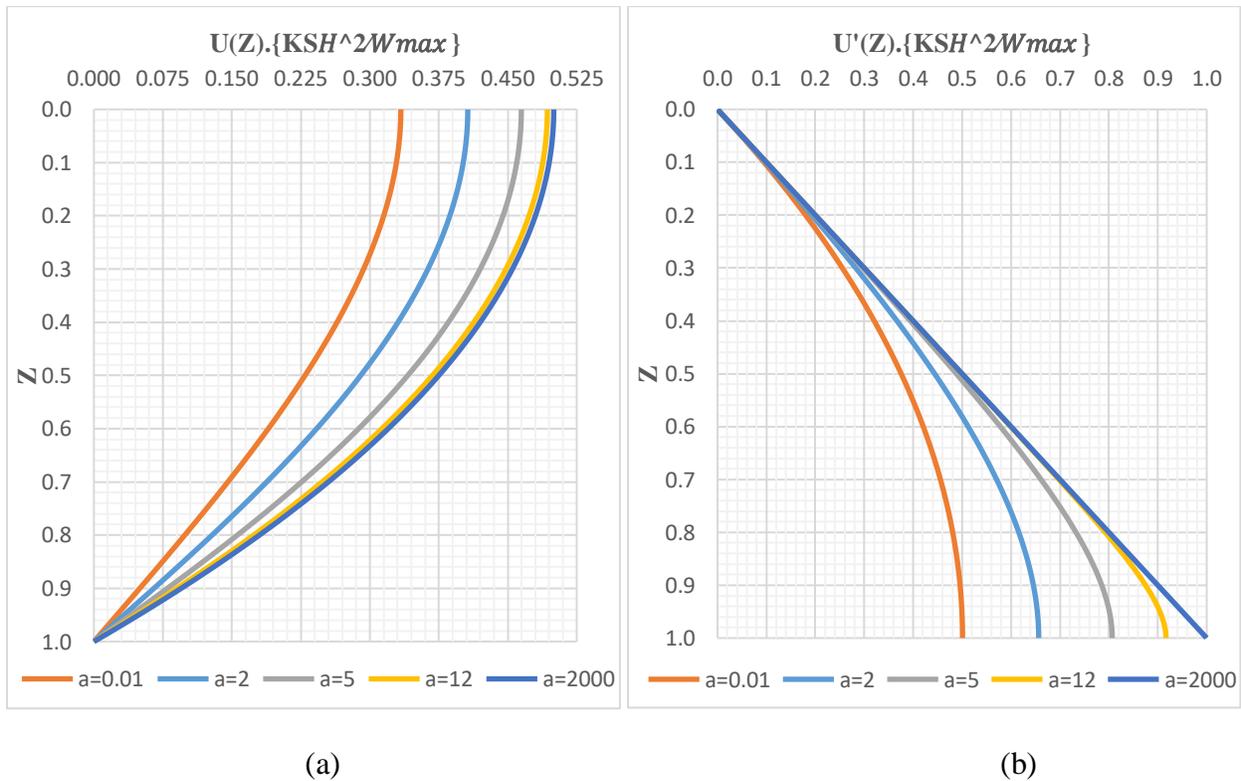


Figura 27. Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral y b) Deriva de entrepiso.

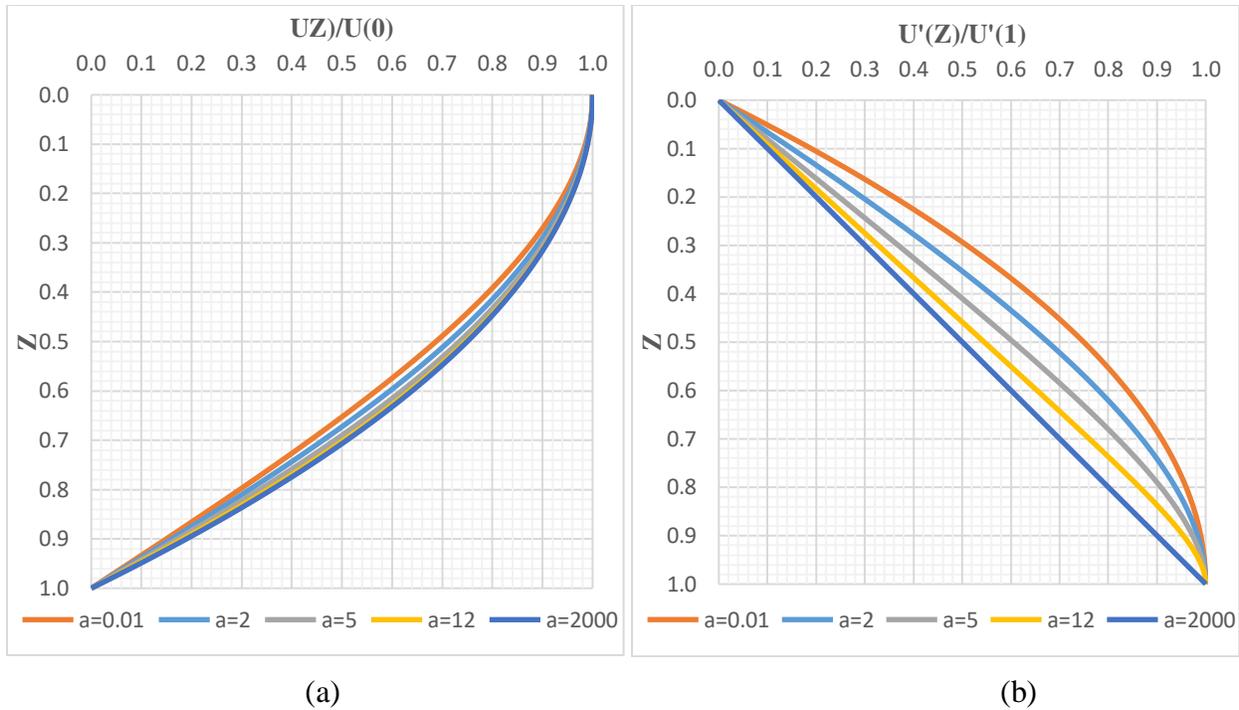


Figura 28. Efecto del parámetro a . a) Desplazamiento lateral normalizado y b) Deriva de entrepiso normalizado.

4.1.2.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial de segundo orden y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$u''_{(z)} = 0 \quad (73)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z \\ u'_{(z)} = C_1 \end{cases} \quad (74)$$

Escribiendo la ecuación en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{Bmatrix} \quad (75)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (76)$$

Evaluando en la base del piso i-ésimo; es decir para $z_i = h_i$:

$$\begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \end{Bmatrix} = K_i(h_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{Bmatrix} = K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (77)$$

Reemplazando el vector de coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \end{Bmatrix} = T_i(z_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (78)$$

Donde:

$$T_i(z) = K_i(z) K_i^{-1}(h_i) \quad (79)$$

Si evaluamos las fuerzas y desplazamientos en la parte superior del i-ésimo piso, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Esta ecuación muestra la relación de fuerzas y desplazamientos entre la parte superior e inferior del piso i-ésimo.

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (81)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (82)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{array} \right\} \quad (83)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 2x2 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{(h_1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (84)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ u'_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\} \quad (85)$$

Despejando la pendiente en la base del modelo:

$$0 = t_{2,2}u'_1(h_1) + f_2 \rightarrow u'_1(h_1) = -t_{2,2}^{-1}f_2 \quad (86)$$

El desplazamiento lateral en la parte superior del modelo se obtiene sustituyendo el desplazamiento en la parte superior de la viga:

$$u_n(0) = -t_{1,2}t_{2,2}^{-1}f_2 + f_1 \quad (87)$$

4.1.3 Viga Timoshenko de dos campos (TB)

Numerosas investigaciones en la literatura han utilizado modelos simplificados de vigas de flexión o de corte para modelar a los edificios; sin embargo otros estudios han demostrado que no considerar la rigidez al corte o a la flexión simultáneamente en el modelo es inapropiado, pues el margen de error supera los criterios de aceptación en ingeniería.

Al considerar una rigidez al corte infinita en la viga de flexión (EBB) y como consecuencia una deformación al corte cero, se supuso que las secciones transversales planas perpendiculares al eje de la viga permanecen planas y perpendiculares al eje después de la deformación; sin embargo, frente al caso de elementos estructurales como muros de corte y/o núcleos no esbeltos, este efecto no puede ser descuidado y debe tomarse en cuenta. Para superar este problema se desarrolla la Viga Timoshenko (TB), el cual resulta de una extensión de la viga de flexión (EBB) para permitir el efecto de la deformación por cortante.

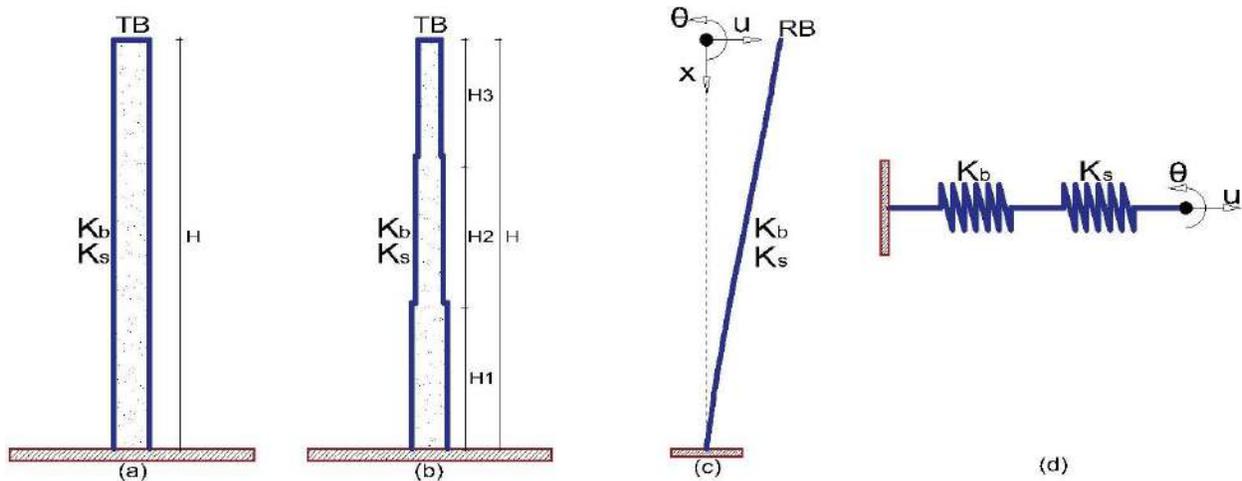


Figura 29. Viga Timoshenko (TB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez TB.

La rigidez de la viga TB resulta de un acoplamiento en serie de la rigidez a la flexión y al corte; es decir, la deformación total de la viga TB resulta de la combinación de la deformación a flexión y a corte. El modelo de viga TB toma en cuenta un movimiento transversal único u y un campo de rotación θ con rigideces K_b y K_s como rigidez a la flexión y al corte, respectivamente.

4.1.3.1 Caso 1

La energía potencial del modelo de viga TB se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'_{(x)}{}^2 + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2\} dx \quad (88)$$

Donde:

$$K_b = \sum_{i=1}^w EI_{w,i}, K_s = k \sum_{i=1}^w GA_{w,i} \quad (89)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f_{(x)} u_{(x)} dx \quad (90)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga TB de dos campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'_{(x)}{}^2 + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2\} dx - \int_0^H f_{(x)} u_{(x)} dx \quad (91)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & \int_0^H \{K_b \theta'_{(x)} \delta\theta'_{(x)} + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] [\delta u'_{(x)} - \delta\theta_{(x)}]\} dx - \int_0^H f_{(x)} \delta u_{(x)} dx \\ & - \int_0^H u_{(x)} \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (92)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & [K_b \theta'_{(x)} \delta\theta_{(x)}]_0^H + \{K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] \delta u\}_0^H - \int_0^H \{K_b \theta''_{(x)} + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]\} \delta\theta_{(x)} \\ & - \int_0^H \{K_s [u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] + f_{(x)}\} \delta u_{(x)} - \int_0^H u_{(x)} \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (93)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} K_b \theta''_{(x)} + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ K_s [u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] + f(x) = 0 \end{cases} \quad (94)$$

Y condiciones de borde:

$$\begin{cases} \theta'_{(0)} = 0 \\ u'_{(0)} - \theta_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (95)$$

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_s D & K_b D^2 - K_s \\ K_s D^2 & -K_s D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{(x)} \end{Bmatrix} \quad (96)$$

Es decir;

$$\begin{Bmatrix} u'''_{(x)} \\ \theta'''_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K_b} f'_{(x)} - \frac{1}{K_s} f''_{(x)} \\ \frac{1}{K_b} f'_{(x)} \end{Bmatrix} \quad (97)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u'''_{(z)} = \frac{H^4}{K_b} f(z) - \frac{H^2}{K_s} f''_{(z)} \quad (98)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a \frac{x}{H}} \right) \rightarrow f_{(z)} = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + az} \right) \quad (99)$$

Reemplazándolo en la ecuación diferencial:

$$u'''_{(z)} = \lambda + \lambda \left(\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \right) e^{-a + az} \quad (100)$$

Donde:

$$\alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \lambda = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \quad (101)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \frac{\lambda}{24}z^4 + \frac{\lambda(a^2 - \alpha^2)}{a^4\alpha^2}e^{-a+az} \quad (102)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = -\frac{\lambda}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) \\ u''_{(0)} = -\frac{\lambda}{\alpha^2} (1 - e^{-a}) \\ u'''_{(0)} = \frac{\lambda}{\alpha^2} (ae^{-a}) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + \frac{e^{-a}}{a} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] \\ C_1 = \lambda \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - \frac{e^{-a}}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ C_2 = -\frac{\lambda}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2} e^{-a} \right) \\ C_3 = \lambda \frac{e^{-a}}{6a} \end{array} \right\} \quad (103)$$

El desplazamiento lateral se obtiene reescribiendo la expresión de $u_{(z)}$:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \frac{1}{24}z^4 + \frac{e^{-a}}{6a}z^3 + \left(\frac{e^{-a}}{2a^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \right) z^2 + \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a\alpha^2} \right) \right] z \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \right] + \frac{(a^2 - \alpha^2)}{a^4\alpha^2} e^{-a+az} \right\}$$

Después de algunas manipulaciones simples, el desplazamiento $u_{(z)}$ puede expresarse como la suma del desplazamiento por flexión y cortante:

$$u_{(z)} = u_{flexión} + u_{corte}$$

Donde:

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} u_{flexión} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \left\{ \frac{1}{24}z^4 + \frac{e^{-a}}{6a}z^3 + \frac{e^{-a}}{2a^2}z^2 + \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} \right) \right] z \right\} \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} \right) \right] - \frac{1}{a^4} e^{-a+az} \right\} \\ u_{corte} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1 - e^{-a})} \frac{1}{\alpha^2} \left[-\frac{1}{2}z^2 - \frac{e^{-a}}{a}z + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) + \frac{e^{-a+az}}{a^2} \right] \end{array} \right\} \quad (104)$$

El desplazamiento máximo se obtiene evaluando en 0 a $u_{(z)}$:

$$u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1-e^{-a})} \left\{ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left[\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \right) \right] + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) \right\} \quad (105)$$

La deriva de piso puede obtenerse derivando una vez $u_{(z)}$:

$$\Delta_s = \frac{W_{max}H^4}{K_b(1-e^{-a})} \left\{ \frac{1}{6}z^3 + \frac{e^{-a}}{2a}z^2 + \left(\frac{e^{-a}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right)z + \left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{a^3} \right) - e^{-a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a\alpha^2} \right) \right] + \frac{(a^2 - \alpha^2)}{a^3\alpha^2} e^{-a+az} \right\} \quad (106)$$

La deriva global se obtiene como el cociente entre desplazamiento máximo y la altura total:

$$\Delta_g = \frac{W_{max}H^3}{K_b(1-e^{-a})} \left\{ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^3} \right) + e^{-a} \left[\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \right) \right] + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} \right) \right\} \quad (107)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) + \frac{W_{max}H^2}{2K_s} (1-z^2) \\ u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{8K_b} + \frac{W_{max}H^2}{2K_s} \\ \Delta_s = - \left[\frac{W_{max}H^4}{6K_b} (1-z^3) + \frac{W_{max}H^2}{K_s} z \right] \\ \Delta_g = \frac{W_{max}H^3}{8K_b} + \frac{W_{max}H}{2K_s} \end{array} \right. \quad (108)$$

Según el análisis de las ecuaciones y de los gráficos:

- Al ser dependiente del parámetro α , permite tener en cuenta la deformación por corte y modelar con mayor precisión a un muro de corte. Es conocido que para muros de corte esbeltos el desplazamiento lateral es prácticamente independiente del parámetro α debido a que se deforma solo por flexión; sin embargo, para un muro de corte no esbelto u ordinario la deformación por cortante puede llegar a ser significativa e importante.
- El desplazamiento, la deriva de entrepiso y la deriva global resultan de la suma del aporte por flexión y corte.

- El parámetro α condiciona el perfil del desplazamiento lateral y el perfil de deriva de entrepiso; es decir, el parámetro α determina el tipo de comportamiento predominante en la viga. Para un valor de $\alpha = 0.3$ ($H/L \approx 0.15$), muestra un comportamiento a corte puro; un valor de $\alpha = 3$ ($H/L \approx 1.45$), muestra un comportamiento intermedio entre corte y flexión; y un valor de $\alpha = 30$ ($H/L \approx 14.5$), muestra un comportamiento a flexión pura.
- A medida que aumenta el valor del parámetro α la influencia del parámetro a en el perfil del desplazamiento lateral normalizado se hace cada vez menor, y para un valor de $\alpha = 30$ ($H/L \approx 14.5$), el perfil del desplazamiento lateral normalizado es prácticamente independiente del parámetro a , como sucede en la viga de flexión.
- El perfil de desplazamiento lateral normalizado y el perfil de deriva de entrepiso normalizado son prácticamente idénticos para todos los casos e independientes del parámetro a .
- El aporte del corte se puede ignorar con seguridad cuando α tiene un valor mayor a aproximadamente 8.70, correspondiente a un aporte del 5%. Para un valor de $\alpha = 6$, se obtiene un 10% de aporte y para un valor de $\alpha = 4$ se tiene un 20% de aporte.
- Es irresponsable descuidar el aporte del corte cuando α tiene un valor menor a 8.70 debido a que modifica drásticamente el comportamiento de la viga y está del lado de la inseguridad.
- El aporte del corte es prácticamente independiente del parámetro a .

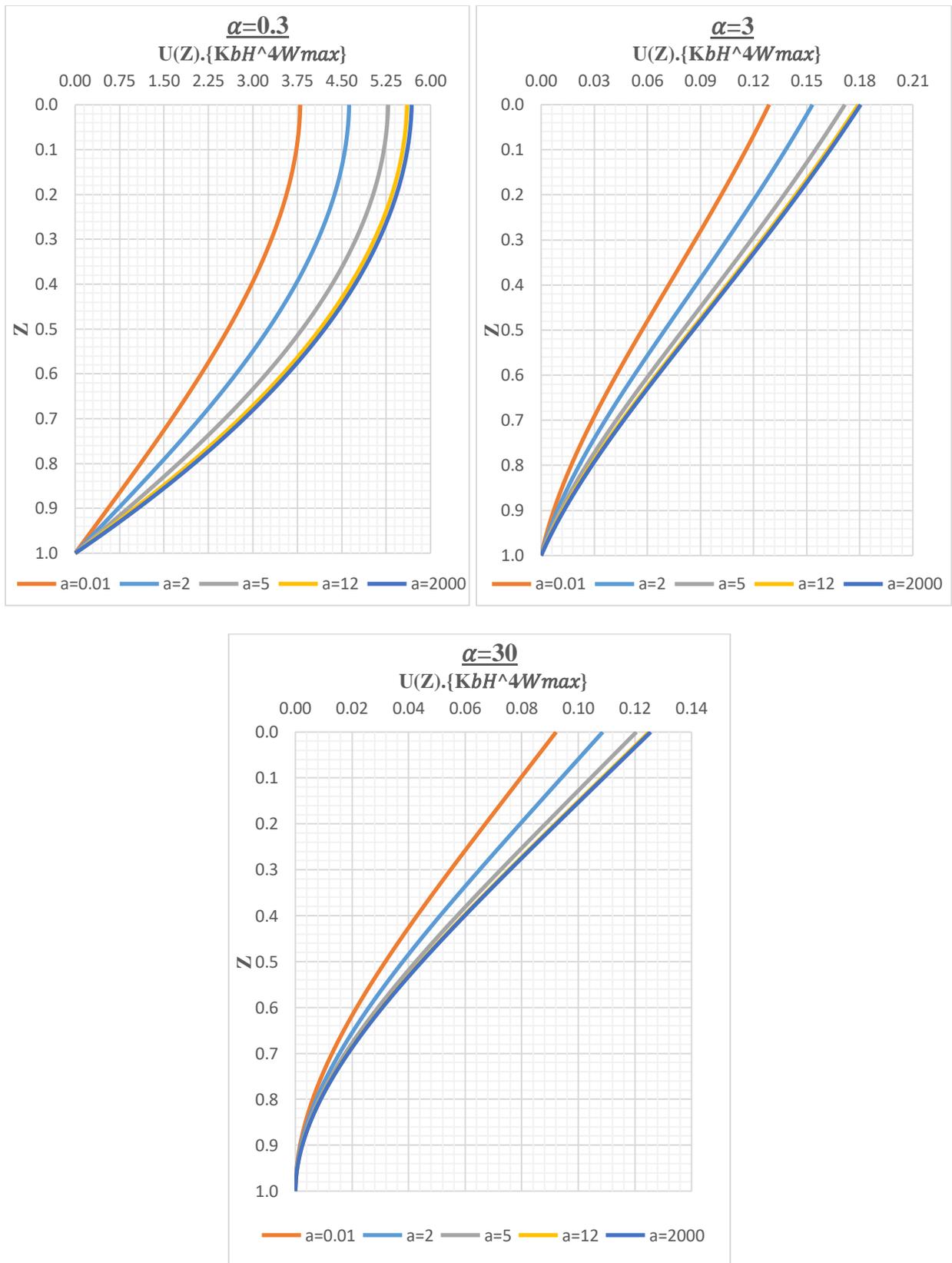


Figura 30. Desplazamiento lateral de la viga y efecto del parámetro a .

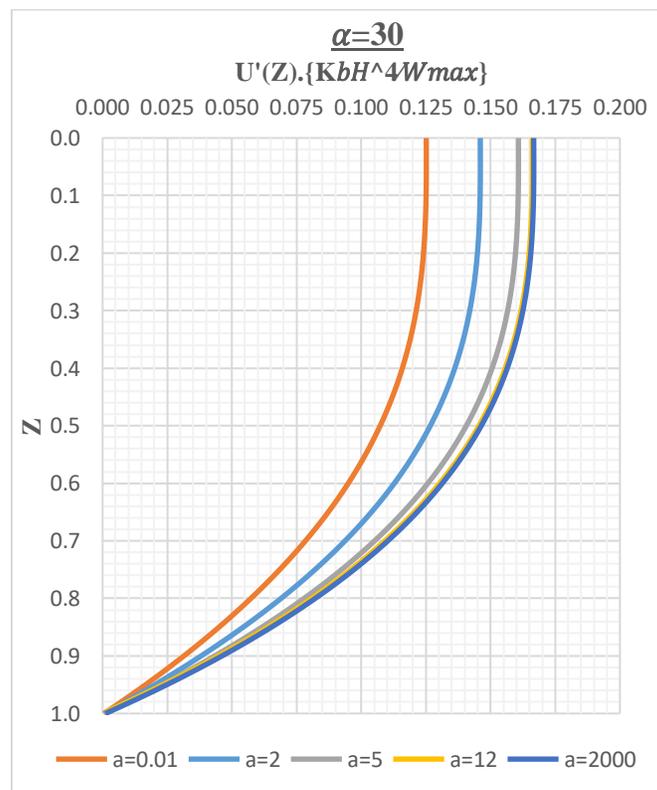
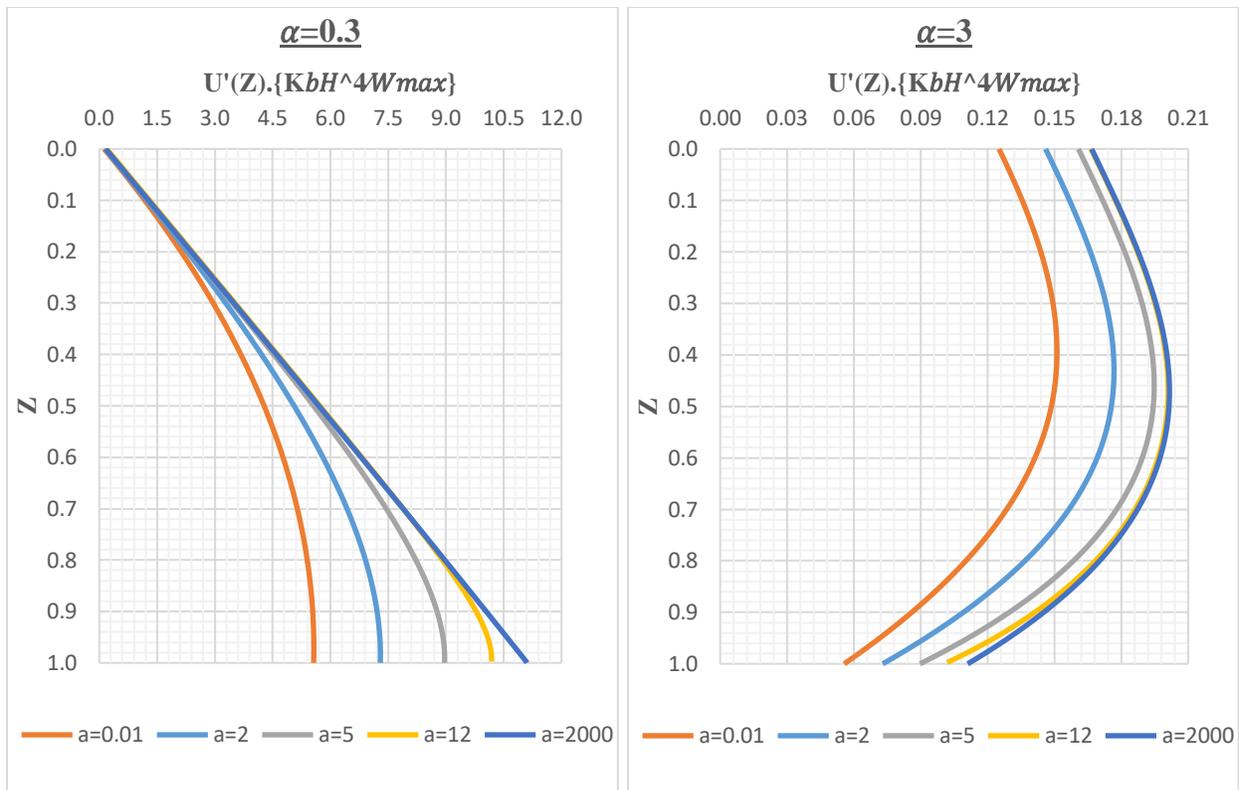


Figura 31. Deriva de entropiso de la viga y efecto del parámetro a .

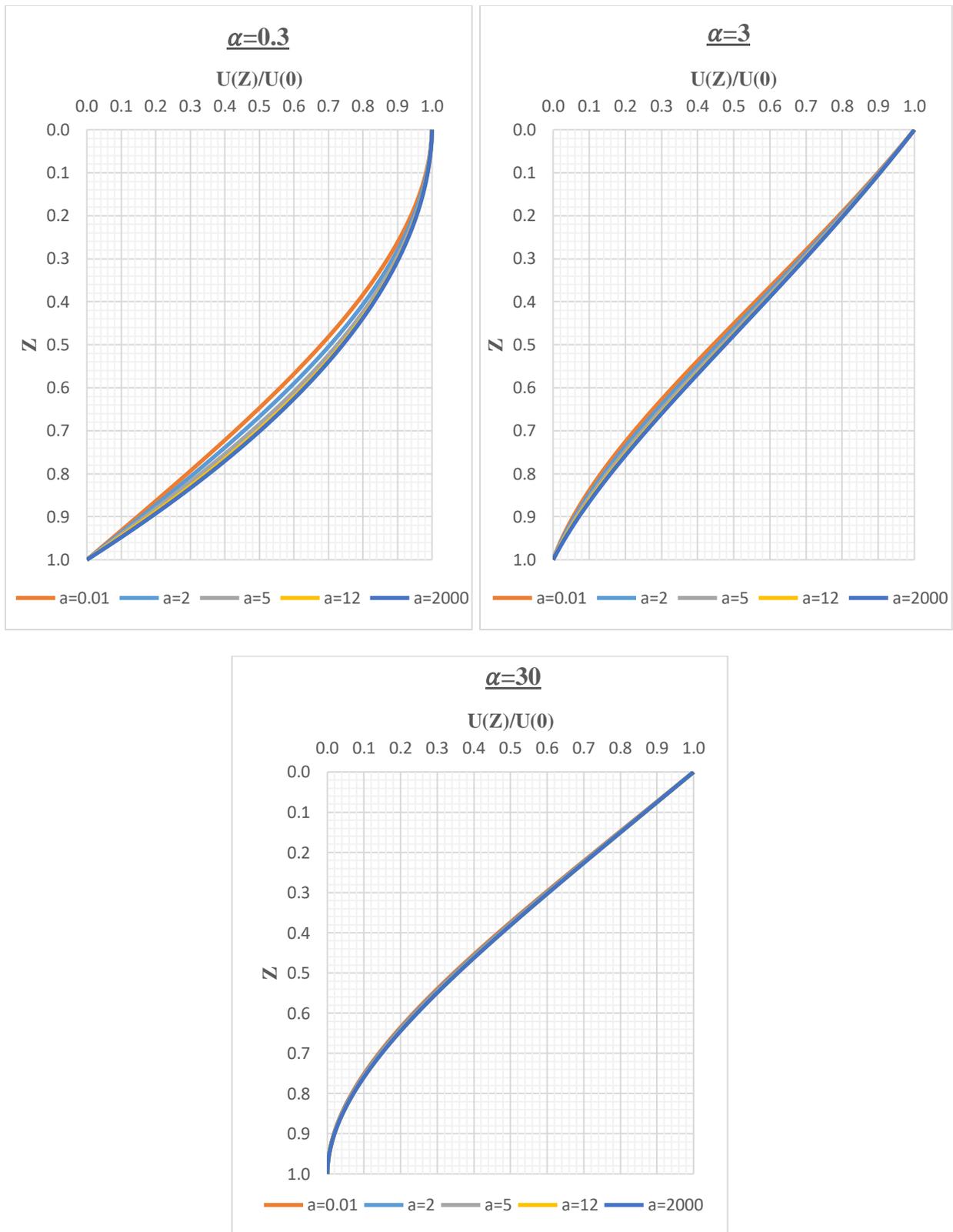


Figura 32. Efecto del parámetro a en el perfil del desplazamiento lateral normalizado.

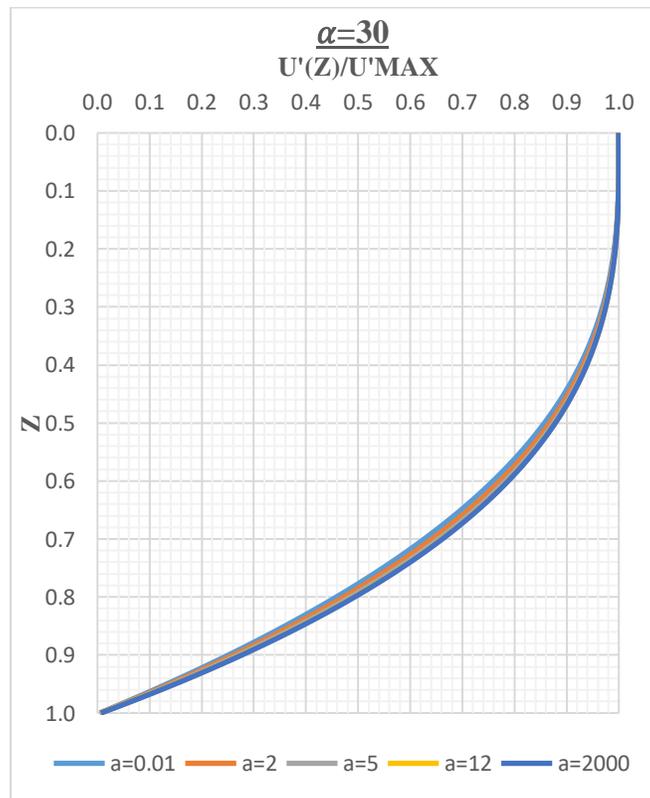
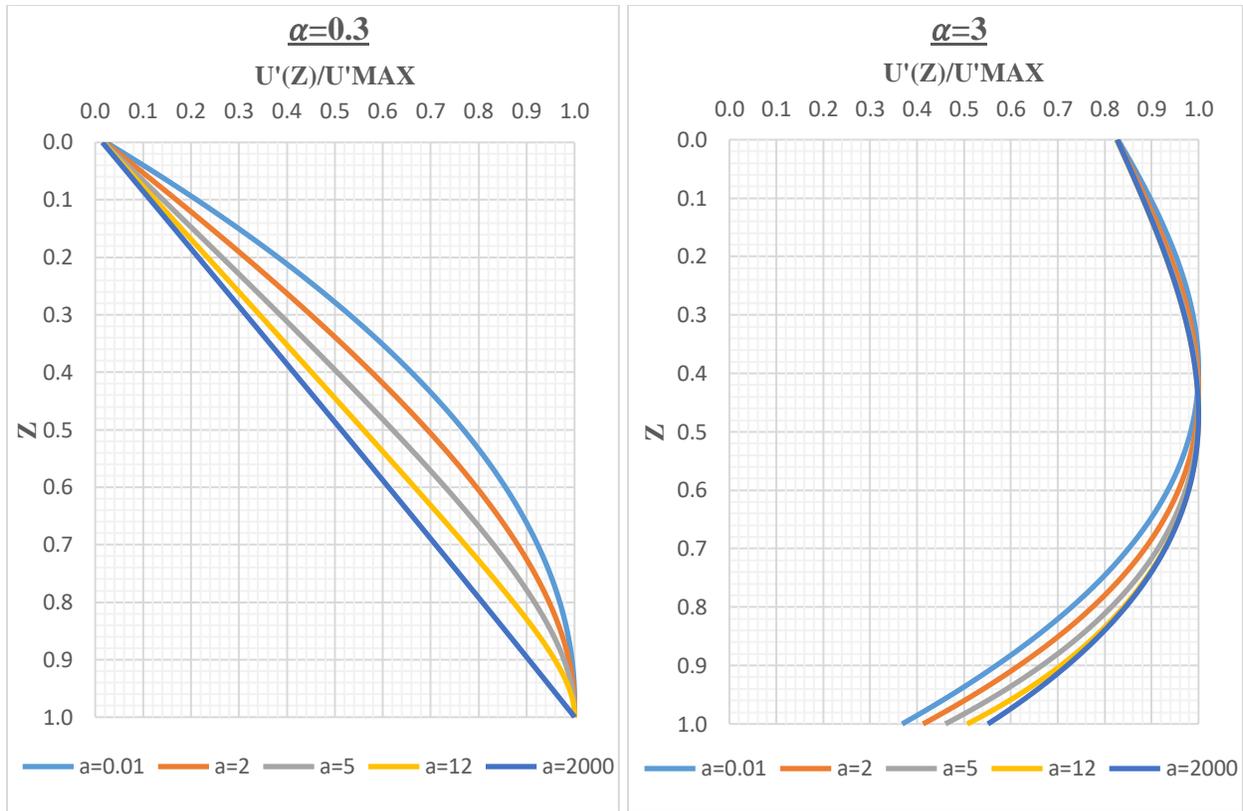


Figura 33. Efecto del parámetro a en el perfil de la deriva de entropía.

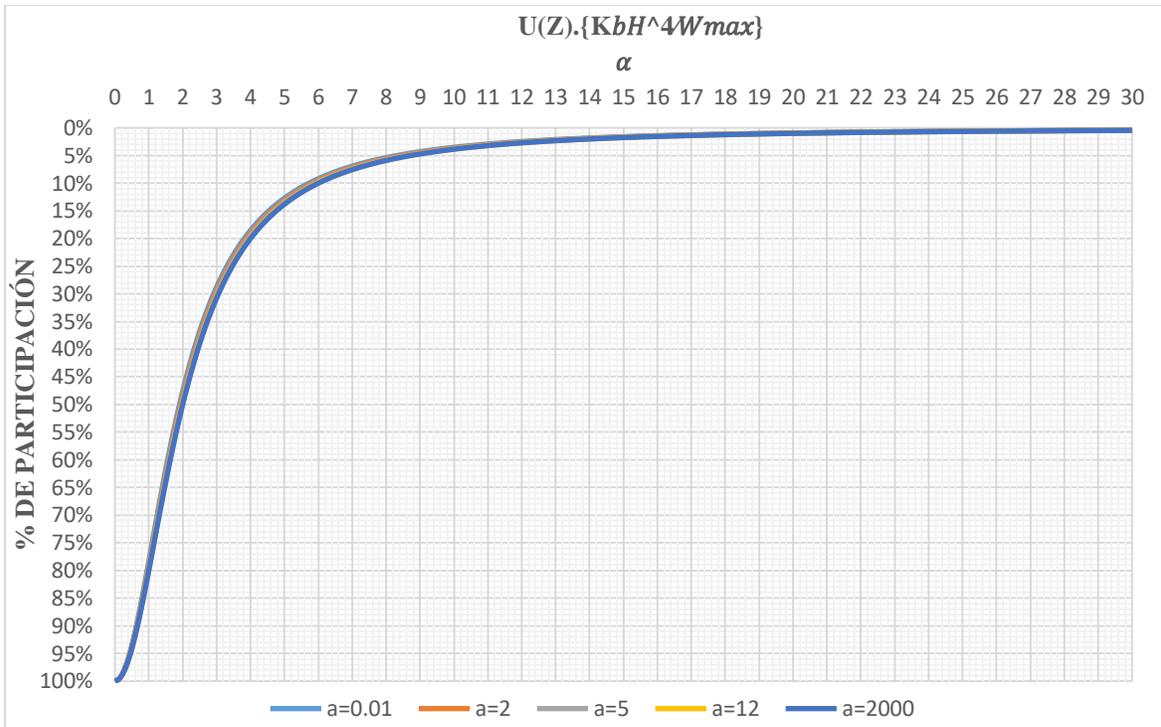


Figura 34. Influencia del desplazamiento por corte.

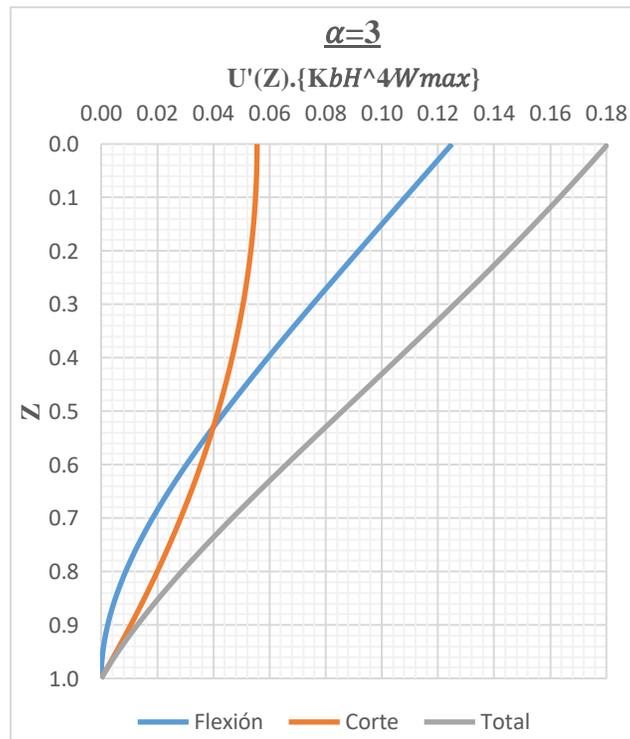


Figura 35. Desplazamiento por flexión, por cortante y total para $\alpha = 3$.

4.1.3.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} K_b \theta''_{(x)} + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ K_s [u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] = 0 \end{cases} \quad (109)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 \\ \theta_{(z)} = C_4 + C_5 z + C_6 z^2 \end{cases} \quad (110)$$

Expresando los coeficientes de la función $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + 6\frac{K_b}{K_s}\right)C_3 \quad (111)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_b \theta'_{(z)} = (2K_b)C_2 + (6K_b z)C_3 \\ V_{(z)} = K_s [u'_{(z)} - \theta_{(z)}] = \left(-\frac{6}{a^*2} K_s\right) C_3 \end{cases} \quad (112)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (113)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & z_i^2 & z_i^3 \\ 0 & 1 & 2z_i & 3z_i^2 + \frac{6}{\alpha^{*2}} \\ 0 & 0 & 2K_b & 6K_b z_i \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{\alpha^{*2}} K_s \end{bmatrix}_i \quad (114)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (115)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (116)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{array} \right\} \quad (117)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u'_{(0)} - \theta_{(0)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{cases} \quad (118)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (119)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y la rotación en la parte superior:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (121)$$

4.1.4 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB)- comportamiento traslacional

Se desarrolla la viga CTB, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de una viga de flexión y una viga de corte con una deformación por flexión y corte respectivamente. Se supone que las vigas están acopladas en paralelo por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman.

La viga CTB resulta más eficiente que la viga EBB y SB, debido a la interacción entre los perfiles de desplazamiento. La viga EBB muestra un perfil de desplazamiento que está a favor de la carga lateral, con una pendiente máxima en la parte inferior; mientras que la viga SB muestra un perfil de desplazamiento que está en contra de la carga lateral, con una pendiente máxima en la parte superior. Al unir ambas vigas por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales se condiciona a que la viga EBB y SB desarrollen un desplazamiento lateral idéntico; lo que resulta en un perfil de desplazamiento de flexión en la parte inferior restringiendo los desplazamientos en los pisos inferiores y un perfil de desplazamiento de corte en la parte superior restringiendo los desplazamientos en los pisos superiores. Este efecto de interacción horizontal contribuye a aumentar la rigidez lateral de la estructura, haciendo que la rigidez total de la estructura sea mayor a la suma de las rigideces laterales de la viga EBB y SB individualmente.

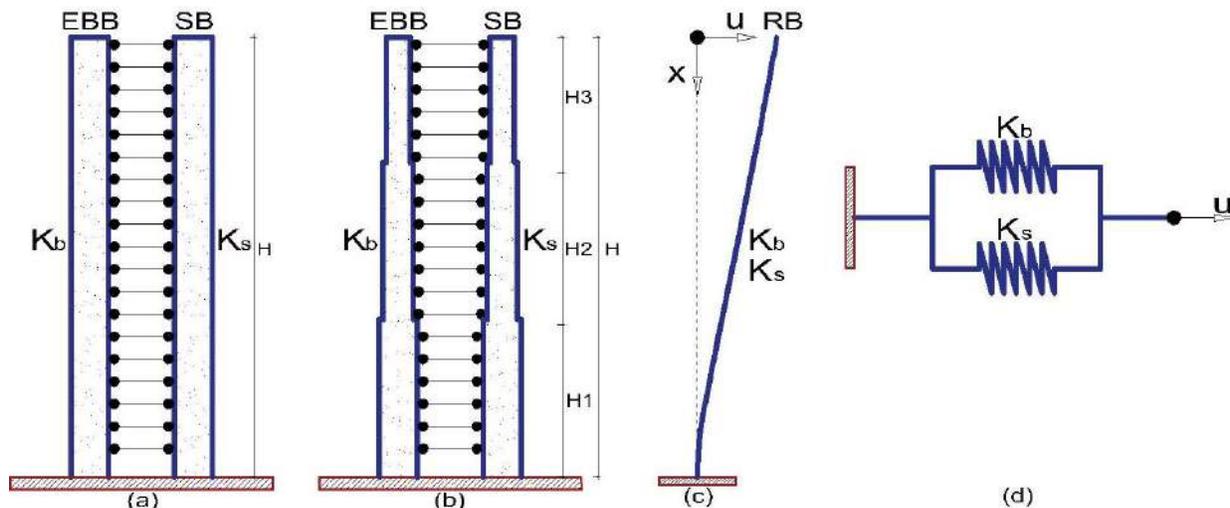


Figura 36. Acoplamiento de vigas de flexión y corte (CTB) de un campo. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez CTB.

El modelo de viga CTB toma en cuenta un movimiento transversal único u con rigideces K_b y K_s como rigidez a la flexión local y al corte, respectivamente; es decir, ignora la rigidez a la flexión

global y como consecuencia no toma en cuenta las deformaciones axiales como campo cinemático adicional. Este modelo es adecuado para modelar estructuras duales de pórticos y muros de corte; y pórticos donde el efecto de la flexión global no es predominante y por lo tanto puede descuidarse.

4.1.4.1 Caso 1

La energía potencial del modelo CTB de un campo se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''(x)^2 + K_s u'(x)^2] dx \quad (122)$$

Donde:

$$\left\{ K_b = r \sum_{i=1}^{w,c} EI_{w,c}, K_s = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_c = \sum_{i=1}^{w,c} \frac{12EI_{w,c}}{h^2}, K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_b}{lh}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \right\} \quad (123)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (124)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga CTB de un campo clásico sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''(x)^2 + K_s u'(x)^2] dx - \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (125)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H \{K_b u''(x) \delta u''(x) + K_s u'(x) \delta u'(x)\} dx - \int_0^H f(x) \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \quad (126)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlos en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & [K_b u''(x) \delta u'(x)]_0^H - \{[K_b u'''(x) - K_s u'(x)] \delta u(x)\}_0^H \\ & + \int_0^H [K_b u''''(x) - K_s u''(x) - f(x)] \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (127)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_b u''''(x) - K_s u''(x) - f(x) = 0 \quad (128)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(0) = 0 \\ K_b u'''(0) - K_s u'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (129)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u''''(z) - H^2 \frac{K_s}{K_b} u''(z) = \frac{H^4}{K_b} f(z) \quad (130)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a \frac{x}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a + az}) \quad (131)$$

Reemplazándolo en la ecuación diferencial:

$$u''''(z) - \alpha^2 u''(z) = \lambda (1 - e^{-a + az}) \quad (132)$$

Donde:

$$\alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \lambda = \frac{W_{max} H^4}{K_b (1 - e^{-a})} \quad (133)$$

La expresión para $u(z)$ se propone:

$$u(z) = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\alpha z) + C_3 \sinh(\alpha z) - \frac{\lambda}{2\alpha^2} z^2 - \frac{\lambda}{\alpha^2(\alpha^2 - \alpha^2)} e^{-a + az} \quad (134)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(0)} - \alpha^2 u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (135)$$

Las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left[\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{a^2(a^2 - \alpha^2)} \right] - (C_1 + C_2 \cosh \alpha + C_3 \sinh \alpha) \\ C_1 = -\frac{\lambda e^{-a}}{a\alpha^2} \\ C_2 = \frac{\lambda}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{e^{-a}}{a^2 - \alpha^2} \right) \\ C_3 = \frac{1}{\alpha \cosh \alpha} \left\{ \lambda \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{a(a^2 - \alpha^2)} \right] - (C_1 + C_2 \alpha \sinh \alpha) \right\} \end{array} \right\} \quad (136)$$

El desplazamiento máximo se obtiene evaluando en 0 a $u_{(z)}$:

$$u_{(0)} = C_0 + C_2 - \frac{\lambda}{a^2(a^2 - \alpha^2)} e^{-a} \quad (137)$$

La deriva de piso puede obtenerse derivando una vez $u_{(z)}$:

$$\Delta_s = C_1 + C_2 \alpha \sinh(\alpha z) + C_3 \alpha \cosh(\alpha z) - \frac{\lambda}{\alpha^2} z - \frac{\lambda}{a(a^2 - \alpha^2)} e^{-a+\alpha z} \quad (138)$$

La deriva global se obtiene como el cociente entre desplazamiento máximo y la altura total:

$$\Delta_g = C_0 + C_2 - \frac{\lambda}{a^2(a^2 - \alpha^2)} e^{-a} \quad (139)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{K_s} \left(\frac{1-z^2}{2} \right) + \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left\{ \frac{\alpha [\sinh(\alpha z) - \sinh \alpha] - 1 + \cosh[\alpha(z-1)]}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right\} \\ u_{(0)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_s} - \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left(\frac{\alpha \sinh \alpha + 1 - \cosh \alpha}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right) \\ \Delta_p = -\frac{W_{max}H^2}{K_s} z + \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left\{ \frac{\alpha \cosh(\alpha z) + \sinh[\alpha(z-1)]}{\alpha^3 \cosh \alpha} \right\} \\ \Delta_g = \frac{W_{max}H}{2K_s} - \frac{W_{max}H^3}{K_b} \left(\frac{\alpha \sinh \alpha + 1 - \cosh \alpha}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right) \end{array} \right. \quad (140)$$

Consideraremos algunos casos especiales de análisis:

- Cuando $K_b \rightarrow 0$. Esta situación se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados de pocos pisos donde la rigidez a flexión local es pequeño y se puede descuidar. Aplicando límites:

$$\lim_{K_b \rightarrow 0} [K_b u_{(z)}'''' - H^2 K_s u_{(z)}''] = \lim_{K_b \rightarrow 0} [wH^4] \rightarrow u_{(z)}'' = -\frac{wH^2}{K_s} \quad (141)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura el corte es dominante y es idéntica a la ecuación diferencial de una viga de corte (SB).

- Cuando $K_s \rightarrow 0$. Esta situación se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados de pocos pisos donde la rigidez a corte es pequeño y se puede descuidar. Aplicando límites:

$$\lim_{K_s \rightarrow 0} [K_b u_{(z)}'''' - H^2 K_s u_{(z)}''] = \lim_{K_s \rightarrow 0} [wH^4] \rightarrow u_{(z)}'''' = \frac{wH^4}{K_b} \quad (142)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura el corte es dominante y es idéntica a la ecuación diferencial de una viga de flexión (EBB).

Según el análisis de las ecuaciones y de los gráficos:

- El desplazamiento, la deriva de entrepiso y la deriva global resultan de la suma del aporte por corte y de la interacción entre la flexión y el corte.
- El aporte de la flexión no se utiliza de manera directa como si lo hace el efecto del corte, debido a que se ha ignorado las deformaciones axiales y el efecto de la flexión se tiene en cuenta indirectamente en el efecto de interacción entre la flexión y el corte.

- Debido a que ambas vigas acopladas en paralelo deben desplazarse lo mismo, la flexión restringe al corte en los pisos inferiores y el corte restringe a la flexión en los pisos superiores. Consecuencia de esta interacción entre ambas vigas aumenta la rigidez lateral, concluyendo que la rigidez del sistema es mayor a la suma de las rigideces a flexión y corte por separado. Además, el grado de interacción entre la flexión y el corte está fuertemente influenciado por el parámetro α .
- El parámetro α condiciona el perfil del desplazamiento lateral y el perfil de deriva de entrepiso; es decir, el parámetro α determina el tipo de comportamiento predominante en la viga. Para un valor de $\alpha = 0.3$, muestra un comportamiento a flexión pura; un valor de $\alpha = 3$, muestra un comportamiento intermedio entre corte y flexión; y un valor de $\alpha = 30$, muestra un comportamiento a que tiende a corte puro.
- A medida que disminuye el valor del parámetro α la influencia del parámetro α en el perfil del desplazamiento lateral normalizado se hace cada vez menor, y para un valor de $\alpha = 0.3$, el perfil del desplazamiento lateral normalizado es prácticamente independiente del parámetro α , como sucede en la viga de flexión.
- El perfil de desplazamiento lateral normalizado y el perfil de deriva de entrepiso normalizado son dependientes del parámetro α . Esta dependencia disminuye al aumentar el valor del parámetro α .
- Es posible determinar el valor de α en función de $\Delta_g/\Delta_{s,max}$, que para un análisis preliminar puede asumirse en función de las disposiciones del código vigente. Calculado el valor de α , puede evaluarse la influencia de la interacción entre el corte y la flexión.
- El punto de inflexión que coincide con el punto de deriva de entrepiso máximo tiene una ligera influencia del parámetro α y se estabiliza conforme aumenta el valor de α .

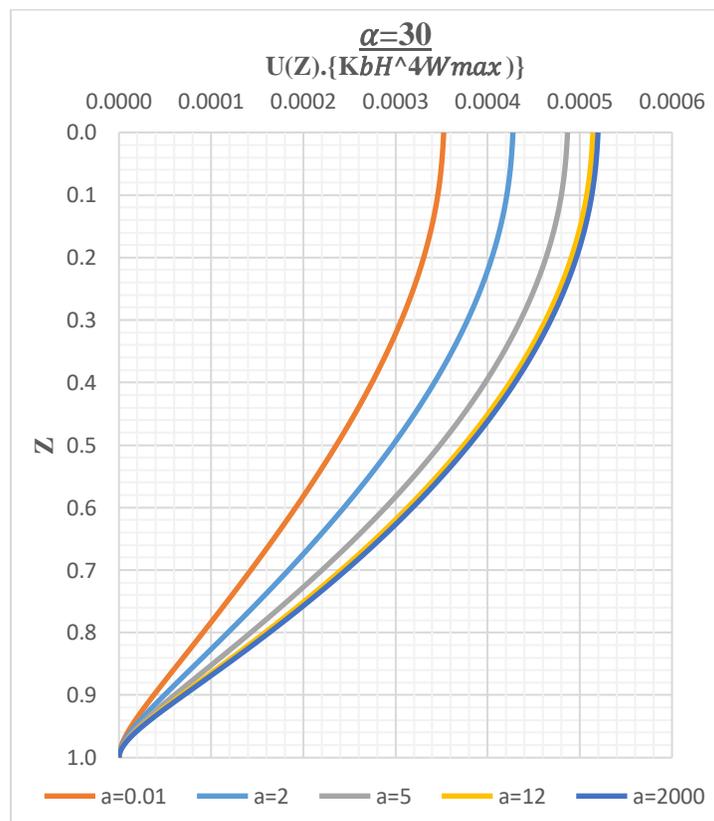
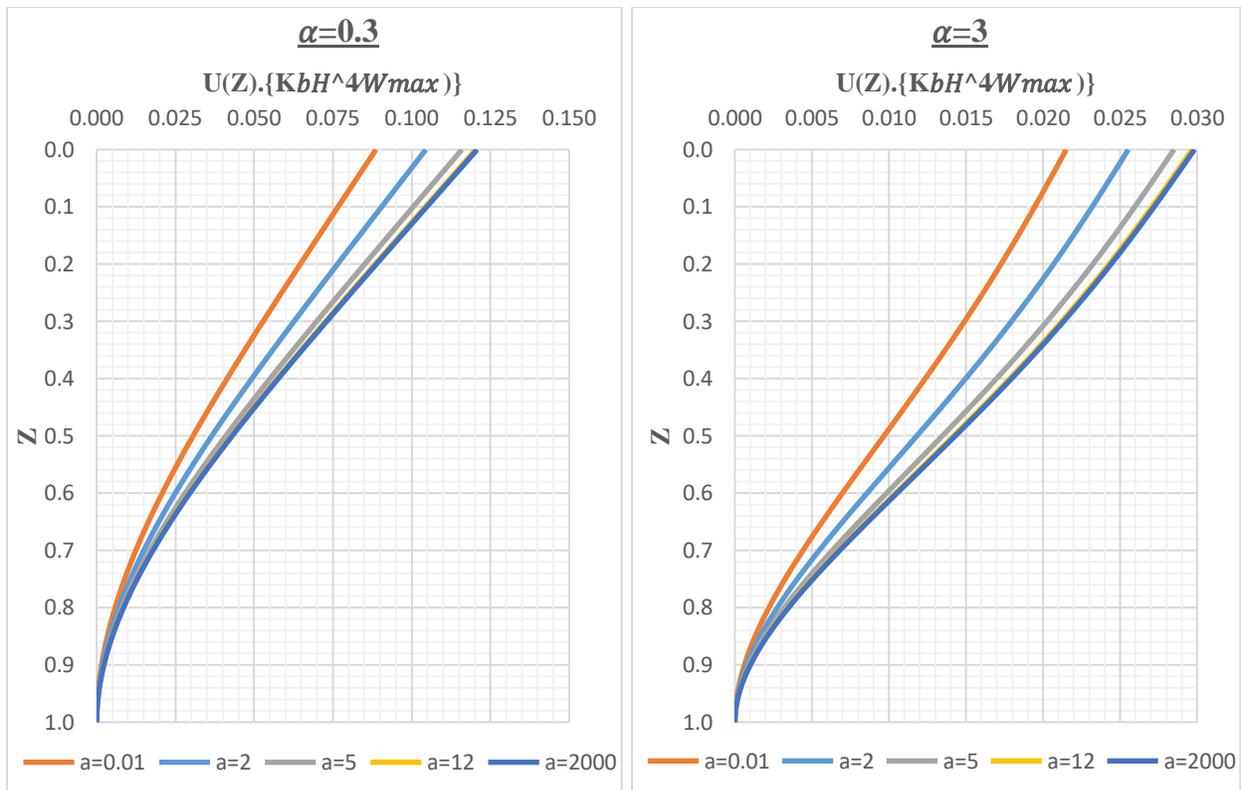


Figura 37. Desplazamiento lateral de la viga y efecto del parámetro a .

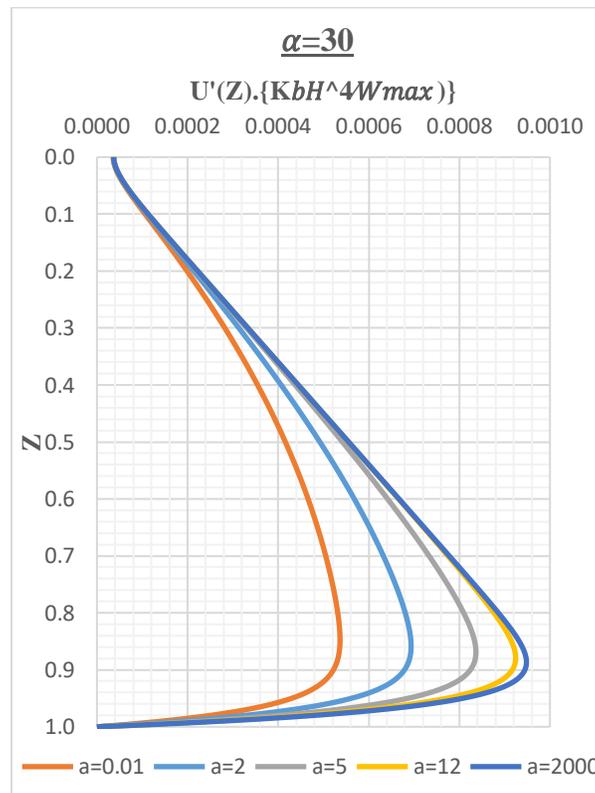
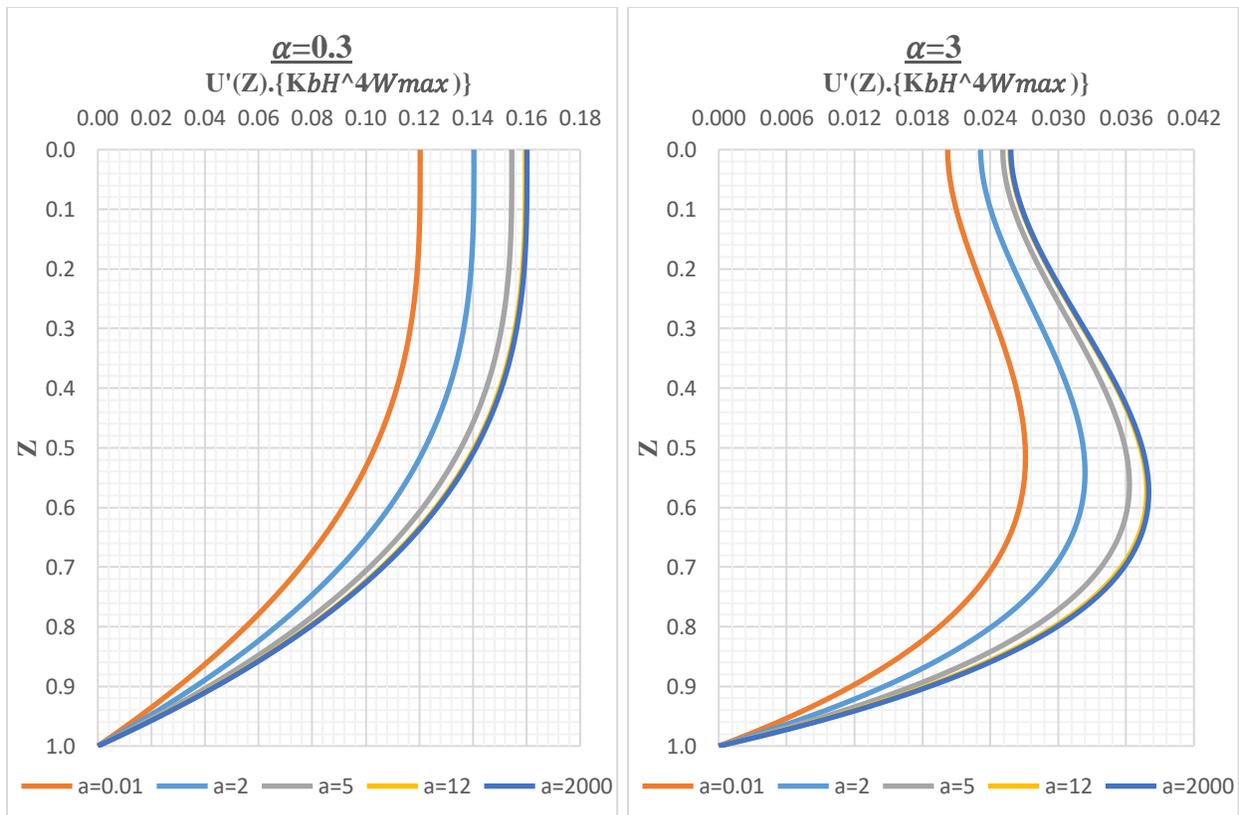


Figura 38. Deriva de entepiso de la viga y efecto del parámetro a .

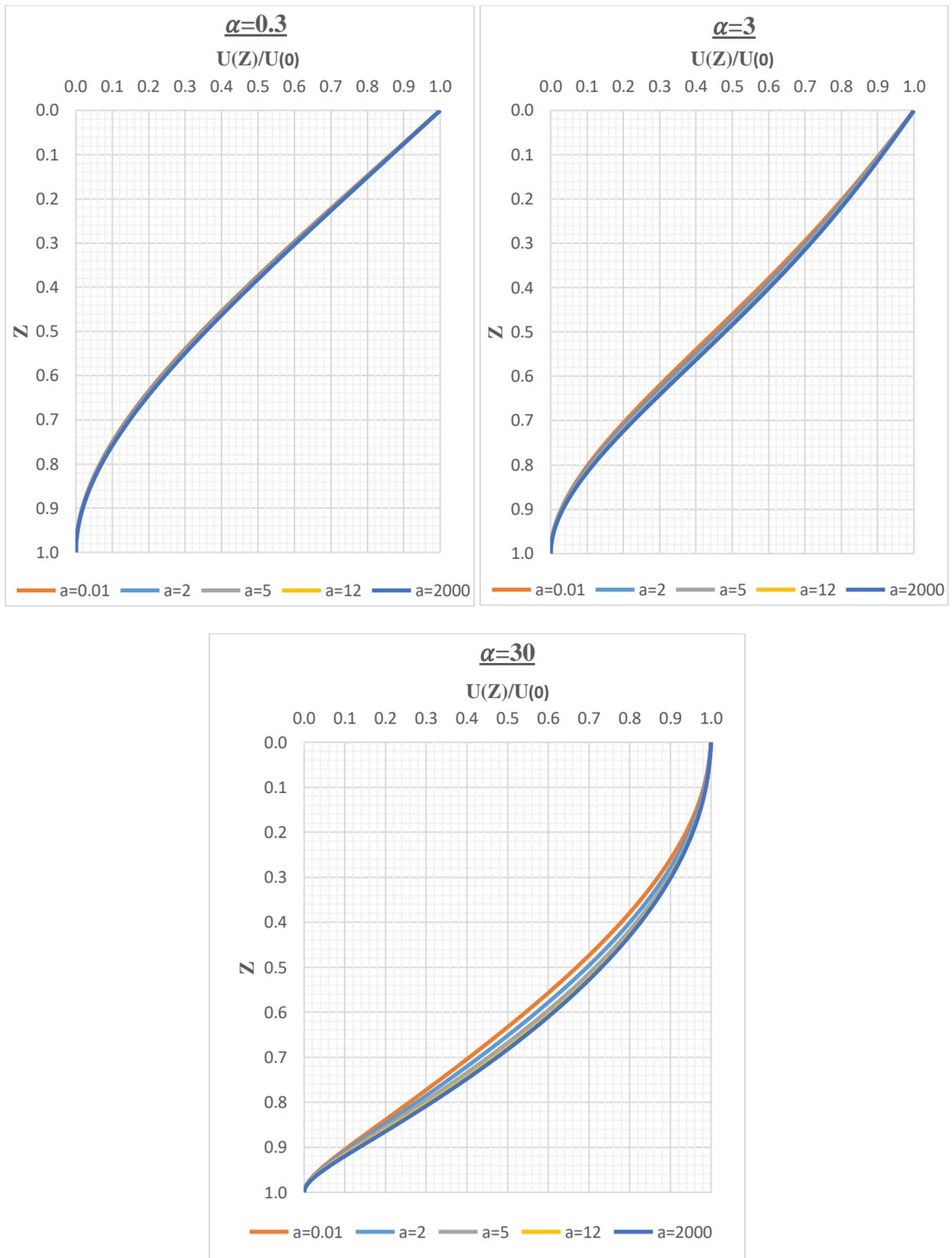


Figura 39. Efecto del parámetro a en el perfil del desplazamiento lateral normalizado.

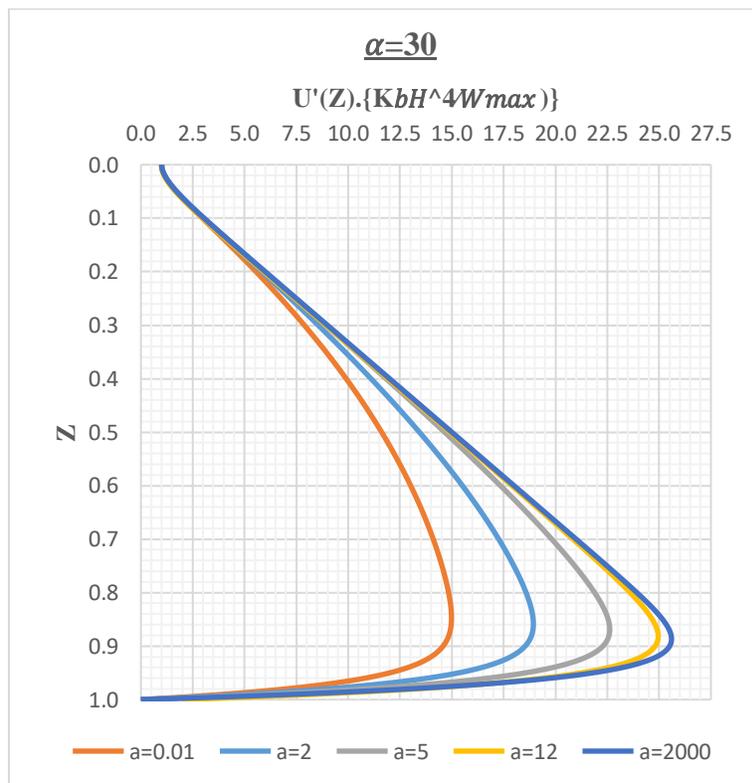
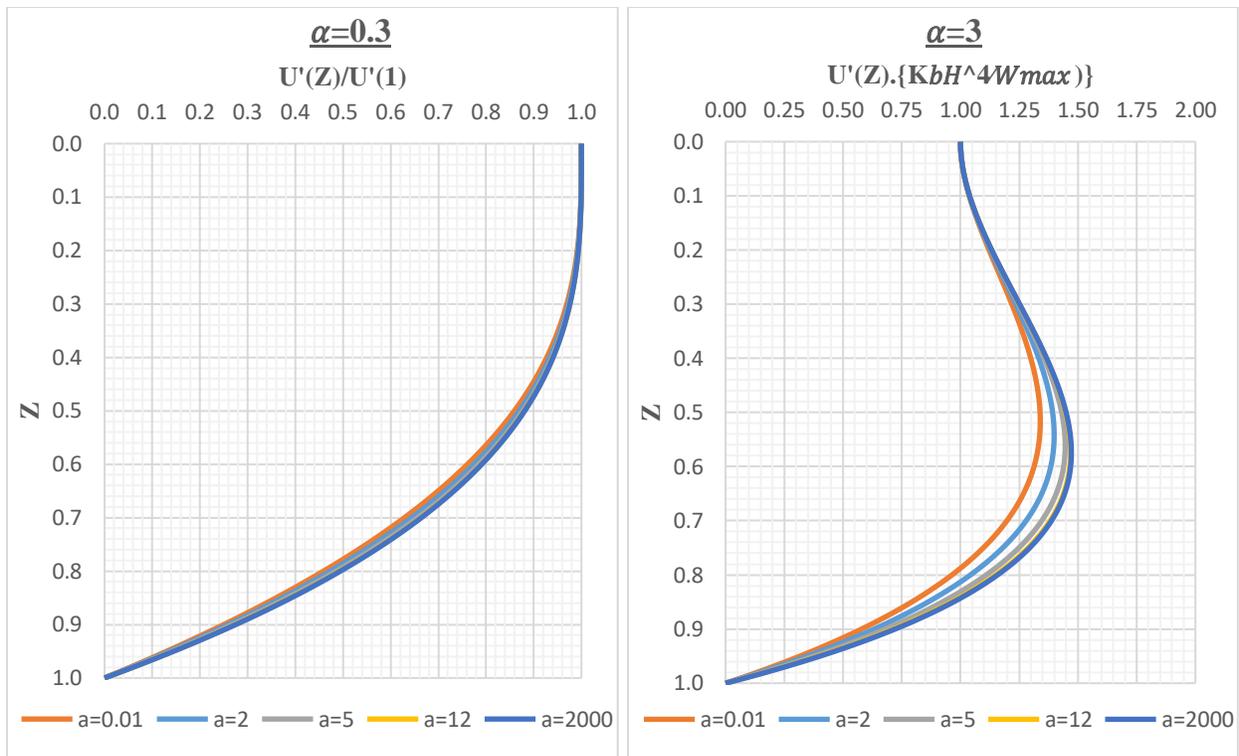


Figura 40. Efecto del parámetro a en el perfil de la deriva de entropía.

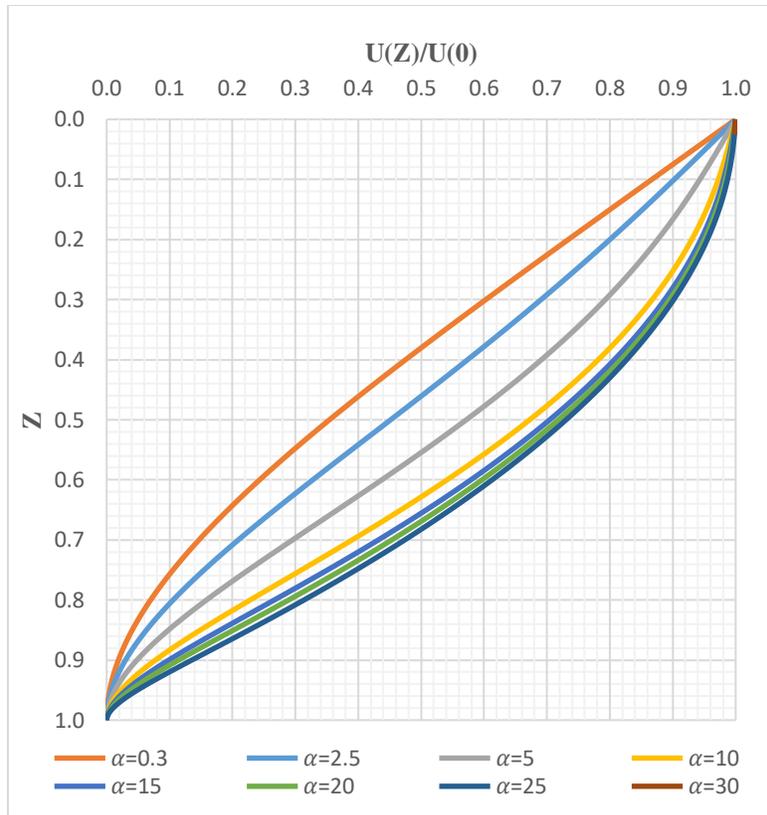


Figura 41. Efecto del parámetro α en el perfil del desplazamiento lateral normalizado para una carga uniformemente distribuida ($a = 2000$).

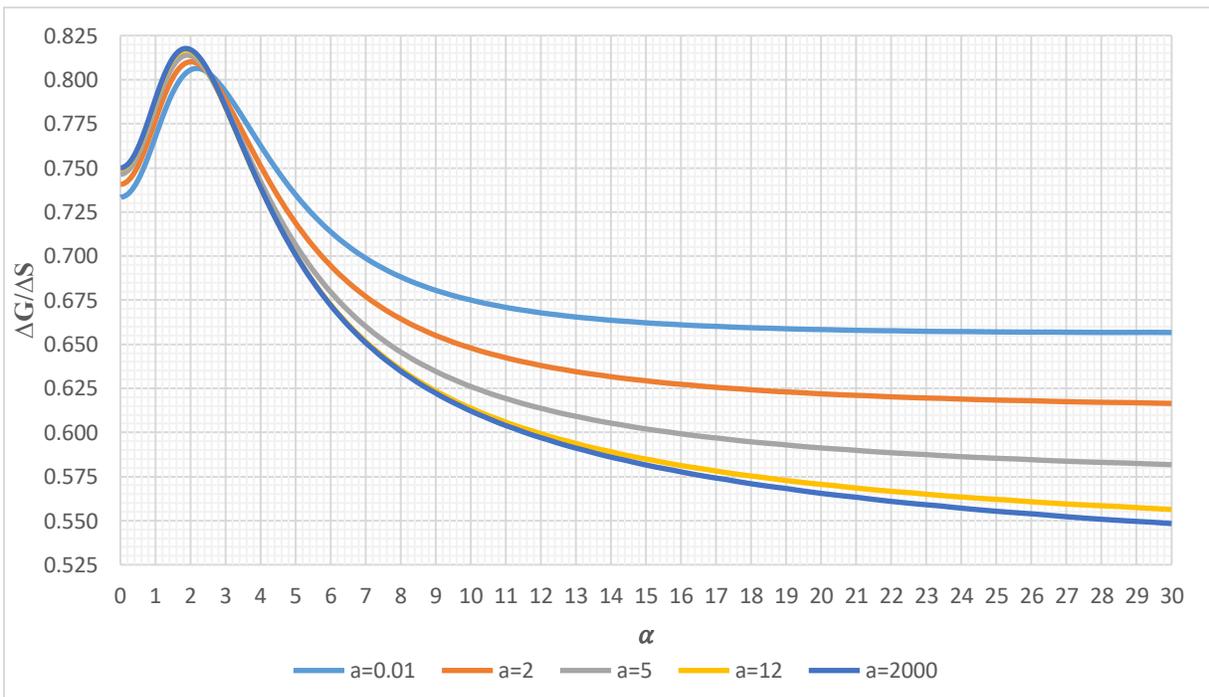


Figura 42. Variación de α vs. relación de deriva Δ_g/Δ_s para diversos casos de a .

- **Análisis paramétrico**

El punto de inflexión en la curva de deflexión del pórtico sujeto a cargas laterales, es un parámetro clave para definir si el comportamiento al corte o a la flexión es el dominante. La porción de la columna equivalente debajo del punto de inflexión representa el comportamiento a la flexión y la porción superior representa el comportamiento al corte. El comportamiento dominante está definido por los parámetros adimensionales α y k .

El punto de inflexión coincide con el nivel de deriva máxima dy/dz y se calcula igualando a cero la curvatura de la deflexión del pórtico. La ubicación del punto de inflexión se encuentra mediante un análisis iterativo, teniendo en cuenta la ecuación:

$$C_2\alpha^2 \cosh(\alpha z) + C_3\alpha^2 \sinh(\alpha z) + 2C_4 + C_5\alpha^2 e^{-\alpha+az} = 0 \quad (143)$$

Para el caso particular de una carga lateral uniformemente distribuida:

$$-\frac{1}{\alpha^2}z + \frac{\alpha^2 \cosh(\alpha z) - \alpha \sinh(\alpha - az)}{\alpha^5 \cosh(\alpha)} = 0 \quad (144)$$

Respecto a la curva de la figura 43, la viga puede ser dividido en cuatro categorías de acuerdo con el valor de α :

- Valores de $\alpha < 1.5$: Su ubicación se encuentra en forma aproximada en el tercio superior de la altura de la viga y por lo tanto se comporta predominantemente a la flexión.
- Valores de $1.5 < \alpha < 10$: Se encuentra influenciado por la rigidez al corte. Su ubicación se encuentra generalmente entre 0.25 y 0.65 de la altura. Por lo tanto es posible que las vigas en este rango representen un comportamiento aparentemente equilibrado, donde la interacción entre el comportamiento a flexión y corte tiene un alto grado de influencia.
- Valores de $10 < \alpha < 30$: La ubicación del punto de inflexión prácticamente se estabiliza y ya no es influenciado por el aumento de la rigidez al corte (aumento de α). La viga se comporta predominantemente a corte.

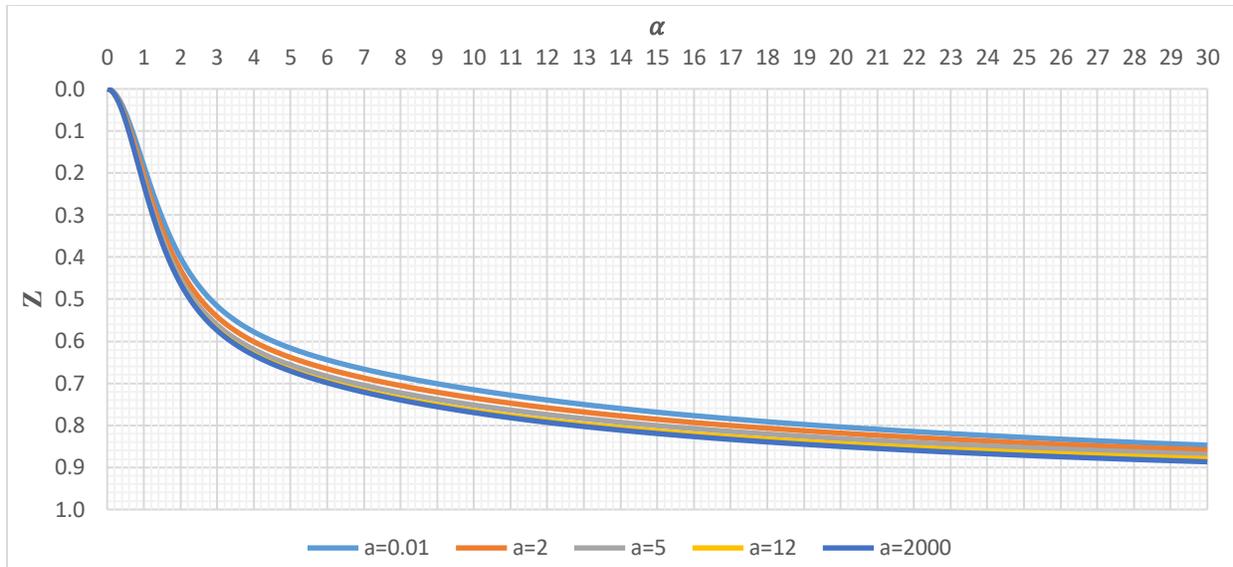


Figura 43. Ubicación del punto de inflexión.

4.1.4.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial y dado que se supone que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$K_b u''''(x) - K_s u''(x) = 0 \quad (145)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\alpha^* z) + C_3 \sinh(\alpha^* z) \\ u'_{(z)} = C_1 + C_2 \alpha^* \sin(\alpha^* z) + C_3 \alpha^* \cosh(\alpha^* z) \end{array} \right\} \quad (146)$$

Donde:

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{K_s}{K_b}} \quad (147)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_b u''_{(z)} = \alpha^{*2} \cosh(\alpha^* z) K_b C_2 + \alpha^{*2} \sinh(\alpha^* z) K_b C_3 \\ V_{(z)} = K_b u'''_{(z)} - K_s u'_{(x)} = (-\alpha^{*2} K_b) C_1 \end{cases} \quad (148)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (149)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cosh(\alpha^* z) & \sinh(\alpha^* z) \\ 0 & 1 & \alpha^* \sin(\alpha^* z) & \alpha^* \cosh(\alpha^* z) \\ 0 & 0 & \alpha^{*2} \cosh(\alpha^* z) K_b & \alpha^{*2} \sinh(\alpha^* z) K_b \\ 0 & -\alpha^{*2} K_b & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (150)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (151)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (152)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{array} \right\} \quad (153)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ (K_b u'''_{(0)} - K_s u'_{(0)}) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (154)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \quad (155)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \quad (156)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y la pendiente en la parte superior:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\} \quad (157)$$

4.1.5 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - Comportamiento torsional

El comportamiento torsional es adecuado para modelar a los núcleos, debido a que una vez alcanzado un cierto número de pisos los núcleos se hacen necesarios debido a que crean unidades tridimensionales tales como los ascensores. En las dos direcciones principales actúan como muros de corte y tienen una resistencia a la torsión significativa que puede constituir una importante resistencia con respecto a la torsión general del edificio.

Los núcleos pueden considerarse como elementos de secciones abiertas de paredes delgadas con un comportamiento particular no común. En presencia de momentos flectores y carga axial el comportamiento es similar al de una viga sólida, pero en presencia de momentos torsionales el desplazamiento axial relativo de la viga complica su comportamiento. La característica principal de las vigas de paredes delgadas es que pueden sufrir una extensión longitudinal como resultado de la torsión; en consecuencia, se crean tensiones longitudinales normales que son proporcionales a las deformaciones, conduciendo a un equilibrio interno de las fuerzas longitudinales en cada sección transversal. Estas tensiones, que surgen como resultado de la deformación relativa de la sección y que no se examinan en la teoría de la torsión pura de Saint Venant, pueden alcanzar valores muy grandes en vigas de paredes delgadas (Vlasov, 1961).

- **Teoría de Saint Venant (Torsión uniforme)**

En el caso de la torsión uniforme, el valor de la rotación y el desplazamiento longitudinal de la viga es constante en todo el elemento. Esto ocurre si el momento de torsión constante se aplica en direcciones opuestas en los extremos de la viga libre para que no se distorsione. La rigidez torsional que afecta la rotación de la viga se define como GJ y puede calcularse para secciones abiertas y cerradas:

- a) Para los núcleos de secciones abiertas, la distribución de los esfuerzos es muy similar a las secciones rectangulares delgadas. Por lo tanto, los esfuerzos cortantes son paralelos a las paredes de la sección y cambian linealmente a lo largo del espesor. Para calcular J se utiliza la fórmula de Bredt-Batho:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m h_i v_i^3 \quad (158)$$

- b) Para los núcleos de secciones cerrada, hay aumentos significativos en la rigidez torsional respecto a la sección abierta y la distribución de esfuerzos de corte son constantes. Para calcular J se utiliza la siguiente fórmula:

$$J = \frac{4A_0^2}{\sum_{i=1}^m \frac{h_i}{v_i}} \quad (159)$$

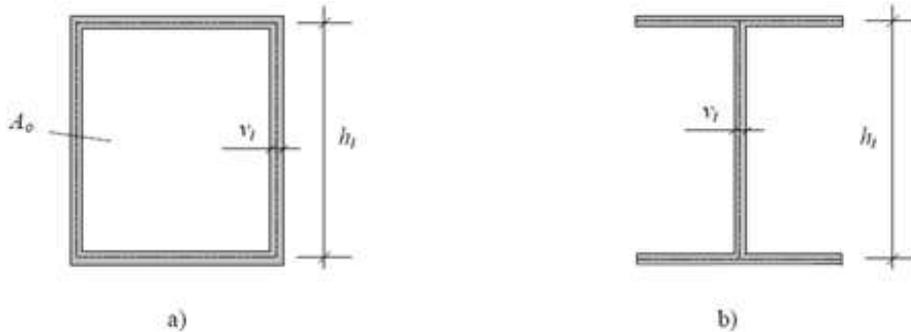


Figura 44. Núcleo estructural. (a) De sección cerrada, y b) De sección abierta (Zalka, 2020).

- **Teoría de Vlasov (Torsión no uniforme)**

En el caso de la torsión no uniforme, según la teoría de Vlasov la rotación de la viga es variable en todo el elemento. Cuando las secciones son libres de deformarse, una viga responde en torsión uniforme, por el contrario, si se restringe la deformación, debido a la compleja distribución de los esfuerzos longitudinales, los esfuerzos cortantes en la sección transversal pueden estar relacionados con dos modos diferentes de comportamiento torsional. Uno debido a la torsión uniforme, y el otro, debido a la torsión de deformación. Por lo tanto, su rigidez a la torsión se origina de dos fuentes: La rigidez torsional pura de Saint Venant (GJ) y la rigidez torsional de deformación (EI_w).

Para la rigidez torsional pura de Saint Venant, la constante torsional (GJ) se define cerradamente, pero para la rigidez de deformación el cálculo de la constante de deformación (I_w) es mucho más complicado. No existe un procedimiento de validez general para el cálculo de la constante de deformación, pero existen soluciones de forma cerrada para varias secciones transversales conocidas.

4.1.5.1 Caso 1

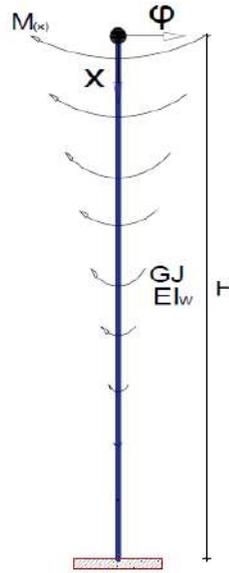


Figura 45. Núcleo sometido a un momento torsional uniformemente distribuido.

El momento de torsión es igual a la suma de torsión uniforme y torsión no uniforme:

$$EI_w \varphi''''(x) - GJ \varphi''(x) = M(x) \quad (160)$$

Un caso de especial interés para el ingeniero estructural son los núcleos que están parcialmente cerradas por losas o por las vigas del piso, tales como los ascensores. El efecto de las vigas de acoplamiento siempre se puede ignorar con seguridad, pero su contribución es normalmente significativa y en algunos casos es necesario tenerlo en cuenta por razones económicas. Las vigas de acoplamiento evitan que la sección del núcleo se deforme y aumentan su rigidez torsional. Las investigaciones de Vlasov (1961) muestran que el fenómeno se tiene en cuenta modificando la ecuación diferencial de torsión.

$$EI_w \varphi''''(x) - GJ^* \varphi''(x) = M(x) \quad (161)$$

Donde:

$$J^* = J + \bar{J}, \bar{J} = \frac{4A_0^2}{l^3 s G} \frac{1.2 l s}{12 E I_b + \frac{1.2 l s}{A_b}}, A_b = t_b d, I_b = \frac{t_b d^3}{12} \quad (162)$$

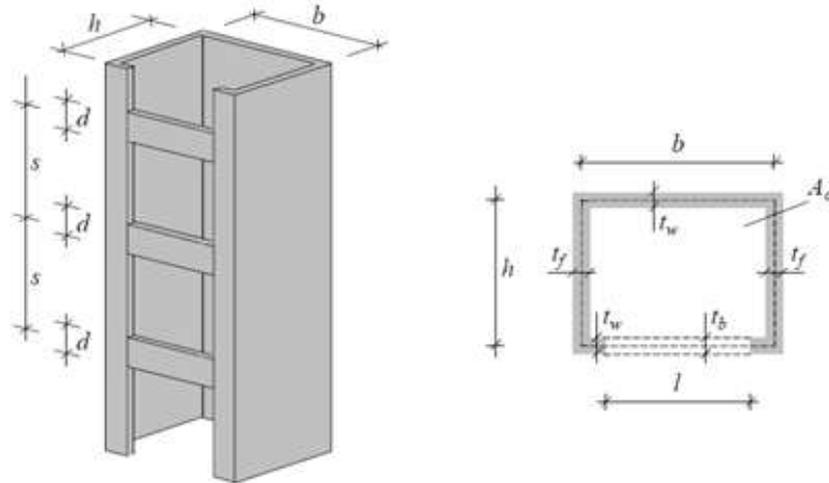


Figura 46. Núcleo parcialmente cerrado por las losas y/o vigas (Zalka, 2020).

Sin embargo, investigaciones numéricas muestran que cuando la profundidad de la viga de conexión (d) es relativamente grande, se tiende a sobreestimar el efecto de las vigas de conexión y puede dar como resultado un valor para la rigidez torsional que es mayor que la de un núcleo completamente cerrado, lo cual claramente es imposible.

Teniendo en cuenta esta observación, Zalka (2020) propone utilizar como una aproximación conservadora la siguiente ecuación:

$$\bar{J} = \frac{4h^2b^2}{\frac{2b-1}{t_w} + \frac{l}{t_w^*} + \frac{2h}{t_f}} \quad (163)$$

Donde:

$$t_w^* = \frac{d}{s} t_b \quad (164)$$

La observación anterior se muestra en el gráfico para valores de $b = h = 5m$, $s = 3m$, $L = 1.80m$, $t_w = t_f = 0.25m$, $t_b = 0.20m$, $E = 23000 \frac{MN}{m^2}$ y $G = 9580 \frac{MN}{m^2}$. Como se puede apreciar la fórmula propuesta por Vlasov sobreestima la rigidez torsional para valores relativamente grandes de d/s . En la práctica de la ingeniería estructural sobreestimar la rigidez torsional puede dar una falsa sensación de seguridad en el ingeniero. No obstante, la fórmula de Vlasov parece ser más precisa que la fórmula propuesta por Zalka en una etapa inicial ($d/s < 0.3$), pero luego la fórmula de Vlasov empieza a sobreestimar la rigidez torsional medianamente y peligrosamente.

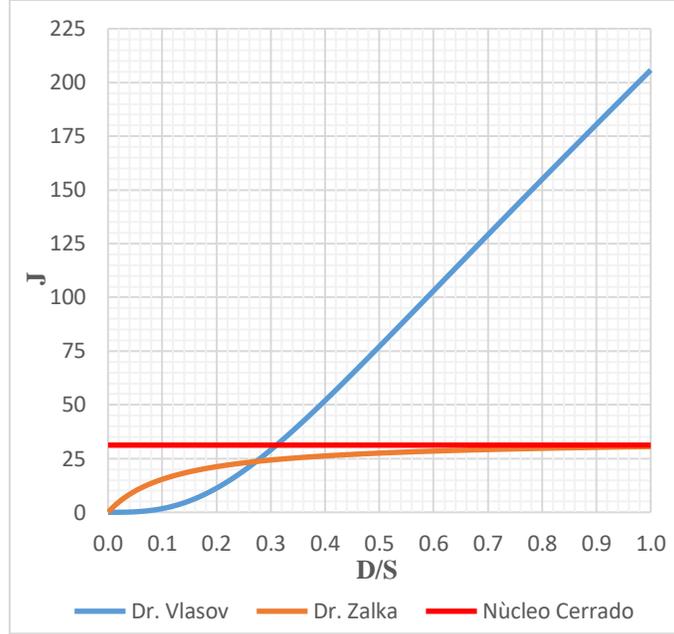


Figura 47. Comparación del parámetro torsional J.

Asumiendo una carga torsional general (Miranda, 1999):

$$M_{(x)} = \frac{M_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a\frac{x}{H}}\right) \rightarrow M_{(z)} = \frac{M_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a+az}) \quad (165)$$

Reemplazándolo en la ecuación diferencial:

$$\varphi_{(z)}'''' - \beta^2 \varphi_{(z)}'' = \lambda(1 - e^{-a+az}) \quad (166)$$

Donde:

$$\beta = H \sqrt{\frac{GJ^*}{EI_w}}, \lambda = \frac{M_{max}H^4}{EI_w(1 - e^{-a})} \quad (167)$$

Si se cambia las rigideces torsionales EI_w y GJ^* por sus equivalentes laterales K_b y K_s respectivamente, resulta que las ecuaciones del CTB traslacional y torsional son idénticos; es decir, las mismas conclusiones obtenidas para la viga CTB sometida a una carga lateral general son aplicables para la viga CTB sometida a una carga torsional general.

$$\varphi_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cosh(\beta z) + C_3 \sinh(\beta z) - \frac{\lambda}{2\beta^2} z^2 - \frac{\lambda}{a^2(a^2 - \beta^2)} e^{-a+az} \quad (168)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left[\frac{1}{2\beta^2} + \frac{1}{a^2(a^2 - \beta^2)} \right] - (C_1 + C_2 \cosh \beta + C_3 \sinh \beta) \\ C_1 = -\lambda \left(\frac{e^{-a}}{a\beta^2} \right) \\ C_2 = \frac{\lambda}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{e^{-a}}{a^2 - \beta^2} \right) \\ C_3 = \frac{1}{\beta \cosh \beta} \left\{ \lambda \left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{a(a^2 - \beta^2)} \right] - (C_1 + C_2 \beta \sinh \beta) \right\} \end{array} \right. \quad (169)$$

Para el caso de una carga torsional uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), la expresión de $\varphi_{(z)}$ resulta:

$$\varphi_{(z)} = \frac{M_{max}H^2}{GJ^*} \left(\frac{1 - z^2}{2} \right) + \frac{M_{max}H^4}{EI_w} \left\{ \frac{\beta [\sinh(\beta z) - \sinh \beta] - 1 + \sinh(\beta - \beta z)}{\beta^4 \cosh \beta} \right\} \quad (170)$$

Esta expresión de la deflexión muestra claramente cómo interactúan los contribuyentes a flexión y a corte produciendo una interacción entre ellos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(corte)} = \frac{M_{max}H^2}{GJ^*} \left(\frac{1 - z^2}{2} \right) \\ \varphi_{(interacción)} = \frac{M_{max}H^4}{EI_w} \left\{ \frac{\beta [\sinh(\beta z) - \sinh \beta] - 1 + \sinh(\beta - \beta z)}{\beta^4 \cosh \beta} \right\} \end{array} \right. \quad (171)$$

Evaluando la deflexión máxima cuando $z = 0$:

$$\varphi_{(z)} = \frac{M_{max}H^2}{2GJ^*} + \frac{M_{max}H^4}{EI_w} \left[\frac{(1 - \beta) \sinh \beta - 1}{\beta^4 \cosh \beta} \right] \quad (172)$$

4.1.5.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$EI_w \varphi_{(x)}'''' - GJ^* \varphi_{(x)}'' = 0 \quad (173)$$

La expresión para $\varphi_{(z)}$ y $\varphi'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} \varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\beta_\varphi^* z) + C_3 \sinh(\beta_\varphi^* z) \\ \varphi'(z) = C_1 + C_2 \alpha_\varphi^* \sin(\beta_\varphi^* z) + C_3 \beta_\varphi^* \cosh(\beta_\varphi^* z) \end{cases} \quad (174)$$

Donde:

$$\beta_\varphi^* = \sqrt{\frac{GJ^*}{EI_w}} \quad (175)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = EI_w \varphi''_{(z)} = \beta_\varphi^{*2} \cosh(\beta_\varphi^* z) EI_w C_2 + \beta_\varphi^{*2} \sinh(\beta_\varphi^* z) EI_w C_3 \\ V_{(z)} = EI_w \varphi'''_{(z)} - GJ^* \varphi'_{(x)} = (-\beta_\varphi^{*2} EI_w) C_1 \end{cases} \quad (176)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i(z_i) \\ \varphi'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (177)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cosh(\beta_\varphi^* z) & \sinh(\beta_\varphi^* z) \\ 0 & 1 & \beta_\varphi^* \sin(\beta_\varphi^* z) & \beta_\varphi^* \cosh(\beta_\varphi^* z) \\ 0 & 0 & \beta_\varphi^{*2} \cosh(\beta_\varphi^* z) EI_w & \beta_\varphi^{*2} \sinh(\beta_\varphi^* z) EI_w \\ 0 & -\beta_\varphi^{*2} EI_w & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (178)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (179)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{t} \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \mathbf{f} \quad (180)$$

Donde:

$$\left\{ \mathbf{t} = \prod_{k=1}^n T_k(0), \mathbf{f} = - \sum_{s=0}^n \left(\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right) F_s - F_n \right\} \quad (181)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(1)} = 0 \\ \varphi'_{(1)} = 0 \\ \varphi''_{(0)} = 0 \\ EI_w \varphi'''_{(0)} - GJ^* \varphi'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) = 0 \\ \varphi'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (182)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (183)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (184)$$

Sustituyendo la fuerza interna se obtiene la rotación y su pendiente en la parte superior de la viga:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (185)$$

4.1.6 Viga sándwich de dos campos (SWB)

Se desarrolla la viga sándwich SWB, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de una viga Timoshenko (TB) y una viga de flexión (EBB) con una deformación por flexión global y corte; y flexión local respectivamente. Se supone que las vigas están acopladas en paralelo por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman.

Este modelo es adecuado para modelar a pórticos y muros de corte acoplados. El modelo de viga SWB toma en cuenta dos campos cinemáticos: un movimiento transversal (u) y un movimiento rotacional (θ); con rigideces K_{b1} , K_{s1} y K_{b2} como rigidez a la flexión global, rigidez al corte global y rigidez a la flexión local, respectivamente.

La gran aceptación que la literatura ha aplicado a la viga SWB para analizar estructuras como pórticos, muros de corte acoplados e incluso edificios en forma global, se debe a su capacidad de describir correctamente las tres deformaciones fundamentales de toda estructura; esto es: deformación por corte, deformación por flexión global, y deformación por flexión local.

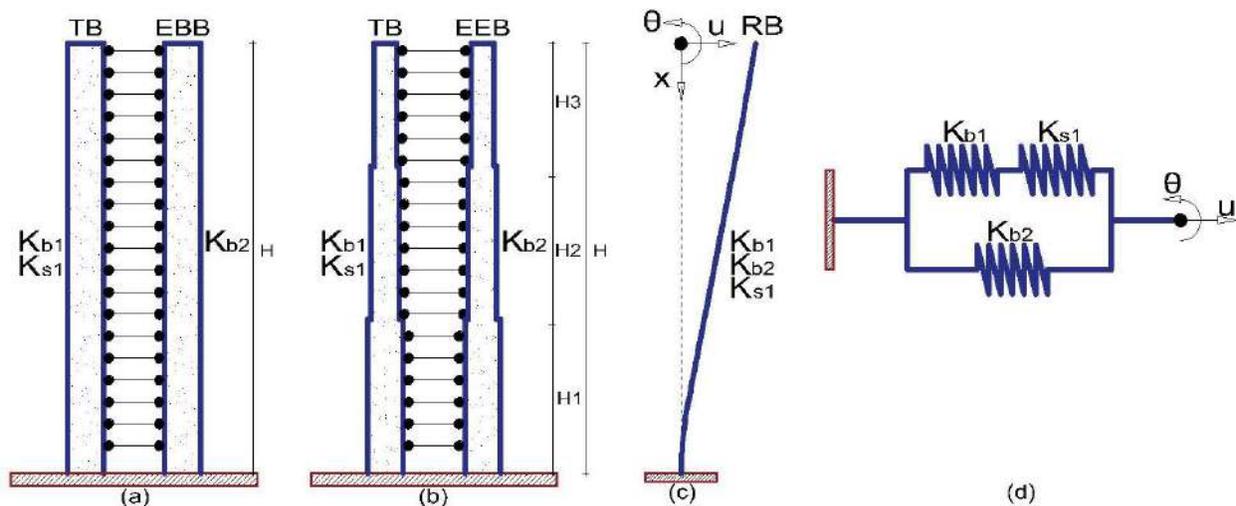


Figura 48. Viga Sándwich (SWB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez SWB.

4.1.6.1 Caso 1

La energía potencial del modelo SWB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'(x)^2 + K_{s1} [\theta(x) - u'(x)]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{b2} u''(x)^2 dx \quad (186)$$

Las rigideces características se evalúan según el elemento estructural:

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{w,i} c_i^2, K_{b2} = r \sum_{i=1}^w EI_{w,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_w^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_{b,i} [(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3} h \left(1 + 12 \frac{kEI_{b,i}}{l^{*2} GA_{b,i}} \right)}, K_w = \sum_{i=1}^w \frac{12EI_{w,i}}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (187)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = r \sum_{i=1}^c EI_{c,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{lh}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (188)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (189)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga SWB de dos campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'(x)^2 + K_{s1} [\theta(x) - u'(x)]^2 + K_{b2} u''(x)^2 \right\} dx - \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (190)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = \int_0^H \{ & K_{b1}\theta'_{(x)}\delta\theta'_{(x)} + K_{s1}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}]\delta\theta_{(x)} - K_{s1}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}]\delta u'_{(x)} \\ & + K_{b2}u''_{(x)}\delta u''_{(x)}\} dx - \int_0^H f(x)\delta u_{(x)} dx - \int_0^H u_{(x)}\delta f(x) dx \end{aligned} \quad (191)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & [K_{b1}\theta'_{(x)}\delta\theta_{(x)}]_0^H - \{K_{s1}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + K_{b2}u'''_{(x)}\}\delta u_{(x)}_0^H + [K_{b2}u''_{(x)}\delta u'_{(x)}]_0^H \\ & + \int_0^H \{K_{s1}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1}\theta''_{(x)}\}\delta\theta_{(x)} dx \\ & + \int_0^H \{K_{s1}[\theta'_{(x)} - u''_{(x)}] + K_{b2}u''''_{(x)} - f_{(x)}\}\delta u_{(x)} dx - \int_0^H u_{(x)}\delta f(x) dx \end{aligned} \quad (192)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s1}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1}\theta''_{(x)} = 0 \\ K_{s1}[\theta'_{(x)} - u''_{(x)}] + K_{b2}u''''_{(x)} - f_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (193)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{s1}[\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + K_{b2}u''''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (194)$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{s1}D & K_{s1} - K_{b1}D^2 \\ K_{s1}D^2 - K_{b2}D^4 & K_{s1}D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{(x)} \end{Bmatrix} \quad (195)$$

Es decir;

$$\begin{Bmatrix} u''''''_{(x)} - \left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} + \frac{K_{s1}}{K_{b2}}\right)u''''_{(x)} \\ \theta''''''_{(x)} - \left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} + \frac{K_{s1}}{K_{b2}}\right)\theta''''_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K_{b2}}\left[f''_{(x)} - \frac{K_{s1}}{K_{b1}}f_{(x)}\right] \\ -\frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}}f'_{(x)} \end{Bmatrix} \quad (196)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u_{(z)}'''' - \left[\left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} + \frac{K_{s1}}{K_{b2}} \right) H^2 \right] u_{(z)}'''' = \frac{H^4}{K_{b2}} \left[f_{(z)}'' - H^2 \frac{K_{s1}}{K_{b1}} f_{(z)} \right] \quad (197)$$

Definiendo tres parámetros:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{W_{max} H^4}{K_{b2} (1 - e^{-a})} \right\} \quad (198)$$

Reemplazando los dos primeros parámetros:

$$u_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'''' = \frac{H^4}{K_{b2}} \left[f_{(z)}'' - \alpha^2 (\kappa^2 - 1) f_{(z)} \right] \quad (199)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{x}{H}} \right) \rightarrow f_{(z)} = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + az} \right) \quad (200)$$

Reemplazando la carga lateral y el tercer parámetro:

$$u_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'''' = -\lambda \alpha^2 (\kappa^2 - 1) + \lambda [\alpha^2 (\kappa^2 - 1) - a^2] e^{-a + az} \quad (201)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + \frac{\lambda(\kappa^2 - 1)}{24\kappa^2} z^4 + \frac{\lambda[\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2]}{a^4[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a + az} \quad (202)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0, u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(1)} = \lambda \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \\ u'''_{(0)} = \lambda (1 - e^{-a}) \\ u''''_{(1)} = \lambda \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} \right) - a \right] \end{array} \right\} \quad (203)$$

Las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ C_0 = -(C_1 + C_2 + C_3) - C_4 \operatorname{sech}(\alpha\kappa) - \frac{\lambda\alpha^2}{(\alpha\kappa)^5} \tanh(\alpha\kappa) \left[\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) + \frac{a}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \right\} \\ -\lambda \left\{ \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2}{a^4[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_1 = -(2C_2 + 3C_3) - \frac{\lambda\alpha^2}{(\alpha\kappa)^4} \left[\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) + \frac{a}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] - \lambda \left\{ \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2}{a^3[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_2 = -C_4 \frac{(\alpha\kappa)^2}{2} + \frac{\lambda e^{-a}}{2a^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \\ C_3 = \frac{\lambda e^{-a}}{6a} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ C_4 = \frac{\lambda}{(\alpha\kappa)^4} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{e^{-a}\alpha^2}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \\ C_5 = -C_4 \tanh(\alpha\kappa) + \frac{\lambda\alpha^2}{(\alpha\kappa)^5} \operatorname{sech}(\alpha\kappa) \left[\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) + \frac{a}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \end{array} \right. \quad (204)$$

El desplazamiento máximo se obtiene evaluando en 0 a $u_{(z)}$:

$$u_{(0)} = C_0 + C_4 + \frac{\lambda[\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2]}{a^4[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a} \quad (205)$$

La deriva de piso puede obtenerse derivando una vez $u_{(z)}$:

$$\begin{aligned} \Delta_s = & C_1 + 2C_2z + 3C_3z^2 + C_4(\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa z) + C_5(\alpha\kappa) \cosh(\alpha\kappa z) + \frac{\lambda(\kappa^2 - 1)}{6\kappa^2} z^3 \\ & + \frac{\lambda[\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2]}{a^3[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a+az} \end{aligned} \quad (206)$$

La deriva global se obtiene como el cociente entre desplazamiento máximo y la altura total:

$$\Delta_g = C_0 + C_4 + \frac{\lambda[\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2]}{a^4[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a} \quad (207)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), las constantes resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left\{ -\frac{1}{\alpha^3 \kappa^5 \cosh(\alpha \kappa)} \left[\frac{1}{\alpha \kappa} + \sinh(\alpha \kappa) \right] + \frac{1}{2\alpha^2 \kappa^4} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right\} \\ C_1 = -\lambda \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \\ C_2 = -\lambda \frac{1}{2\alpha^2 \kappa^4} \\ C_3 = 0 \\ C_4 = \lambda \frac{1}{\alpha^4 \kappa^6} \\ C_5 = \lambda \frac{1}{\alpha^3 \kappa^5 \cosh(\alpha \kappa)} \left[1 - \frac{\sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)} \right] \end{array} \right. \quad (208)$$

Reemplazando las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \lambda \left(\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \right) \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2\kappa^4 \alpha^2} \lambda (1 - z^2) \\ -\frac{1}{\kappa^2} \lambda \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) - (\alpha \kappa) [\sinh(\alpha \kappa z) - \sinh(\alpha \kappa)]}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \end{array} \right\} \\ u_{(0)} = \lambda \left(\frac{\kappa^2 - 1}{8\kappa^2} \right) + \frac{1}{2\kappa^4 \alpha^2} \lambda - \frac{1}{\kappa^2} \lambda \left[\frac{1 - \cosh(\alpha \kappa) + (\alpha \kappa) \sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right] \\ \Delta_p = \lambda \left(\frac{\kappa^2 - 1}{6\kappa^2} \right) (z^3 - 1) - \frac{1}{\kappa^4 \alpha^2} \lambda z + \frac{1}{\kappa^2} \lambda \left[\frac{\sinh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) + (\alpha \kappa) \cosh(\alpha \kappa z)}{(\alpha \kappa)^3 \cosh(\alpha \kappa)} \right] \\ \Delta_g = \frac{1}{H} \left\{ \lambda \left(\frac{\kappa^2 - 1}{8\kappa^2} \right) + \frac{1}{2\kappa^4 \alpha^2} \lambda - \frac{1}{\kappa^2} \lambda \left[\frac{1 - \cosh(\alpha \kappa) + (\alpha \kappa) \sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right] \right\} \end{array} \right. \quad (209)$$

Después de algunas manipulaciones simples, los parámetros de control resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = \frac{W_{max} H^4}{K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2k^4} \frac{W_{max} H^2}{K_{s1}} (1 - z^2) \\ -\frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max} H^4}{K_{b2}} \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) - (\alpha \kappa) [\sinh(\alpha \kappa z) - \sinh(\alpha \kappa)]}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \end{array} \right\} \\ u_{(0)} = \frac{W_{max} H^4}{8(K_{b1} + K_{b2})} + \frac{1}{2k^4} \frac{W_{max} H^2}{K_{s1}} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max} H^4}{K_{b2}} \left[\frac{1 - \cosh(\alpha \kappa) + (\alpha \kappa) \sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right] \\ \Delta_p = \frac{W_{max} H^4}{6(K_{b1} + K_{b2})} (z^3 - 1) - \frac{1}{k^4} \frac{W_{max} H^2}{K_{s1}} z + \frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max} H^4}{K_{b2}} \left\{ \frac{\sinh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) + (\alpha \kappa) [\cosh(\alpha \kappa z)]}{(\alpha \kappa)^3 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \\ \Delta_g = \frac{W_{max} H^3}{8(K_{b1} + K_{b2})} + \frac{1}{2k^4} \frac{W_{max} H}{K_{s1}} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max} H^3}{K_{b2}} \left[\frac{1 - \cosh(\alpha \kappa) + (\alpha \kappa) \sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right] \end{array} \right. \quad (210)$$

Es importante observar que en la ecuación de la deflexión por corte, el término $1/k^4$ generalmente tiende a la unidad. Se observa que la ecuación de la deflexión lateral obtenida es idéntica a la

ecuación propuesta por Nollet (1979) y Zalka (2020). Esta expresión muestra claramente cómo interactúan los contribuyentes a flexión y a corte; produciendo una interacción entre ellos.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(flexión)} = \frac{W_{max}H^4}{K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) \\ u_{(corte)} = \frac{1}{2k^4} \frac{W_{max}H^2}{K_{s1}} (1 - z^2) \\ u_{(interacción)} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max}H^4}{K_{b2}} \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha\kappa z - \alpha\kappa) - (\alpha\kappa)[\sinh(\alpha\kappa z) - \sinh(\alpha\kappa)]}{(\alpha\kappa)^4 \cosh(\alpha\kappa)} \right\} \end{array} \right. \quad (211)$$

Y para la deflexión máxima:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(flexión)} = \frac{W_{max}H^4}{8(K_{b1} + K_{b2})} \\ u_{(corte)} = \frac{1}{k^4} \frac{W_{max}H^2}{2K_{s1}} \\ u_{(interacción)} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max}H^4}{K_{b2}} \left[\frac{1 - \cosh(\alpha\kappa) + (\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^4 \cosh(\alpha\kappa)} \right] \end{array} \right. \quad (212)$$

Consideraremos algunos casos especiales de análisis:

- a) Cuando $\frac{K_{b2}}{K_{b1}} \rightarrow 0$ ($K_{b1} \rightarrow \infty$, $K_{b2} \rightarrow 0$). Esta situación se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados de pocos pisos con múltiples vanos, donde la flexión global es más grande en magnitud en comparación con la flexión local. Evaluando el límite de κ :

$$\kappa = \lim_{\frac{K_{b2}}{K_{b1}} \rightarrow 0} \kappa = \lim_{\frac{K_{b2}}{K_{b1}} \rightarrow 0} \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \leftrightarrow \kappa = 1 \quad (213)$$

Después de integrar dos veces, evaluar dos condiciones de contorno y aplicar límites:

$$u''_{(z)} = -\frac{wH^2}{K_s} \quad (214)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura el corte es dominante y es idéntica a la ecuación diferencial de una viga de corte (SB):

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_{s1}} (1 - z^2) \rightarrow u_{(0)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_{s1}} \quad (215)$$

- b) Cuando $h_v \rightarrow 0$. Esta situación se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados donde las vigas de conexión tienen poco peralte y como consecuencia poca rigidez a la flexión. En este caso la función de las vigas de conexión es fundamentalmente transmitir las cargas horizontales y forzar a que las columnas y/o los muros de corte trabajen juntas. Evaluando el límite de K_s y α :

$$K_s = \lim_{K_v \rightarrow 0} \frac{K_v K_c}{K_c + K_v} = \lim_{K_v \rightarrow 0} K_v \frac{K_c}{K_c + K_v} = 0$$

$$\alpha = \lim_{h_v \rightarrow 0} \alpha = \lim_{K_v \rightarrow 0} \alpha = \lim_{K_v \rightarrow 0} H \sqrt{\frac{K_s}{K_{b2}}} = 0 \quad (216)$$

Después de integrar dos veces y evaluar dos condiciones de contorno:

$$u_{(z)}'''' = \frac{wH^4}{K_{b2}} \quad (217)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura la flexión local es dominante y es idéntica a la ecuación diferencial de una viga de flexión (EBB):

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_{b2}} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) \rightarrow u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{8K_{b2}} \quad (218)$$

- c) Cuando $h_v \rightarrow \infty$. Esta situación resulta ser un caso teórico con poca aplicación práctica y se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados donde las vigas de conexión tienen un peralte muy grande, como consecuencia la rigidez al corte aumenta y la rigidez a la flexión local disminuye drásticamente debido a que el factor de reducción del cortante tiende a cero. En este caso la función de las vigas de conexión es tratar acoplar totalmente a las columnas y/o los muros de corte para que trabajen como una sola unidad. Evaluando el límite de r y K_s :

$$r = \lim_{K_v \rightarrow \infty} r = \lim_{K_v \rightarrow \infty} \frac{K_c}{K_c + K_v} = \lim_{K_v \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{K_v}{K_c}} = 0 \leftrightarrow r = 0 \leftrightarrow K_{b2} = 0$$

$$K_s = \lim_{K_v \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_c}} = \lim_{K_v \rightarrow \infty} \frac{1}{0 + \frac{1}{K_c}} = K_c \leftrightarrow K_s = K_c \leftrightarrow K_s = \infty \quad (219)$$

Después de integrar dos veces, evaluar dos condiciones de contorno y aplicar límites:

$$u''_{(z)} = \frac{wH^4 z^2}{2(K_{b1} + K_{b2})} \quad (220)$$

Se obtiene:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) \rightarrow u_{(0)} = \frac{W_{max}H^4}{8(K_{b1} + K_{b2})} \quad (221)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura la flexión total (global +local) es dominante y es idéntica a la ecuación diferencial de una viga de flexión (EBB).

- d) Cuando $K_{b1} \rightarrow \infty$. Esta situación se presenta en pórticos y/o muros de corte acoplados donde $A_i \rightarrow \infty$; es decir, donde se descuidan el efecto de las deformaciones axiales. Evaluando el límite de κ :

$$\kappa = \lim_{K_{b1} \rightarrow \infty} \kappa = \lim_{K_{b1} \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \leftrightarrow \kappa = 1 \quad (222)$$

Después de integrar dos veces, evaluar dos condiciones de contorno y aplicar límites:

$$u''''_{(z)} - \alpha^2 u''_{(z)} = \frac{wH^4}{K_{b2}} \quad (223)$$

Esta ecuación muestra que en la estructura la flexión global se desprecia, lo que conduce a que la viga SWB se comporte como una viga CTB de un campo teniendo en cuenta solo el efecto de la flexión local y del corte.

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{K_s} \left(\frac{1 - z^2}{2} \right) + \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left\{ \frac{\alpha [\sinh(\alpha z) - \sinh \alpha] - 1 + \cosh[\alpha(z - 1)]}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right\}$$

$$u_{(0)} = \frac{W_{max}H^2}{2K_s} - \frac{W_{max}H^4}{K_b} \left[\frac{1 + \alpha \sinh \alpha - \cosh \alpha}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right] \quad (224)$$

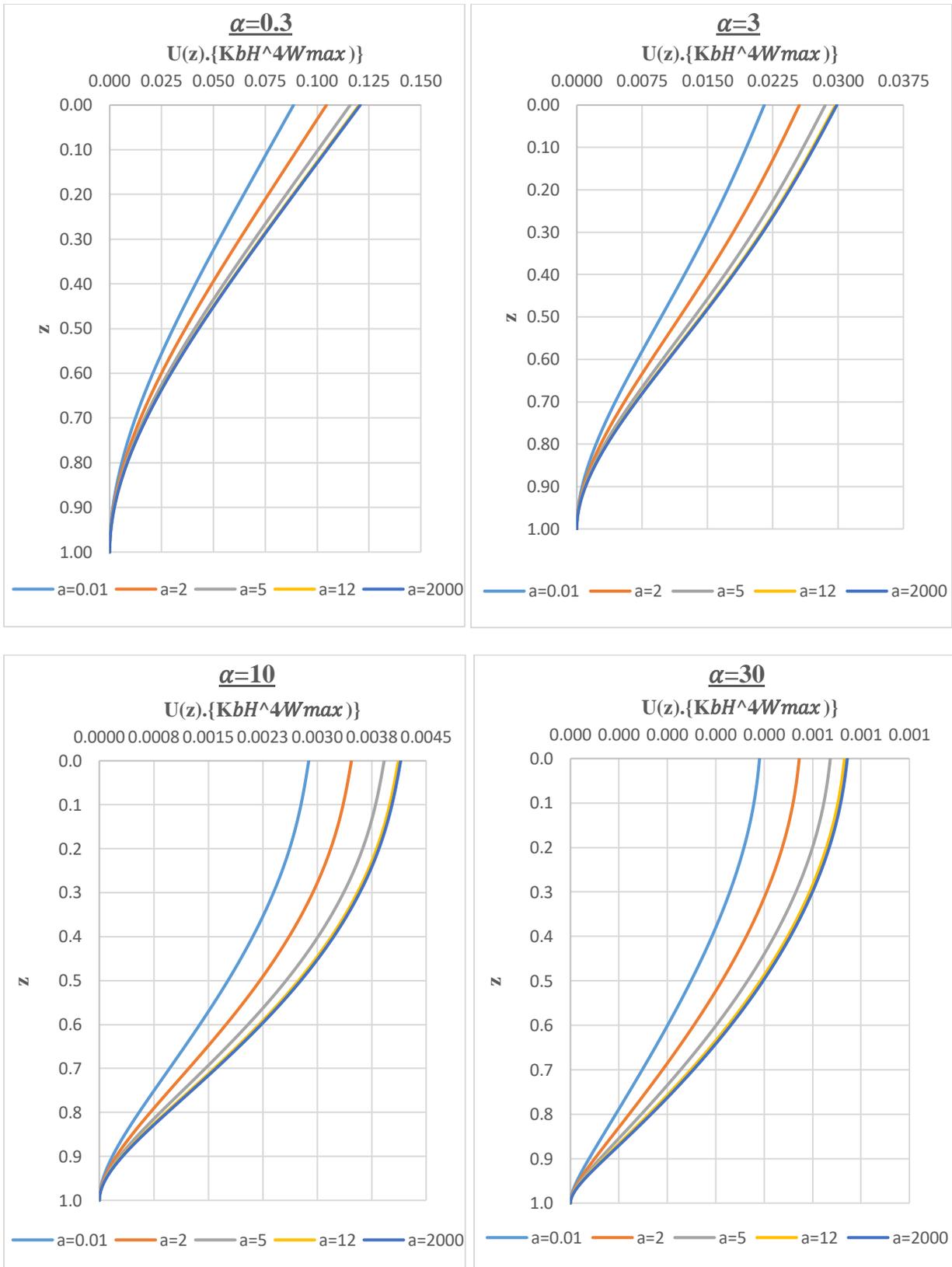


Figura 49. Desplazamiento lateral y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$.

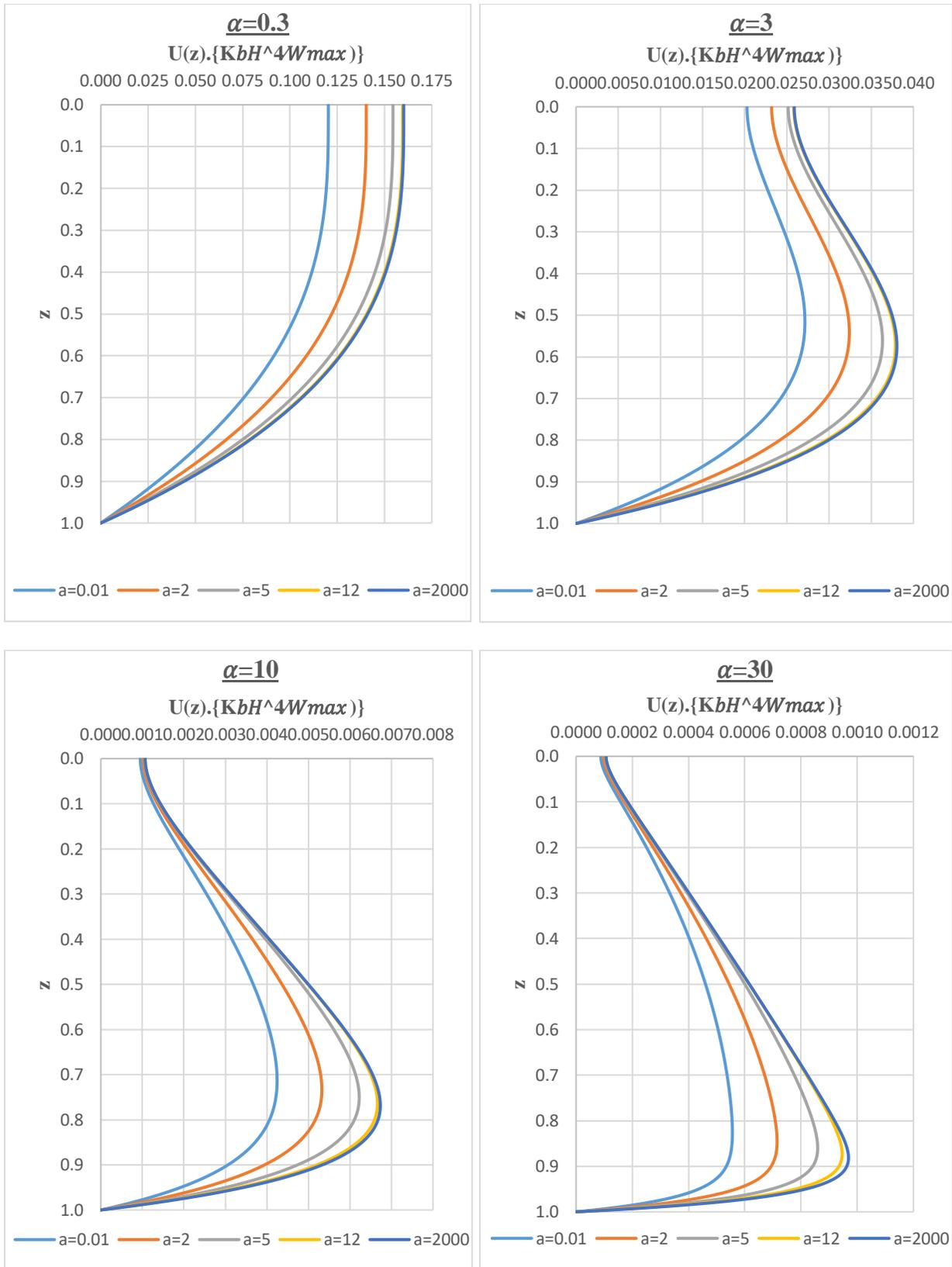


Figura 50. Deriva de entropiso y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$.

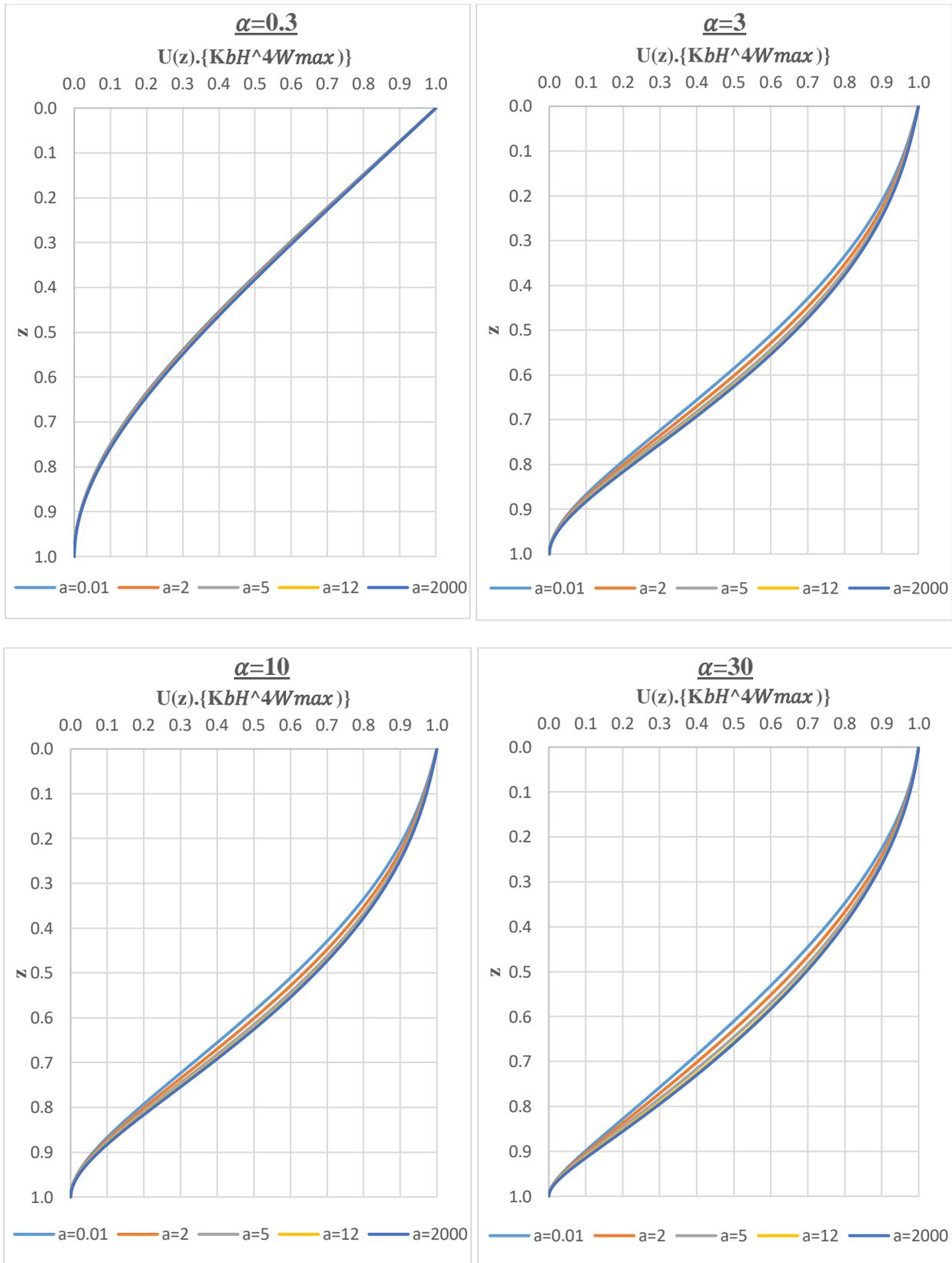


Figura 51. Desplazamiento lateral normalizado y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$.

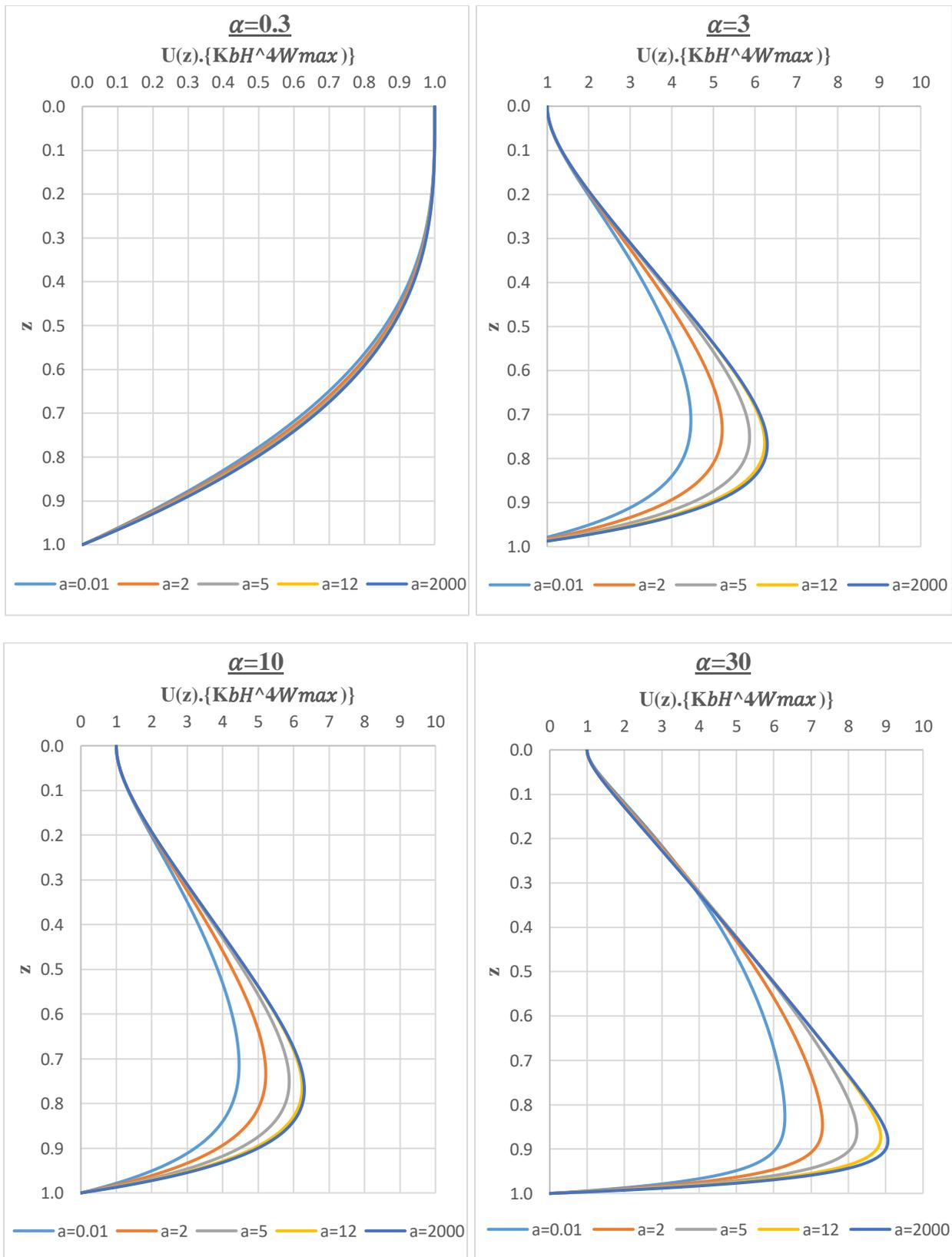


Figura 52. Deriva de entresiso normalizado y efecto del parámetro a para $k = 1.00021$.

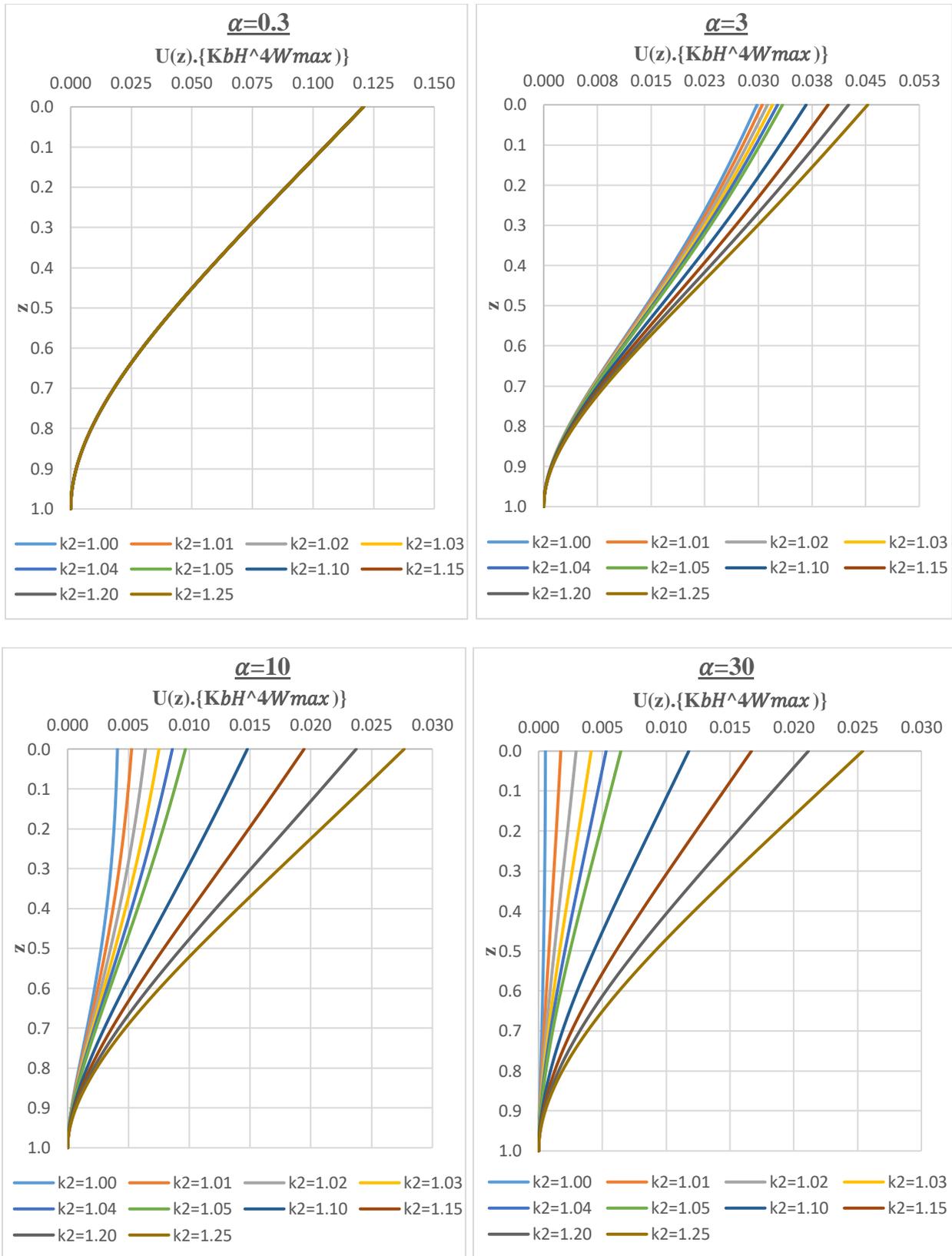


Figura 53. Desplazamiento lateral y efecto del parámetro κ para $a = 2000$.

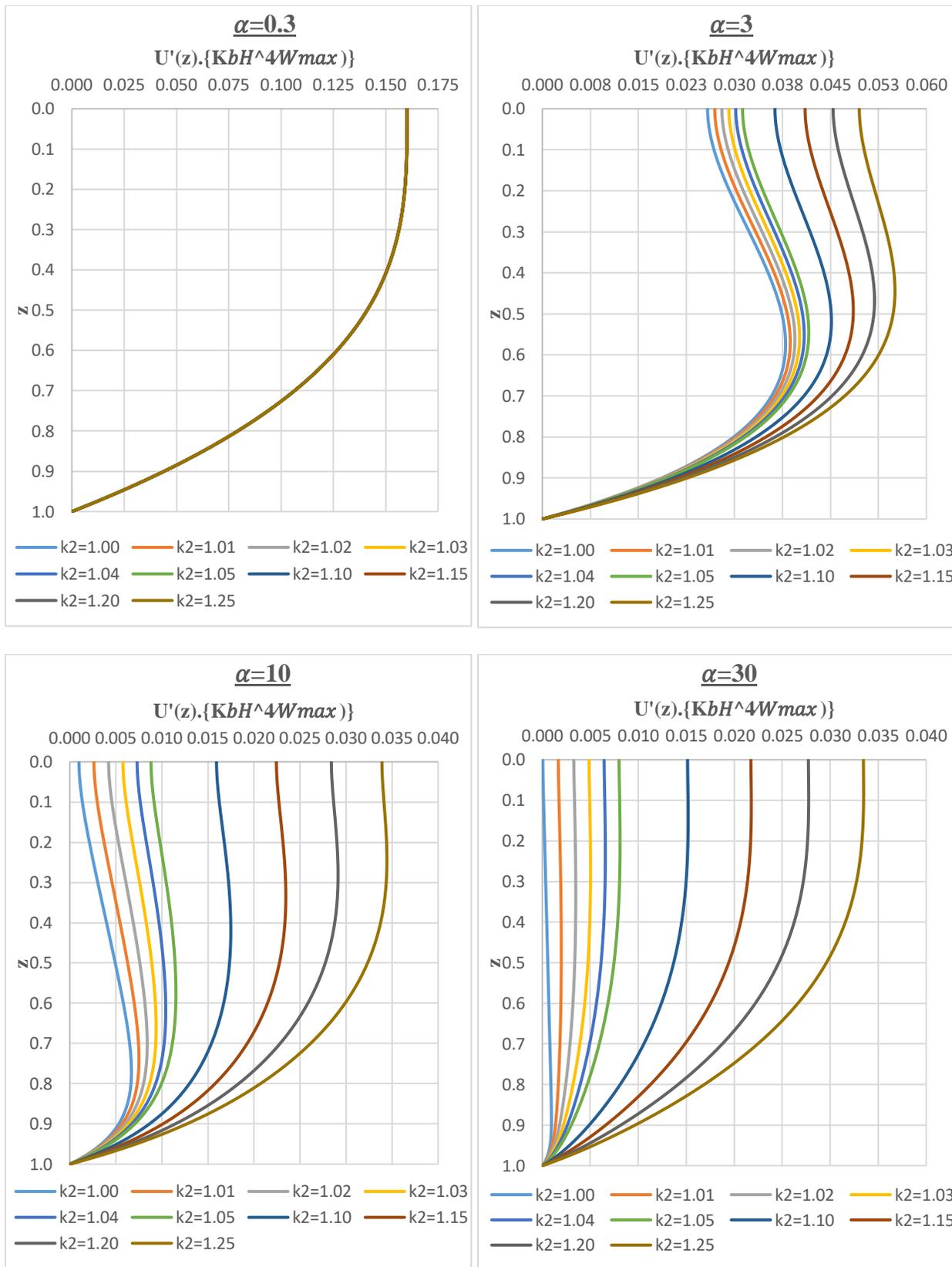


Figura 54. Deriva de entropeso y efecto del parámetro κ para $a = 2000$.

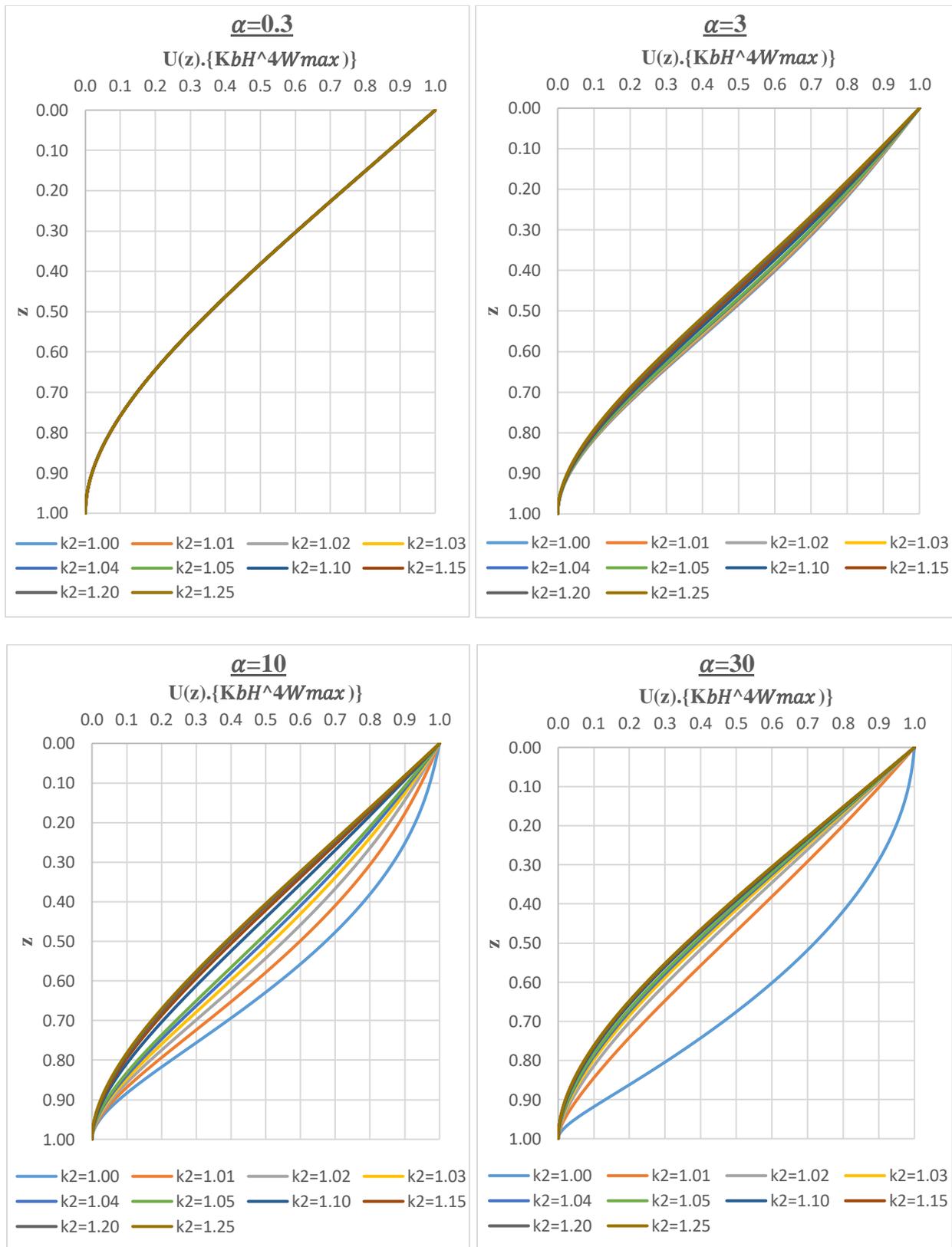


Figura 55. Desplazamiento lateral normalizado y efecto del parámetro κ para $a = 2000$.

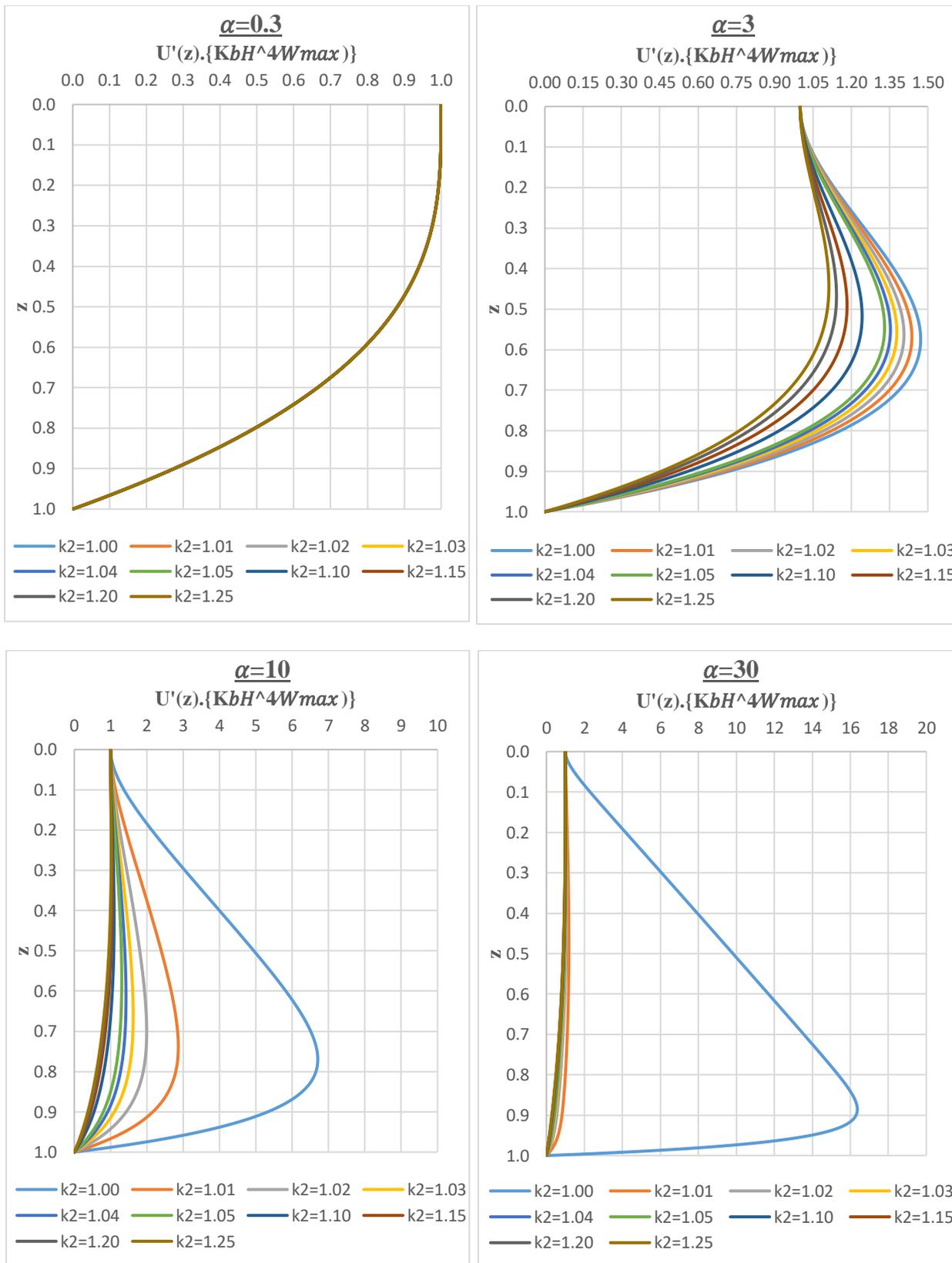


Figura 56. Deriva de entrepiso normalizado y efecto del parámetro κ para $\alpha = 2000$.

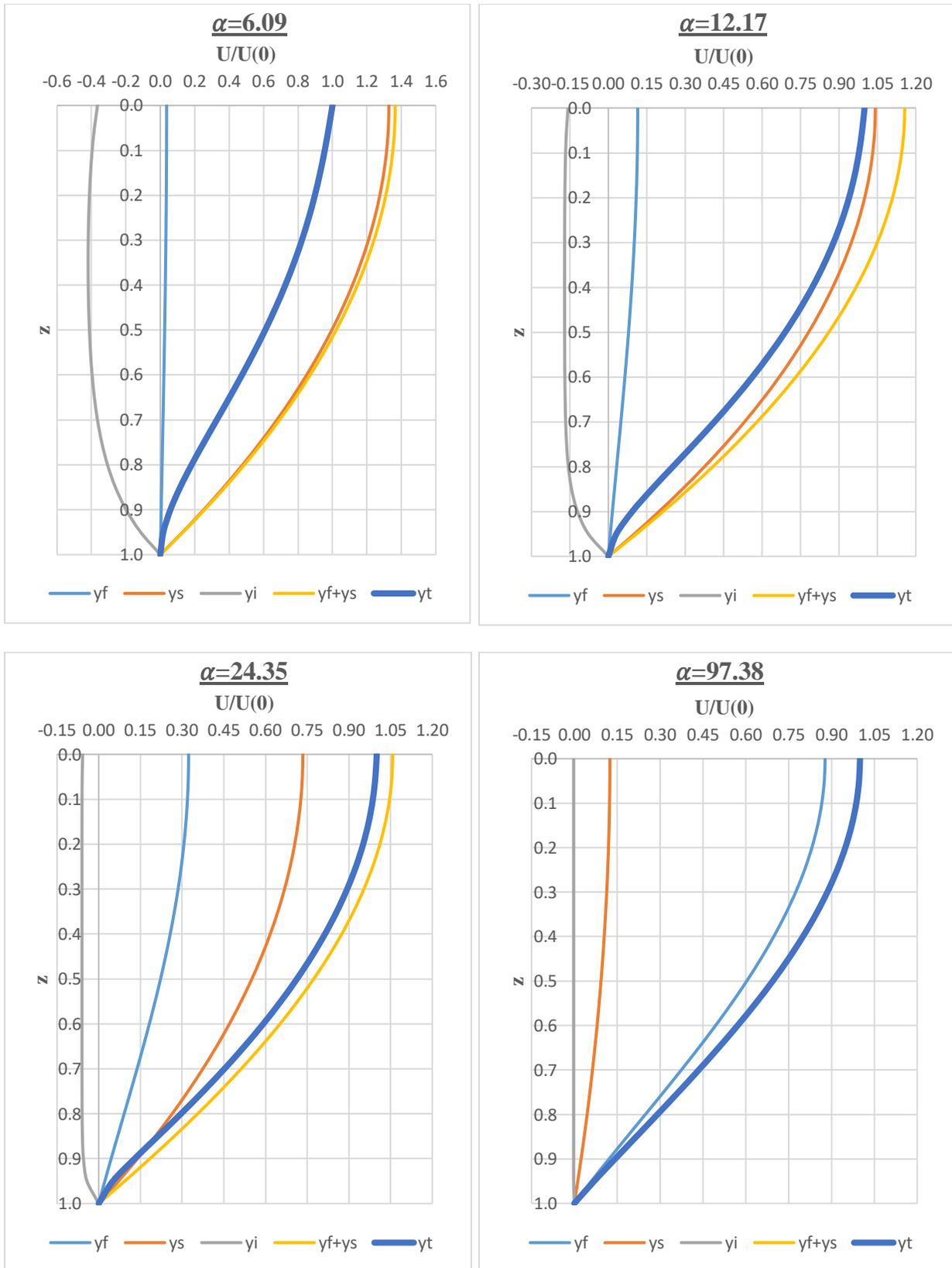


Figura 57. Tipos de desplazamiento (flexión, corte e interacción) para $k = 1.00148$.

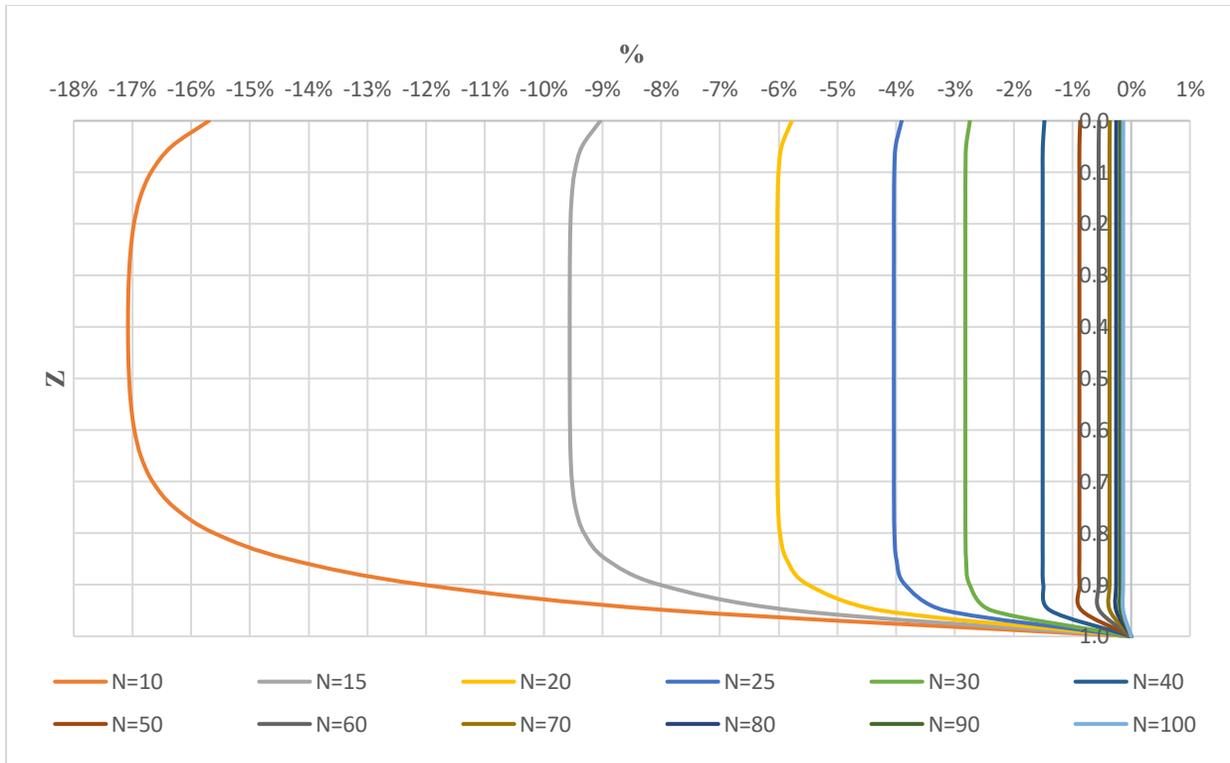


Figura 58. Porcentaje de participación de la deflexión por interacción respecto al desplazamiento total.

Según el análisis de las ecuaciones y de los gráficos:

- El desplazamiento, la deriva de entrepiso y la deriva global resultan de la suma del aporte por flexión (flexión local + flexión global), por corte y por la interacción entre la flexión y el corte.
- La rigidez lateral aumenta debido al efecto de la interacción, concluyendo que la rigidez del sistema es mayor a la suma de las rigideces individuales de la flexión y el corte. El efecto de la interacción es beneficiosa debido a que reduce el desplazamiento total de la estructura.
- El parámetro α condiciona el perfil del desplazamiento lateral y el perfil de deriva de entrepiso; es decir, el parámetro α determina el tipo de comportamiento predominante en la viga. Para un valor de $\alpha = 0.3$, muestra un comportamiento a flexión pura; un valor de $\alpha = 3$, muestra un comportamiento intermedio entre corte y flexión; y un valor de $\alpha = 30$, muestra un comportamiento a que tiende a corte puro.

- A medida que disminuye el valor del parámetro α la influencia del parámetro α en el perfil del desplazamiento lateral normalizado se hace cada vez menor, y para un valor de $\alpha = 0.3$, el perfil del desplazamiento lateral normalizado es prácticamente independiente del parámetro α , como sucede en la viga de flexión.
- El perfil de desplazamiento lateral normalizado y el perfil de deriva de entrepiso normalizado son dependientes del parámetro α . Esta dependencia disminuye al disminuir el valor del parámetro α .
- El perfil de desplazamiento lateral y el perfil de deriva de entrepiso son dependientes del parámetro κ . Esta dependencia disminuye al disminuir el valor del parámetro α .
- Para valores pequeños de α (pocos pisos), respecto al desplazamiento total el aporte de la interacción es importante, el aporte de la flexión es insignificante y el aporte del cortante domina el comportamiento. A medida que el valor de α aumenta; la interacción interacción se hace cada vez más insignificante, el efecto de la flexión va ganando cada vez más importancia, y el efecto del cortante se va reduciendo drásticamente.
- Pareciera que ignorar la interacción es aceptable pues reduce considerablemente los cálculos y conforme α va creciendo es cada vez más insignificante, pero debe tenerse en cuenta que solo es aceptable para valores intermedios a altos de α , para estructuras de pocos pisos ignorar la interacción es muy conservador.
- A medida que el valor de α aumenta, el perfil de la interacción es aproximadamente constante y su aporte se va reduciendo considerablemente.
- El efecto de la interacción es dependiente del tipo de comportamiento dominante. Cuando el comportamiento dominante es prácticamente a corte puro la interacción es considerable, a medida que la flexión empieza a dominar el comportamiento la interacción disminuye hasta llegar a un valor prácticamente insignificante para valores de flexión pura.

Análisis paramétrico

El punto de inflexión en la curva de deflexión del pórtico sujeto a cargas laterales, es un parámetro clave para definir si el comportamiento al corte o a la flexión es el dominante. La porción de la columna equivalente debajo del punto de inflexión representa el comportamiento a la flexión y la

porción superior representa el comportamiento al corte. El comportamiento dominante está definido por los parámetros adimensionales α y k^2 .

El punto de inflexión, que coincide con el nivel de deriva máxima dy/dz , se calcula igualando a cero la curvatura de la deflexión del pórtico. La ubicación del punto de inflexión se encuentra mediante un análisis iterativo, teniendo en cuenta la ecuación:

$$2C_2 + 6C_3z + C_4(\alpha\kappa)^2 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5(\alpha\kappa)^2 \sinh(\alpha\kappa z) + \frac{\lambda(\kappa^2 - 1)}{2\kappa^2} z^2 + \frac{\lambda[\alpha^2(\kappa^2 - 1) - a^2]}{a^2[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a+az} = 0 \quad (225)$$

Para el caso particular de una carga lateral uniformemente distribuida:

$$\frac{\kappa^2 - 1}{2\kappa^2} z^2 - \frac{1}{2\kappa^4\alpha^2} (1 - z^2) + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\cosh(\alpha\kappa z - \alpha\kappa) + (\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa z)}{(\alpha\kappa)^2 \cosh(\alpha\kappa)} = 0 \quad (226)$$

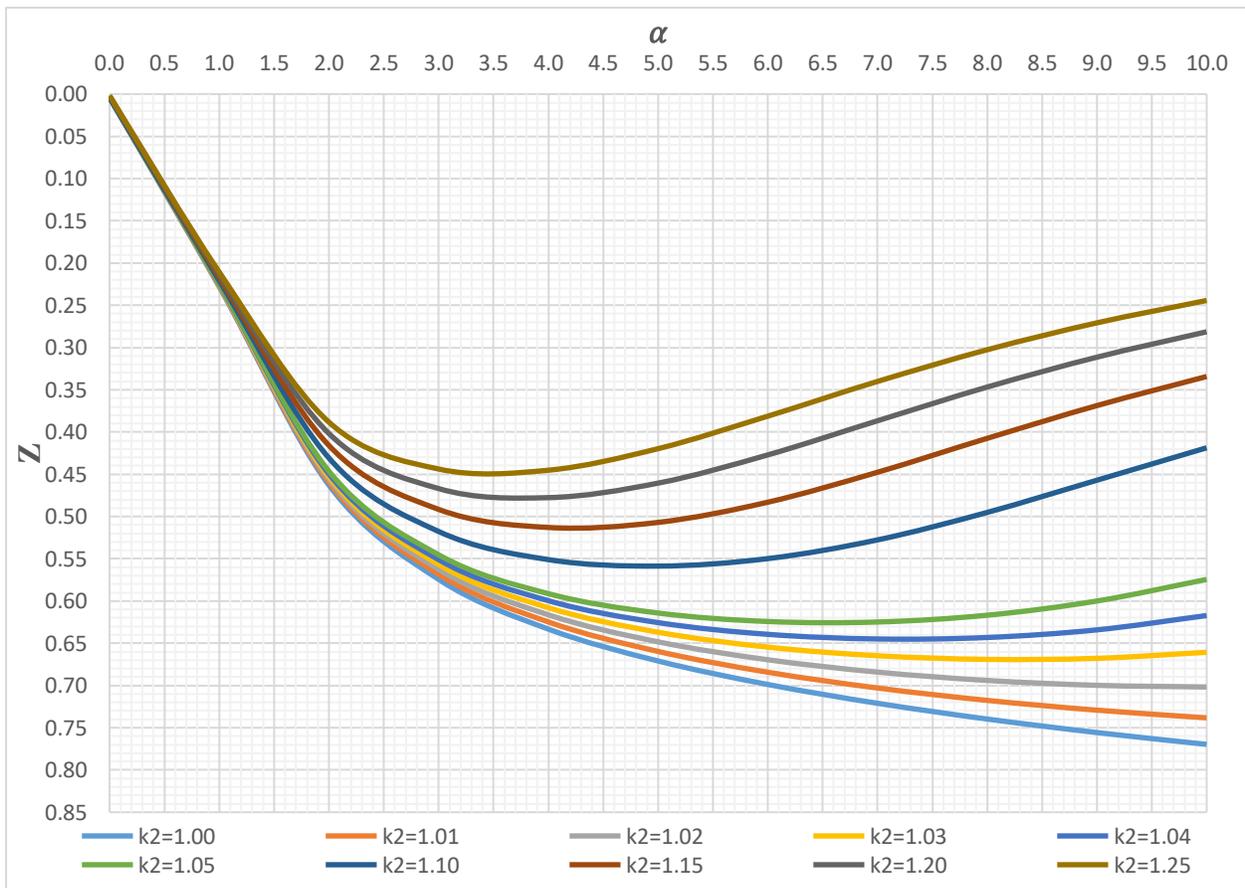


Figura 59. Ubicación del punto de inflexión para $\alpha H < 10$.

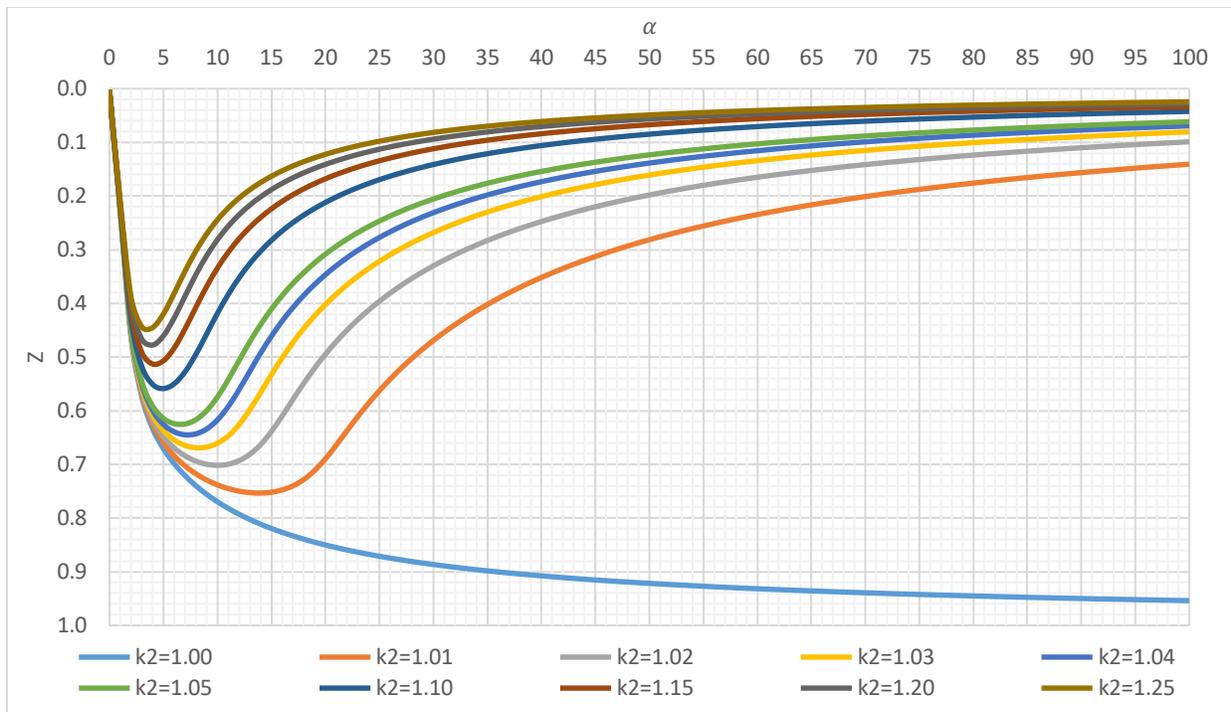


Figura 60. Ubicación del punto de inflexión para $0 < \alpha H < 100$.

Respecto a las curvas de las figuras 59 y 60, el comportamiento de la viga sándwich puede ser dividido en cuatro categorías de acuerdo con el valor de α :

- a) Valores de $\alpha < 1.5$: El punto de inflexión es prácticamente independiente del parámetro k^2 , es decir, las deformaciones axiales de los elementos verticales no influyen en forma significativa en el cálculo del punto de inflexión. Su ubicación se encuentra en forma aproximada en el tercio superior de la altura de la viga y por lo tanto se comporta predominantemente a la flexión.
- b) Valores de $1.5 < \alpha < 10$: Se encuentra influenciado por la rigidez al corte y por las deformaciones axiales de los elementos verticales. Para el rango de 1.5 a 4, el aumento de la rigidez al corte (aumento de α) disminuye el punto de inflexión aumentando la influencia al corte, por el contrario, para el rango de 4 a 10, el aumento de la rigidez al corte y k^2 aumenta el punto de inflexión si existe deformación axial, aumentando la influencia a la flexión de la viga sándwich. Su ubicación se encuentra generalmente entre 0.25 y 0.70 de la altura. Por lo tanto es posible que vigas en este rango representen un comportamiento aparentemente equilibrado, donde la interacción entre el comportamiento a flexión y corte tiene un alto grado de influencia.

- c) Valores de $10 < \alpha < 40$: La ubicación del punto de inflexión aumenta con α y k^2 . Cuando $k^2 = 0$, la viga sándwich se comporta predominantemente al corte, pero a medida que k^2 aumenta, la viga sándwich se comporta predominantemente a la flexión.
- d) Valores de $\alpha > 40$: La ubicación del punto de inflexión se estabiliza y prácticamente ya no es influenciado por el aumento de la rigidez al corte (aumento de αH). La viga sándwich se comporta predominantemente a flexión debido a que el aumento de k^2 (aumento de las deformaciones axiales de las columnas) eleva aún más el punto de inflexión, desde 0.80 para $k^2 = 1.005$ hasta aproximadamente $0.98 \approx 1$ para $k^2 = 1.25$.

4.1.6.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} K_{s1}[\theta_{(z)} - u'_{(z)}] - K_{b1}\theta''_{(z)} = 0 \\ K_{s1}[\theta'_{(z)} - u''_{(z)}] + K_{b2}u''''_{(z)} = 0 \end{cases} \quad (227)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_6 + C_7z + C_8z^2 + C_9 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{10} \sinh(\alpha^* \kappa z) \end{cases} \quad (228)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \right\} \quad (229)$$

Expresando los coeficientes de la función $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{aligned} \theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left[3z^2 + \frac{6}{\alpha^{*2}(\kappa^2 - 1)} \right] C_3 - [\alpha^* \kappa (\kappa^2 - 1) \sinh(\alpha^* \kappa z)] C_4 \\ - [\alpha^* \kappa (\kappa^2 - 1) \cosh(\alpha^* \kappa z)] C_5 \end{aligned} \quad (230)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M_{1(z)} = K_{b1} \theta'_{(z)} = (2K_{b1})C_2 + (6K_{b1}z)C_3 - [(\alpha^* \kappa)^2 (\kappa^2 - 1) \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b1}] C_4 \\ \quad - [(\alpha^* \kappa)^2 (\kappa^2 - 1) \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b1}] C_5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{r(z)} = K_{b2} u''_{(x)} = (2K_{b2})C_2 + (6K_{b2}z)C_3 + [(\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b2}] C_4 \\ \quad + [(\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b2}] C_5 \end{array} \right\} \\ V_{(z)} = K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + K_{b2} u'''_{(x)} = (6K_{b1} + 6K_{b2})C_3 \end{array} \right\} \quad (231)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_1(z_i) \\ M_r(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} \quad (232)$$

Donde:

$K_i(z_i)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 & (\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 + \frac{6}{\alpha^{*2}(\kappa^2 - 1)} & -\alpha^* \kappa (\kappa^2 - 1) \sinh(\alpha^* \kappa z) & -\alpha^* \kappa (\kappa^2 - 1) \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b1} & 6K_{b1}z & -(\alpha^* \kappa)^2 (\kappa^2 - 1) \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} & -(\alpha^* \kappa)^2 (\kappa^2 - 1) \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} \\ 0 & 0 & 2K_{b2} & 6K_{b2}z & (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b2} & (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b2} \\ 0 & 0 & 0 & 6K_{b1} + 6K_{b2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (233)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (234)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (235)$$

Donde:

$$\left\{ t = \prod_{k=1}^n T_k(0), f = - \sum_{s=0}^n \left(\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right) F_s - F_n \right\} \quad (236)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{s1}[\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + K_{b2}u'''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln}(0) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (237)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (238)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (239)$$

Despejando:

$$\begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (240)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento, su derivada y la rotación en la parte superior de la viga:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (241)$$

4.1.7 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1)

Se presenta la viga GSB1, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de dos Vigas Timoshenko (TB) unidas por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman. Esta viga (GSB1), resulta de la generalización de la Viga sándwich (SWB) al incluir un campo cinemático de rotación adicional, donde se tendrá en cuenta la deformación por cortante en elementos más rígidos como los muros de corte. Teniendo en cuenta este nuevo campo cinemático y la introducción de la rigidez al corte; se puede utilizar esta viga (GSB1) como una viga de reemplazo general a todo elemento estructural; como muros de corte, muros de corte acoplados y pórticos.

Bozdoğan (2010) utilizando la viga GSB1 adaptó el método de matriz de transferencia al análisis estático, dinámico y de estabilidad de edificios altos utilizando el método continuo. Moghadasi (2015) utilizando el la viga GSB1 y el método de elementos finitos unidimensionales ofreció soluciones para el análisis estático, el análisis de vibración libre no amortiguado y el análisis amortiguado clásico de edificios altos.

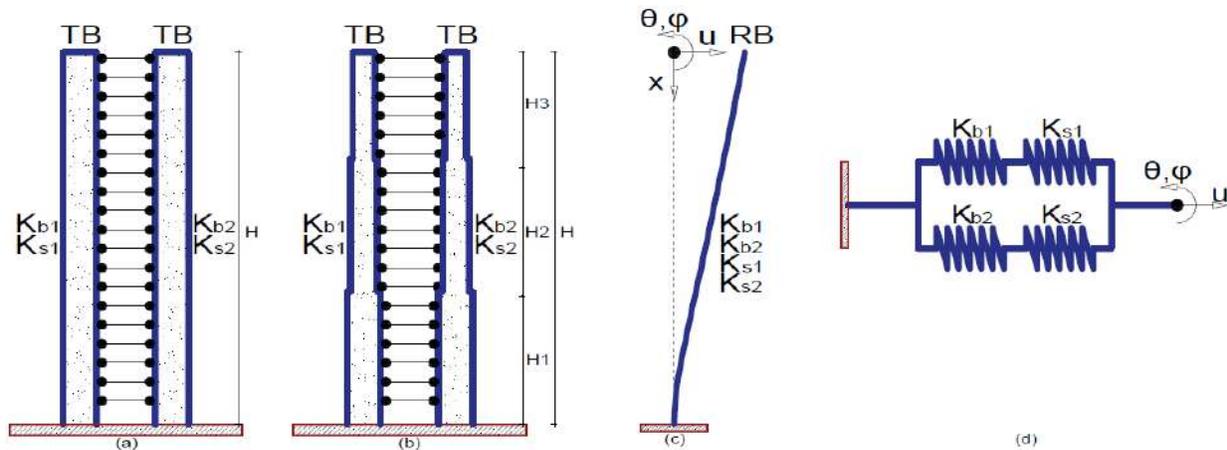


Figura 61. Viga Sándwich Generalizada (GSB1) de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez GSB1.

El modelo tiene tres campos cinemáticos, un movimiento transversal único u y un campo de rotación diferente (θ y ψ) en cada viga timoshenko (TB) despreciando la extensibilidad axial de los TB. En el modelo; K_{b1} y K_{s1} son las rigideces a la flexión y al corte en la TB izquierda, mientras K_{b2} y K_{s2} son las rigideces a la flexión y al corte en la TB derecha. Cabe resaltar que el valor de K_{s1} puede resultar insignificante (para los casos prácticos) respecto a K_{s2} ; debido a que las columnas resultan ser lo suficientemente delgadas.

4.1.7.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GSB1 de tres campos se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'^2 + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \quad (242)$$

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{w,i} c_i^2, K_{b2} = r \sum_{i=1}^w EI_{w,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_w^{-1})^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^w GA_{w,i} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_{b,i} [(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3} h \left(1 + 12 \frac{kEI_{b,i}}{l^{*2} GA_{b,i}} \right)}, K_w = \sum_{i=1}^w \frac{12EI_w}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right. \quad (243)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i} \\ K_{s2} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i}, K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{lh}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right. \quad (244)$$

- Dual (Pórtico + muro de corte):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i} + \sum_{i=1}^w rEI_{w,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^w GA_{w,i} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{lh}; K_c = \sum_{i=1}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2}; r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right. \quad (245)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (246)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB1 de tres campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}]^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx - \int_0^H f_{(x)} u_{(x)} dx \quad (247)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'_{(x)} \delta \psi'_{(x)} + K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}] [\delta u'_{(x)} - \delta \psi_{(x)}] + K_{b2} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} \right. \\ & \left. + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] [\delta u'_{(x)} - \delta \theta_{(x)}] \right\} dx - \int_0^H f(x) \delta u_{(x)} dx \\ & - \int_0^H u_{(x)} \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (248)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta U = & [K_{b1} \psi'_{(x)} \delta \psi_{(x)}]_0^H + \{K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}] + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]\} \delta u_{(x)}_0^H + [K_{b2} \theta'_{(x)} \delta \theta_{(x)}]_0^H \\ & - \int_0^H \{K_{b1} \psi''_{(x)} + K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}]\} \delta \theta_{(x)} \\ & - \int_0^H [K_{s1} (u''_{(x)} - \psi'_{(x)}) + K_{s2} (u''_{(x)} - \theta'_{(x)}) + f(x)] \delta u_{(x)} \\ & - \int_0^H \{K_{b2} \theta''_{(x)} + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]\} \delta \psi_{(x)} - \int_0^H u_{(x)} \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (249)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} \psi''_{(x)} + K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2} \theta''_{(x)} + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ K_{s1} [u''_{(x)} - \psi'_{(x)}] + K_{s2} [u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] + f(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (250)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2}) u'_{(0)} - K_{s1} \psi_{(0)} - K_{s2} \theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (251)$$

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{s1}D & 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{b2}D^2 - K_{s2} & 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})D^2 & -K_{s2}D & -K_{s1}D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{Bmatrix} \quad (252)$$

Es decir;

$$\begin{Bmatrix} u(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u(x) \\ \theta(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \theta(x) \\ \psi(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \psi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{(K_{s1} + K_{s2})} f(x) + \frac{K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) \\ \frac{K_{s1}}{K_{b1}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) \\ \frac{K_{s1}}{K_{b1}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f(x) \end{Bmatrix} \quad (253)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned} u(z) - \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u(z) \\ = -\frac{H^2}{(K_{s1} + K_{s2})} f(z) + \frac{K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^4 f(z) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^6 f(z) \end{aligned} \quad (254)$$

Definiendo cinco parámetros:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= H \sqrt{\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \eta_\varphi = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}} \\ \lambda &= \frac{W_{max} H^2}{(K_{s1} + K_{s2})(1 - e^{-a})} \end{aligned} \right\} \quad (255)$$

Reemplazando los cuatro primeros parámetros:

$$u(z) - (\alpha\kappa)^2 u(z) = \frac{H^2}{K_{s1} + K_{s2}} [-f(z) + (\eta_\varphi^2 + \eta_\theta^2) f(z) - (\eta_\varphi^2 \eta_\theta^2) f(z)] \quad (256)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a\frac{x}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a+az}) \quad (257)$$

Reemplazando la carga lateral e introduciendo el quinto parámetro:

$$u_{(z)}'''''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'''' = -\eta_\varphi^2 \eta_\theta^2 \lambda + [a^4 - (\eta_\varphi^2 + \eta_\theta^2)a^2 + \eta_\varphi^2 \eta_\theta^2] \lambda e^{-a+az} \quad (258)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6 z^4 + C_7 e^{-a+az} \\ H\psi_{(z)} = C_8 + C_9 z + C_{10} z^2 + C_{11} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{12} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{13} e^{-a+az} \\ H\theta_{(z)} = C_{14} + C_{15} z + C_{16} z^2 + C_{17} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{18} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{19} e^{-a+az} \end{array} \right\} \quad (259)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_6 = \frac{\eta_\varphi^2 \eta_\theta^2}{24(\alpha\kappa)^2} \\ C_7 = \frac{a^4 - (\eta_\varphi^2 + \eta_\theta^2)a^2 + (\eta_\varphi^2 \eta_\theta^2)}{a^4 [a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \end{array} \right\} \quad (260)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} H\psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\varphi^2}\right)C_3 - \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\varphi^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\varphi^2} \sinh(\alpha\kappa z)\right] C_4 \\ + \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\varphi^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\varphi^2} \cosh(\alpha\kappa z)\right] C_5 + \left(4z^3 + \frac{24}{\eta_\varphi^2}\right)C_6 - \left[\frac{a\eta_\varphi^2 e^{-a+az}}{a^2 - \eta_\varphi^2}\right] C_7 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} H\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\theta^2}\right)C_3 - \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \sinh(\alpha\kappa z)\right] C_4 \\ + \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \cosh(\alpha\kappa z)\right] C_5 + \left(4z^3 + \frac{24}{\eta_\theta^2}\right)C_6 - \left[\frac{a\eta_\theta^2 e^{-a+az}}{a^2 - \eta_\theta^2}\right] C_7 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (261)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{S1} + K_{S2})u'_{(0)} - K_{S1}\psi_{(0)} - K_{S2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (262)$$

Las constantes:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{(\alpha\kappa)^2\eta_\phi^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \\ 2 & -\frac{(\alpha\kappa)^2\alpha_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2 - \alpha_\theta^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\frac{\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2} + \frac{a^2\eta_\phi^2 e^{-a}}{a^2 - \eta_\phi^2} [a^4 - (\eta_\phi^2 + \eta_\theta^2)a^2 + (\eta_\phi^2\eta_\theta^2)] \\ -\frac{\eta_\phi^2}{(\alpha\kappa)^2} + \frac{a^2\eta_\theta^2 e^{-a}}{a^2 - \eta_\theta^2} [a^4 - (\eta_\phi^2 + \eta_\theta^2)a^2 + (\eta_\phi^2\eta_\theta^2)] \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 + \frac{6}{\eta_\phi^2} & -\frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2 \cosh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \\ 1 & 3 + \frac{6}{\eta_\theta^2} & -\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2 \cosh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \\ 0 & -6\left(\frac{k_{S1}}{\eta_\phi^2} + \frac{k_{S2}}{\eta_\theta^2}\right) & (\alpha\kappa)^3 \left[\frac{k_{S1}}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} + \frac{k_{S2}}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \right] \end{bmatrix}^{-1} x \\ &\begin{Bmatrix} -2C_2 + \frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2 \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} C_4 - \left(4 + \frac{24}{\eta_\phi^2}\right) C_6 + \frac{a\eta_\phi^2}{a^2 - \eta_\phi^2} C_7 \\ -2C_2 + \frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2 \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} C_4 - \left(4 + \frac{24}{\eta_\theta^2}\right) C_6 + \frac{a\eta_\theta^2}{a^2 - \eta_\theta^2} C_7 \\ -\left(\frac{k_{S1}}{a^2 - \eta_\phi^2} + \frac{k_{S2}}{a^2 - \eta_\theta^2}\right) a^3 e^{-a} C_7 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (263)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), la expresión de $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6 z^4 \\ \left\{ \begin{array}{l} H\psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\phi^2}\right) C_3 - \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \sinh(\alpha\kappa z) \right] C_4 \\ \quad + \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \cosh(\alpha\kappa z) \right] C_5 + \left(4z^3 + \frac{24}{\eta_\phi^2}\right) C_6 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} H\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\theta^2}\right) C_3 - \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \sinh(\alpha\kappa z) \right] C_4 \\ \quad + \left[\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \cosh(\alpha\kappa z) \right] C_5 + \left(4z^3 + \frac{24}{\eta_\theta^2}\right) C_6 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (264)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\eta_\theta^4}{(\alpha\kappa)^2 - \alpha_\theta^2} + \frac{\eta_\phi^4}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \\ \frac{2\eta_\theta^2}{(\alpha\kappa)^2} + \frac{2\eta_\phi^2}{(\alpha\kappa)^2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 + \frac{6}{\eta_\phi^2} & -\frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2 \cosh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} \\ 1 & 3 + \frac{6}{\eta_\theta^2} & -\frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2 \cosh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} \\ 0 & -6\left(\frac{k_{s1}}{\eta_\phi^2} + \frac{k_{s2}}{\eta_\theta^2}\right) & \left[\frac{k_{s1}(\alpha\kappa)^3}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} + \frac{k_{s2}(\alpha\kappa)^3}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2}\right] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2C_2 + \frac{(\alpha\kappa)\eta_\phi^2 \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\phi^2} C_4 - \left(4 + \frac{24}{\eta_\phi^2}\right) C_6 \\ -2C_2 + \frac{(\alpha\kappa)\eta_\theta^2 \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^2 - \eta_\theta^2} C_4 - \left(4 + \frac{24}{\eta_\theta^2}\right) C_6 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ C_0 &= -(C_1 + C_2 + C_3 + C_6) - C_4 \cosh(\alpha\kappa) - C_5 \sinh(\alpha\kappa) \end{aligned} \quad (265)$$

- **Casos especiales**

e) Cuando $\frac{K_{s2}}{K_{s1}} \rightarrow \infty$ ($\frac{K_{s1}}{K_{s2}} \rightarrow 0$). Evaluando el límite de de la ecuación diferencial:

$$u_{(z)}'''''' - \left[\left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} + \frac{K_{s1}}{K_{b2}} \right) H^2 \right] u_{(z)}'''' = \frac{H^4}{K_{b2}} \left[f_{(z)}'' - H^2 \frac{K_{s1}}{K_{b1}} f_{(z)} \right] \quad (266)$$

La ecuación muestra que si en la estructura se considera una rigidez al corte infinito, la viga GSB1 tiene el mismo comportamiento que la viga SWB de dos campos. Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida:

$$\begin{aligned} u_{(z)} &= \frac{W_{max}H^4}{K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2k^4} \frac{W_{max}H^2}{K_{s1}} (1 - z^2) \\ &- \frac{1}{\kappa^2} \frac{W_{max}H^4}{K_{b2}} \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha\kappa z - \alpha\kappa) - (\alpha\kappa)[\sinh(\alpha\kappa z) - \sinh(\alpha\kappa)]}{(\alpha\kappa)^4 \cosh(\alpha\kappa)} \right\} \end{aligned} \quad (267)$$

4.1.7.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1}\psi''_{(x)} + K_{s1}[u'_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2}\theta''_{(x)} + K_{s2}[u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ K_{s1}[u''_{(x)} - \psi'_{(x)}] + K_{s2}[u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] = 0 \end{array} \right\} \quad (268)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \psi_{(z)} = C_6 + C_7z + C_8z^2 + C_9 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{10} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_{11} + C_{12}z + C_{13}z^2 + C_{14}z^3 + C_{15} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{16} \sinh(\alpha^* \kappa z) \end{array} \right\} \quad (269)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \eta_\psi = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}} \\ r_\psi = \frac{(\alpha^* \kappa) \eta_\psi^2}{\eta_\psi^2 - (\alpha^* \kappa)^2}, r_\theta = \frac{(\alpha^* \kappa) \eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - (\alpha^* \kappa)^2}, r = (\alpha^* \kappa)^3 \left[\frac{K_{s1}}{\eta_\psi^2 - (\alpha^* \kappa)^2} + \frac{K_{s2}}{\eta_\theta^2 - (\alpha^* \kappa)^2} \right] \end{array} \right\} \quad (270)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\psi^2}\right)C_3 + r_\psi \sinh(\alpha^* \kappa z) C_4 + r_\psi \cosh(\alpha^* \kappa z) C_5 \\ \theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + \left(3z^2 + \frac{6}{\eta_\theta^2}\right)C_3 + r_\theta \sinh(\alpha^* \kappa z) C_4 + r_\theta \cosh(\alpha^* \kappa z) C_5 \end{array} \right\} \quad (271)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{l(z)} = K_{b1}\psi'_{(x)} = (2K_{b1})C_2 + (6K_{b1}z)C_3 + r_\psi(\alpha^* \kappa)K_{b1} \cosh(\alpha^* \kappa z) C_4 + r_\psi(\alpha^* \kappa)K_{b1} \sinh(\alpha^* \kappa z) C_5 \\ M_{r(z)} = K_{b2}\theta'_{(x)} = (2K_{b2})C_2 + (6K_{b2}z)C_3 + r_\theta(\alpha^* \kappa)K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) C_4 + r_\theta(\alpha^* \kappa)K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) C_5 \\ V_{(z)} = (K_{s1} + K_{s2})u'_{(x)} - K_{s1}\psi_{(x)} - K_{s2}\theta_{(x)} = -6(K_{b1} + K_{b2})C_3 - r \sinh(\alpha^* \kappa z) C_4 - r \cosh(\alpha^* \kappa z) C_5 \end{array} \right\} \quad (272)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ \psi_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{li}(z_i) \\ M_{ri}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{Bmatrix} \quad (273)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 + \frac{6}{\alpha_\psi^2} & r_\psi \sinh(\alpha^* \kappa z) & r_\psi \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 + \frac{6}{\alpha_\theta^2} & r_\theta \sinh(\alpha^* \kappa z) & r_\theta \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b1} & 6K_{b1}z & r_\psi(\alpha^* \kappa)K_{b1} \cosh(\alpha^* \kappa z) & r_\psi(\alpha^* \kappa)K_{b1} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b2} & 6K_{b2}z & r_\theta(\alpha^* \kappa)K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) & r_\theta(\alpha^* \kappa)K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 0 & -6(K_{b1} + K_{b2}) & -r \sinh(\alpha^* \kappa z) & -r \cosh(\alpha^* \kappa z) \end{bmatrix} \quad (274)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (275)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (276)$$

Donde:

$$\left\{ t = \prod_{k=1}^n T_k(0), f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \right\} \quad (277)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - K_{s1}\psi_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln(0)} = 0 \\ M_{rn(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (278)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (279)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (280)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y las rotaciones en la parte superior de la viga:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right\} \quad (281)$$

4.1.8 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2)

Se presenta la viga GSB2, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en serie de una viga sándwich (SWB) y una viga de corte (SB). Esta viga (GSB2), resulta de la generalización de la viga sándwich (SWB) al incluir un campo cinemático de rotación adicional, donde se tendrá en cuenta la deformación por cortante en elementos más rígidos como los muros de corte. Teniendo en cuenta este nuevo campo cinemático y la introducción de la rigidez al corte; se puede utilizar esta viga (GSB2) como una viga de reemplazo general a todo elemento estructural; como muros de corte, muros de corte acoplados y pórticos.

Chesnais (2010) estudió un edificio de muros de corte de 16 pisos y concluyó que la rigidez al corte local de los elementos verticales puede tener el mismo orden de magnitud que las otras rigideces características de una viga sándwich. Para superar este problema propuso esta novedosa viga de reemplazo tipo sándwich generalizada para el caso del análisis dinámico e ignorando la inercia rotacional. Realizó una comparación del análisis dinámico del edificio utilizando la viga sándwich y la viga sándwich generalizada, encontrando una reducción del error del 11% para la viga sándwich y del 2% para la viga sándwich generalizada respecto al primer periodo fundamental del edificio, demostrando así la eficiencia de esta nueva viga de reemplazo.

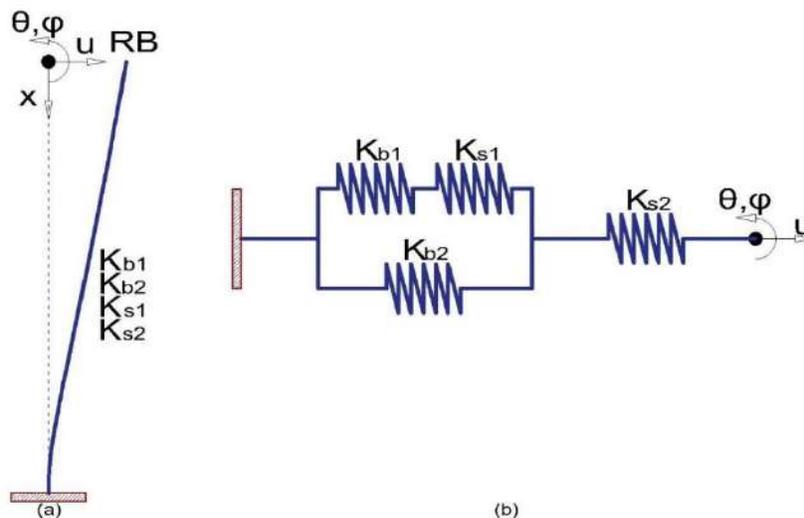


Figura 62. Viga Sándwich Generalizada (GSB1) de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2.

El modelo tiene tres campos cinemáticos, un movimiento transversal único u y un campo de rotación diferente (θ y ψ). En el modelo; K_{b1} , K_{s1} , K_{b2} y K_{s2} son las rigideces a la flexión global, rigidez al corte global, rigidez a la flexión local y rigidez al corte local respectivamente. Cabe

resaltar que el valor de K_{s1} puede resultar insignificante respecto a K_{s2} ; cuando los elementos verticales son lo suficientemente delgadas como las columnas.

Chesnais (2010) aplicó el método HPDM a estructuras de uno, dos y tres tramos y calculó expresiones analíticas para la rigidez al corte global (tabla 3).

Single frame	Double frame	Triple frame
$\frac{2k_p k_m}{k_p + 2k_m}$	$\frac{k_p(k_p(2k_{me} + k_{mi}) + 12k_{me}k_{mi})}{k_p^2 + 2k_p(2k_{me} + k_{mi}) + 6k_{me}k_{mi}}$	$\frac{(2k_{mi} + 2k_{me})k_{pe}(k_{pe} + 2k_{pi}) + 3(2k_{mi} + 2k_{me}(k_{pi} + 2k_{pe}))}{k_{pe}^2 + 3(2k_{me}(k_{pi} + 2k_{mi})) + 2k_{pe}(k_{pi} + 2k_{me} + 2k_{mi})}$
(1.16)	with $k_j = \frac{12E_j I_j}{l_m l_j}$ (1.17)	and $j = m, me, mi, p, pe$ or pi (1.18)

Tabla.3 Expresiones analíticas de la rigidez a cortante global K_s para estructuras de pórtico simple, doble y triple (Chesnais, 2010).

4.1.8.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GSB2 de tres campos se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_{b1} \theta'(x)^2 + K_{s1} [\theta(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \psi'(x)^2\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s2} [\psi(x) - u'(x)]^2 dx \quad (282)$$

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{wi} c_i^2, K_{b2} = r \sum_{i=1}^w EI_{wi} \\ K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^w \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{12EI_w} + \frac{1}{GA'_w} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (283)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i}c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i} \\ K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{12EI_c} + \frac{1}{GA'_c} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (284)$$

- Dual (Pórtico + muro de corte):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i}c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i} + \sum_{i=1}^w rEI_{w,i}, K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1} \\ K_{s2} = \sum_{i=1}^c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{12EI_c} + \frac{1}{GA'_c} \right) \right]^{-1} + \sum_{i=1}^w \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{12EI_w} + \frac{1}{GA'_w} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (285)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (286)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB2 de tres campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^H \{ K_{b1}\theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1}[\theta_{(x)} - \psi_{(x)}]^2 + K_{b2}\psi'_{(x)}{}^2 + K_{s2}[\psi_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \} dx - \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (287)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta u = & \int_0^H \{ K_{b1}\theta'_{(x)}\delta\theta'_{(x)} + K_{s1}[\theta_{(x)} - \psi_{(x)}]\delta\theta_{(x)} - K_{s1}[\theta_{(x)} - \psi_{(x)}]\delta\psi_{(x)} + K_{b2}\psi'_{(x)}\delta\psi'_{(x)} \\ & + K_{s2}[\psi_{(x)} - u'_{(x)}]\delta\psi_{(x)} - K_{s2}[\psi_{(x)} - u'_{(x)}]\delta u'_{(x)} \} dx - \int_0^H f(x)\delta u_{(x)} dx \\ & - \int_0^H u_{(x)}\delta f(x) dx \end{aligned} \quad (288)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & -\{K_{s2}[\psi(x) - u'(x)]\delta u(x)\}_0^H + [K_{b2}\psi'(x)\delta\psi(x)]_0^H + [K_{b1}\theta'(x)\delta\theta(x)]_0^H \\
& - \int_0^H [K_{s2}[u''(x) - \psi'(x)] + f(x)] \delta u(x) \\
& - \int_0^H \{K_{b2}\psi''(x) - (K_{s1} + K_{s2})\psi(x) + K_{s1}\theta(x) + K_{s2}u'(x)\} \delta\psi(x) \\
& - \int_0^H \{K_{b1}\theta''(x) - K_{s1}[\theta(x) - \psi(x)]\} \delta\theta(x) - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx
\end{aligned} \tag{289}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s2}[u''(x) - \psi'(x)] + f(x) = 0 \\ K_{b1}\theta''(x) - K_{s1}[\theta(x) - \psi(x)] = 0 \\ K_{b2}\psi''(x) - (K_{s1} + K_{s2})\psi(x) + K_{s1}\theta(x) + K_{s2}u'(x) = 0 \end{array} \right\} \tag{290}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'(0) = 0 \\ \psi'(0) = 0 \\ \psi(0) - u'(0) = 0 \end{array} \right\} \tag{291}$$

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) \\ \theta(x) \\ \psi(x) \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{ccc} K_{s2}D^2 & 0 & -K_{s2}D \\ 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} & K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{s1} & K_{b2}D^2 - (K_{s1} + K_{s2}) \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{292}$$

Es decir;

$$\left\{ \begin{array}{l} u''''''(x) - \frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} u''''(x) \\ \theta''''''(x) - \frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} \theta''''(x) \\ \psi''''''(x) - \frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} \psi''''(x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{K_{s2}} f''''(x) + \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} f''(x) - \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} f(x) \\ \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} f'(x) \\ -\frac{1}{K_{b2}} f''(x) + \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} f'(x) \end{array} \right\} \tag{293}$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u_{(z)}^{''''''} - \frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} H^2 u_{(z)}^{''''} = -\frac{H^2}{K_{s2}} f_{(z)}^{''''} + \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} H^4 f_{(z)}^{''} - \frac{K_{s1}H^6}{K_{b1}K_{b2}} f_{(z)} \quad (294)$$

O su equivalente:

$$\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}} u_{(z)}^{''''''} - (K_{b1} + K_{b2})H^2 u_{(z)}^{''''} = -\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}K_{s2}} H^2 f_{(z)}^{''''} + \left[\frac{K_{b2}}{K_{s2}} + K_{b1} \left(\frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{s2}} \right) \right] H^4 f_{(z)}^{''} - H^6 f_{(z)} \quad (295)$$

Definiendo cuatro parámetros:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \eta_\psi = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}}, \lambda = \frac{W_{max}H^2}{K_{s2}(1 - e^{-a})} \right\} \quad (296)$$

Reemplazando los tres primeros parámetros:

$$u_{(z)}^{''''''} - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}^{''''} = \frac{H^2}{K_{s2}} \left\{ -f_{(z)}^{''''} + [(\alpha\kappa)^2 + \eta_\psi^2] f_{(z)}^{''} - \eta_\psi^2 \alpha^2 (\kappa^2 - 1) f_{(z)} \right\} \quad (297)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a\frac{x}{H}} \right) \rightarrow f_{(z)} = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a+az}) \quad (298)$$

Reemplazando la carga lateral e introduciendo el cuarto parámetro:

$$u_{(z)}^{''''''} - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}^{''''} = -\eta_\psi^2 \alpha^2 (\kappa^2 - 1) \lambda + \{a^4 - [(\alpha\kappa)^2 + \eta_\psi^2] a^2 + \eta_\psi^2 \alpha^2 (\kappa^2 - 1)\} \lambda e^{-a+az} \quad (299)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6 z^4 + C_7 e^{-a+az} \\ H\theta_{(z)} = C_8 + C_9 z + C_{10} z^2 + C_{11} z^3 + C_{12} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{13} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{14} e^{-a+az} \\ H\psi_{(z)} = C_{15} + C_{16} z + C_{17} z^2 + C_{18} z^3 + C_{19} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{20} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{21} e^{-a+az} \end{cases} \quad (300)$$

Donde:

$$\left\{ C_6 = \frac{\eta_\psi^2 (\kappa^2 - 1)}{24\kappa^2}, C_7 = \frac{a^4 - [(\alpha\kappa)^2 + \eta_\psi^2] a^2 + \eta_\psi^2 \alpha^2 (\kappa^2 - 1)}{a^4 [a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \quad (301)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha \kappa z) + C_6 z^4 + C_7 e^{-a+az} \\ \left\{ \begin{array}{l} H\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_1)C_3 + [(\alpha \kappa)p_3 \sinh(\alpha \kappa z)]C_4 \\ + [(\alpha \kappa)p_3 \cosh(\alpha \kappa z)]C_5 + (4z^3 + 24p_1 z)C_6 + (p_5 a e^{-a+az})C_7 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} H\psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_2)C_3 + [(\alpha \kappa)p_4 \sinh(\alpha \kappa z)]C_4 \\ + [(\alpha \kappa)p_4 \cosh(\alpha \kappa z)]C_5 + (4z^3 + 24p_2 z)C_6 + (p_6 a e^{-a+az})C_7 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (302)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{s1}K_{s2}H^2}, p_2 = \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s1}K_{b1}}{K_{s1}K_{s2}H^2} \\ p_3 = \frac{K_{s1}K_{s2}H^4}{K_{b1}K_{b2}(\alpha \kappa)^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}]H^2(\alpha \kappa)^2 + K_{s1}K_{s2}H^4} \\ p_4 = \frac{[K_{s1}H^2 - (\alpha \kappa)^2 K_{b1}]K_{s2}H^2}{K_{b1}K_{b2}(\alpha \kappa)^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}]H^2(\alpha \kappa)^2 + K_{s1}K_{s2}H^4} \\ p_5 = \frac{K_{s1}K_{s2}H^4}{K_{b1}K_{b2}a^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}]H^2a^2 + K_{s1}K_{s2}H^4} \\ p_6 = \frac{[K_{s1} - a^2 K_{b1}]K_{s2}H^2}{K_{b1}K_{b2}a^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}]H^2a^2 + K_{s1}K_{s2}H^4} \end{array} \right\} \quad (303)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \psi_{(0)} - u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (304)$$

Las constantes:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ C_4 \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} 2 & (\alpha \kappa)^2 p_3 \\ 2 & (\alpha \kappa)^2 p_4 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ -24 \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} C_6 - \begin{bmatrix} p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} a^2 e^{-a} C_7 \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 + 6p_1 & (\alpha \kappa)p_3 \cosh(\alpha \kappa) \\ 1 & 3 + 6p_2 & (\alpha \kappa)p_4 \cosh(\alpha \kappa) \\ 0 & 6p_2 & (\alpha \kappa)(p_4 - 1) \end{bmatrix}^{-1} x \left\{ \begin{array}{l} -2C_2 + (\alpha \kappa)p_3 \sinh(\alpha \kappa) C_4 - (4 + 24p_1)C_6 - p_5 a C_7 \\ -2C_2 + (\alpha \kappa)p_4 \sinh(\alpha \kappa) C_4 - (4 + 24p_2)C_6 - p_6 a C_7 \\ (1 - p_6)a e^{-a} C_7 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$C_0 = -(C_1 + C_2 + C_3 + C_6 + C_7) - C_4 \cosh(\alpha\kappa) - C_5 \sinh(\alpha\kappa) \quad (305)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), la expresión de $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6 z^4 \\ \left\{ \begin{array}{l} H\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_1)C_3 + [(\alpha\kappa)p_3 \sinh(\alpha\kappa z)]C_4 \\ \quad + [(\alpha\kappa)p_3 \cosh(\alpha\kappa z)]C_5 + (4z^3 + 24p_1 z)C_6 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} H\psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_2)C_3 + [(\alpha\kappa)p_4 \sinh(\alpha\kappa z)]C_4 \\ \quad + [(\alpha\kappa)p_4 \cosh(\alpha\kappa z)]C_5 + (4z^3 + 24p_2 z)C_6 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (306)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} C_2 \\ C_4 \end{array} \right\} = -24 \begin{bmatrix} 2 & (\alpha\kappa)^2 p_3 \\ 2 & (\alpha\kappa)^2 p_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} C_6 \\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 3 + 6p_1 & (\alpha\kappa)p_3 \cosh(\alpha\kappa) \\ 1 & 3 + 6p_2 & (\alpha\kappa)p_4 \cosh(\alpha\kappa) \\ 0 & 6p_2 & (\alpha\kappa)(p_4 - 1) \end{bmatrix}^{-1} x \begin{Bmatrix} -2C_2 + (\alpha\kappa)p_3 \sinh(\alpha\kappa) C_4 - (4 + 24p_1)C_6 \\ -2C_2 + (\alpha\kappa)p_4 \sinh(\alpha\kappa) C_4 - (4 + 24p_2)C_6 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ C_0 = -(C_1 + C_2 + C_3 + C_6) - C_4 \cosh(\alpha\kappa) - C_5 \sinh(\alpha\kappa) \end{array} \right\} \quad (307)$$

4.1.8.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s2}[u''_{(x)} - \psi'_{(x)}] = 0 \\ K_{b1}\theta''_{(x)} - K_{s1}[\theta_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2}\psi''_{(x)} - (K_{s1} + K_{s2})\psi_{(x)} + K_{s1}\theta_{(x)} + K_{s2}u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (308)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_8 + C_9 z + C_{10} z^2 + C_{12} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{13} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \psi_{(z)} = C_{15} + C_{16} z + C_{17} z^2 + C_{19} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{20} \sinh(\alpha^* \kappa z) \end{array} \right\} \quad (309)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \right\} \quad (310)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ H\theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_1)C_3 + [(\alpha^* \kappa)p_3 \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_4 + [(\alpha \kappa)p_3 \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \\ H\psi_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (3z^2 + 6p_2)C_3 + [(\alpha^* \kappa)p_4 \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_4 + [(\alpha \kappa)p_4 \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \end{array} \right\} \quad (311)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{s1}K_{s2}}, p_2 = \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s1}K_{b1}}{K_{s1}K_{s2}} \\ p_3 = \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(\alpha^* \kappa)^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}](\alpha^* \kappa)^2 + K_{s1}K_{s2}} \\ p_4 = \frac{[K_{s1} - (\alpha \kappa)^2 K_{b1}]K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(\alpha^* \kappa)^4 - [K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}](\alpha^* \kappa)^2 + K_{s1}K_{s2}} \end{array} \right\}$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{l(z)} = K_{b1}\theta'_{(x)} = (2K_{b1})C_2 + (6K_{b1}z)C_3 + (\alpha^* \kappa)^2 p_3 K_{b1} \cosh(\alpha^* \kappa z) C_4 + (\alpha^* \kappa)^2 p_3 K_{b1} \sinh(\alpha^* \kappa z) C_5 \\ M_{r(z)} = K_{b2}\psi'_{(x)} = (2K_{b2})C_2 + (6K_{b2}z)C_3 + (\alpha^* \kappa)^2 p_4 K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) C_4 + (\alpha^* \kappa)^2 p_4 K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) C_5 \\ V_{(z)} = K_{s2}(u'_{(x)} - \psi_{(x)}) = 6p_3 K_{s2} C_3 + (\alpha^* \kappa)(p_4 - 1)K_{s2} \sinh(\alpha^* \kappa z) C_4 + (\alpha^* \kappa)(p_4 - 1)K_{s2} \cosh(\alpha^* \kappa z) C_5 \end{array} \right\} \quad (312)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ \psi_i(z_i) \\ M_{li}(z_i) \\ M_{ri}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{array} \right\} = K_i(z_i) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \right\} \quad (313)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 + 6p_1 & (\alpha^* \kappa) p_3 \sinh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha \kappa) p_3 \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 + 6p_2 & (\alpha^* \kappa) p_4 \sinh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha \kappa) p_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b1} & 6K_{b1}z & (\alpha^* \kappa)^2 p_3 K_{b1} \cosh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha^* \kappa)^2 p_3 K_{b1} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b2} & 6K_{b2}z & (\alpha^* \kappa)^2 p_4 K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha^* \kappa)^2 p_4 K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 0 & 6p_3 K_{s2} & (\alpha^* \kappa)(p_4 - 1) K_{s2} \sinh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha^* \kappa)(p_4 - 1) K_{s2} \cosh(\alpha^* \kappa z) \end{bmatrix} \quad (314)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (315)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (316)$$

Donde:

$$\begin{Bmatrix} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{Bmatrix} \quad (317)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \psi_{(0)} - u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ M_{ln(0)} = 0 \\ M_{rn(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (318)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= 0 \\ \theta_{(1)} &= 0 \\ \psi_{(1)} &= 0 \\ \theta'_{(0)} &= 0 \\ \psi'_{(0)} &= 0 \\ \psi_{(0)} - u'_{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (319)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (320)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y las rotaciones en la parte superior de la viga:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right\} \quad (321)$$

4.1.9 Viga sándwich generalizada modificada de dos campos (MGSB)

Debido a la complejidad en los cálculos de la Viga sándwich Generalizada (GSB), se desarrolla un nuevo modelo de viga de reemplazo “Viga sándwich Generalizado Modificado (MGSB)” apropiado para modelar a los muros de corte acoplados. Moghadasi (2015), realizó un análisis paramétrico para comparar las rotaciones en los muros de corte acoplados frente a una carga lateral uniformemente distribuida utilizando el Software SAP 2000 y concluyó que se puede suponer que los campos de rotación en los muros de corte acoplados son casi idénticos siempre que el cociente del ancho de los muros esté entre 0.25 y 4:

$$0.25 \leq \frac{B_1}{B_2} \leq 4 \quad (322)$$

Teniendo este criterio en cuenta; la viga sándwich generalizada (GSB) de tres campos se reduce una viga sándwich generalizada modificada (MGSB) de dos campos.

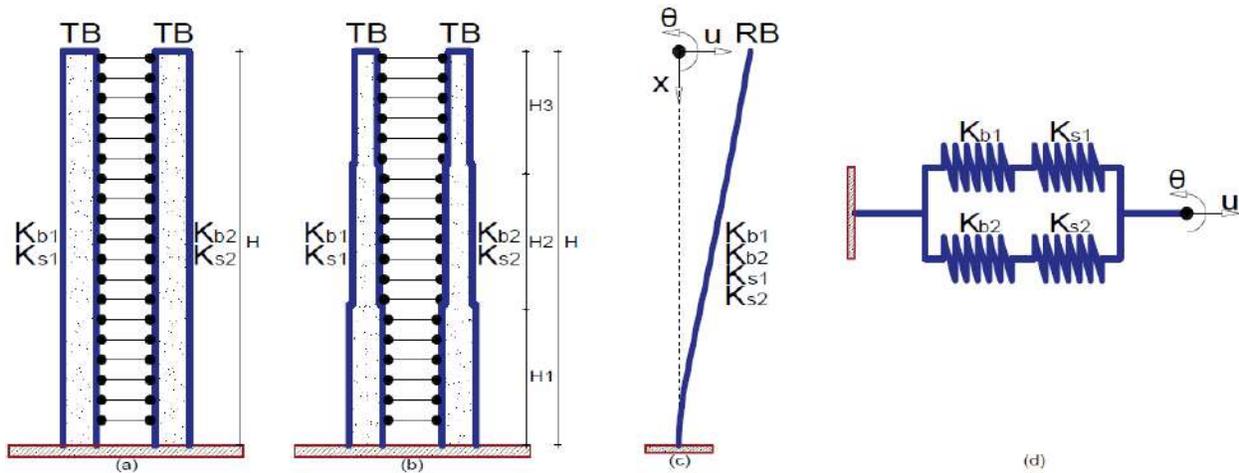


Figura 63. Viga Sándwich Generalizada Modificada (MGSB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez MGSB.

4.1.9.1 Caso 1

La energía potencial del modelo MGSB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}^2 + K_{s1} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 + K_{b2} \theta'^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (323)$$

Teniendo en cuenta términos comunes:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ (K_{b1} + K_{b2}) \theta'_{(x)}{}^2 + (K_{s1} + K_{s2}) [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (324)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i}, K_{b2} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i}c_i^2, K_{s1} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i}, K_{s2} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_{b,i}[(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3}h \left(1 + 12 \frac{kEI_{b,i}}{l^{*2}GA_{b,i}}\right)}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right. \quad (325)$$

Esta nueva expresión de la energía potencial resulta idéntica a la energía potencial de una viga Timoshenko (TB) donde las rigideces a la flexión y al corte están acopladas en serie. Al anularse el efecto de los miembros axialmente rígidos que transmitían las fuerzas horizontales entre ambas vigas, la viga MGSB de dos campos se vuelve más rígida que el GSB original. Para superar este problema es necesario modificar las rigideces a la flexión mediante un coeficiente η adecuado. Este coeficiente η se determinará por compatibilidad de desplazamientos en $z = 0$.

El desplazamiento horizontal de una viga sándwich (SWB) frente a una carga lateral propuesta por Miranda (1999) es:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6z^4 + C_7e^{-a+az} \quad (326)$$

Donde los coeficientes C_0, C_1, C_2, C_3 y C_4 se conocen; al evaluarlo en $z = 0$ y ordenando adecuadamente, se obtiene:

$$u_{(0)} = \lambda K_t \rightarrow K_t = \frac{u_{(0)}}{\lambda} = f_{(\alpha,\kappa)} \quad (327)$$

El parámetro K_t es solo función de α y κ . En la figura 64 se muestra la tendencia del parámetro K_t para diferentes valores del peralte de la viga de conexión: 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0 m. Se observa que el incremento del peralte de las vigas de conexión tienen un efecto positivo al incrementar la rigidez lateral y como consecuencia reducir el desplazamiento total del elemento estructural. He aquí la importancia de considerar el aporte de estas vigas de acoplamiento en las cajas de ascensores, donde el considerarlo en el análisis incrementa notablemente la rigidez lateral y torsional.

En la figura 65 se observa que a mayor grado de acoplamiento la tendencia del desplazamiento es hacia el comportamiento de flexión global despreciando el aporte de rigidez a la flexión local; e incluso para un grado de acoplamiento menor, esta tendencia se acerca rápidamente a la situación de flexión global.

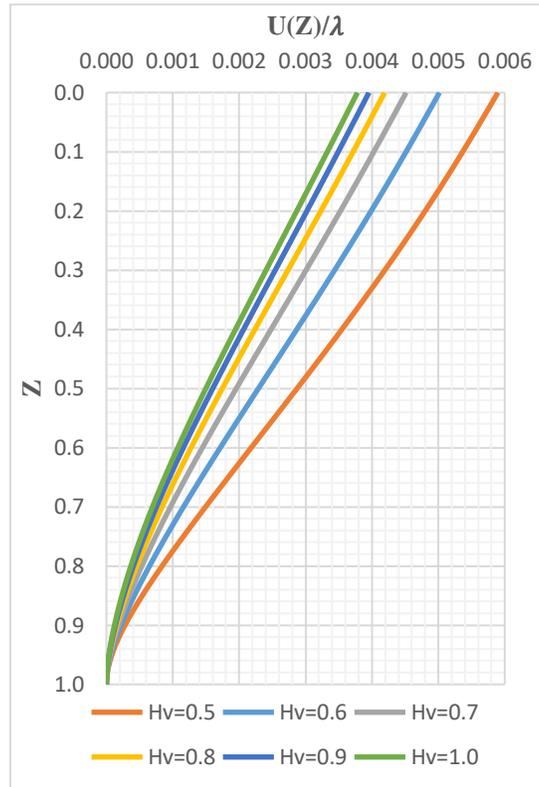


Figura 64. Desplazamiento del edificio en función al peralte de las vigas de conexión.

El comportamiento a flexión local despreciando la flexión global se obtiene evaluando $h_v \rightarrow 0$ y como consecuencia $\alpha \rightarrow 0$. En este caso la función de las vigas de conexión es fundamentalmente transmitir las cargas horizontales y forzar a que los muros de corte trabajen juntas. El desplazamiento máximo del edificio para este caso se denotará como $u_{(h_v \rightarrow 0)}$. Al evaluar esta condición en el desplazamiento máximo del edificio sujeta a cargas laterales, se obtiene:

$$u_{(h_v \rightarrow 0)} = \frac{wH^4}{8K_b2} \quad (328)$$

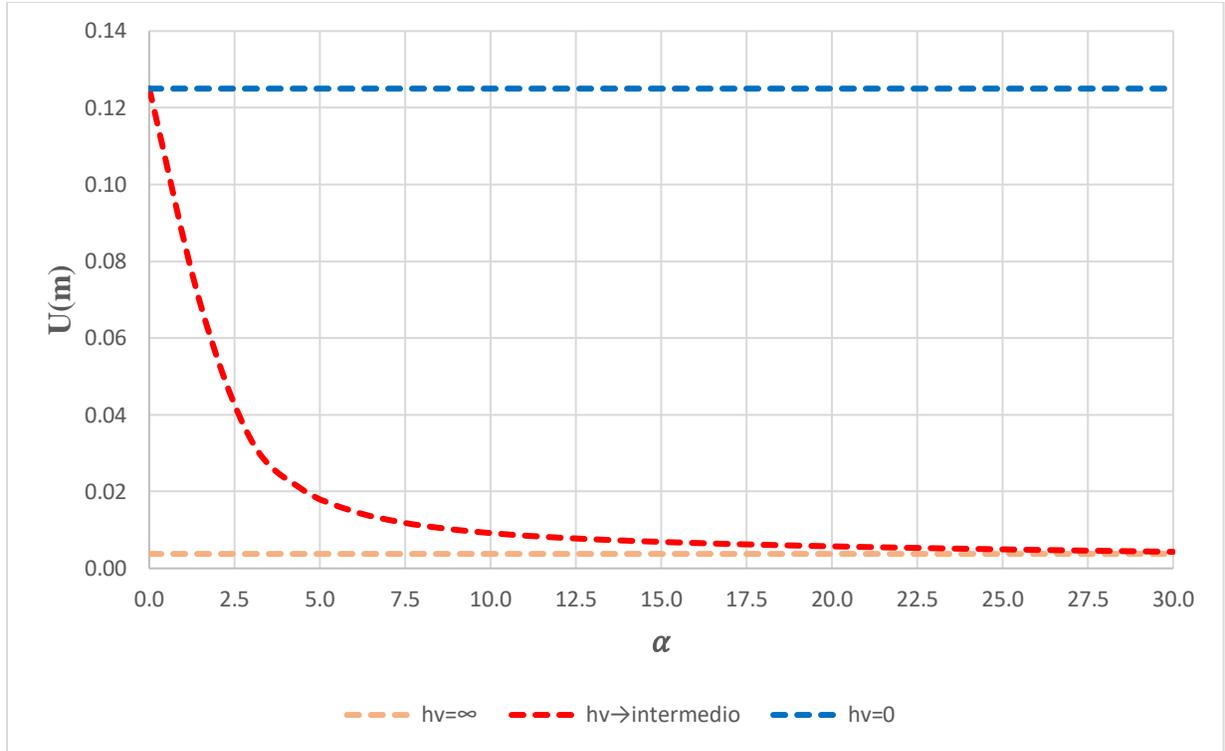


Figura 65. Desplazamiento del máximo del edificio en función del grado de acoplamiento.

El comportamiento a flexión total (global + local), se obtiene evaluando $h_v \rightarrow \infty$ y como consecuencia $\alpha \rightarrow \infty$. Este es el caso de los muros de corte altos y esbeltos (Con una relación alto/ancho muy elevado). El desplazamiento máximo del edificio para este caso se denotará como $u_{(h_v \rightarrow \infty)}$. Al evaluar esta condición en el desplazamiento máximo del edificio sujeta a cargas laterales, se obtiene:

$$u_{(h_v \rightarrow \infty)} = \frac{wH^4}{8(K_{b1} + K_{b2})} \quad (329)$$

El desplazamiento máximo del edificio se denotará como:

$$u_{(0)} = (\eta)u_{(0, h_v \rightarrow 0)} + (1 - \eta)u_{(0, h_v \rightarrow \infty)} \quad (330)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores y despejando se puede obtener el coeficiente η :

$$\eta = \frac{u_{(0)} - u_{(0, h_v \rightarrow \infty)}}{u_{(0, h_v \rightarrow 0)} - u_{(0, h_v \rightarrow \infty)}} \quad (331)$$

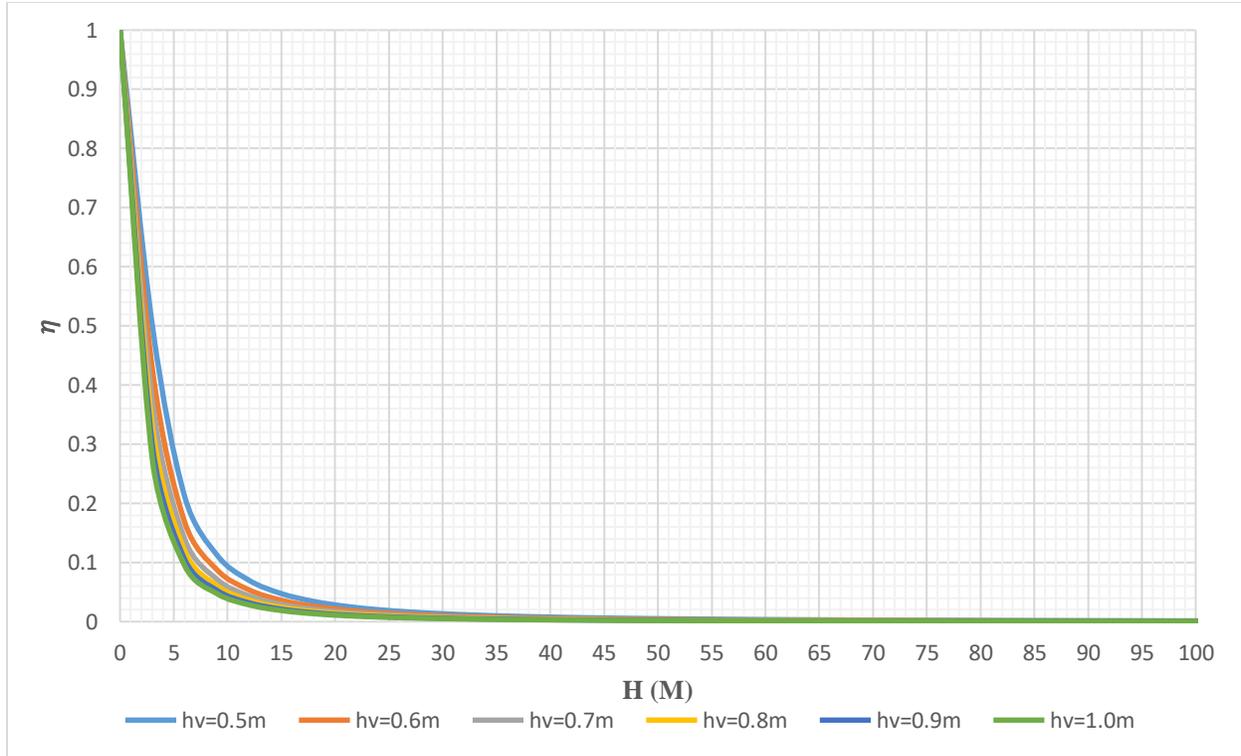


Figura 66. Tendencia del parámetro η con la altura del edificio.

En la figura 66 se observa que a mayor altura la tendencia del parámetro η es cercano a cero. Significa que cuando el número de pisos aumenta, la flexión global se vuelve cada vez más importante y por lo tanto las vigas de conexión aumentan la rigidez de los muros acoplados con respecto a la situación de muros desacoplados; esto es comprensible, tal como lo señala Zalka (2020) al aumentar el número de pisos la flexión global domina el comportamiento de la estructura. Además, se observa que la tendencia del parámetro η al valor cero aumenta con el aumento del peralte de las vigas de conexión.

La energía potencial del MGSB de dos campos (TB + TB) se convierte en:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ [\eta K_{b1} + (1 - \eta) K_{b2}] \theta'_{(x)}{}^2 + (K_{s1} + K_{s2}) [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (332)$$

Es decir:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_b^* \theta'_{(x)}{}^2 + K_s^* [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (333)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b^* = \eta K_{b1} + (1 - \eta) K_{b2} = \eta \sum_{i=0}^c r E I_{c,i} + (1 - \eta) \sum_{i=0}^c E A_{c,i} c_i^2 \\ K_s^* = K_{s1} + K_{s2} = \sum_{i=0}^c G A_{c,i} + (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=0}^b \frac{6 E I_{b,i} [(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3} h \left(1 + 12 \frac{k E I_{b,i}}{l^{*2} G A_{b,i}} \right)}, K_c = \sum_{i=0}^n \frac{12 E I_c}{h^2} \end{array} \right. \quad (334)$$

Tal como se observó inicialmente, si se cambia las rigideces K_b^* y K_s^* por sus equivalentes laterales K_b y K_s respectivamente, resulta que las ecuaciones de la viga MGSB de dos campos son idénticos a las de la viga TB; es decir, las mismas conclusiones obtenidas para la viga TB son aplicables para la viga MGSB de dos campos.

La expresión de $u_{(z)}$:

$$\begin{aligned} u_{(z)} = \lambda \left\{ \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{e^{-a}}{a^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a} \right) \right] + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \right\} \\ + \lambda \left[\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{e^{-a}}{a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} \right) \right] z - \frac{\lambda}{2a^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2} e^{-a} \right) z^2 + \frac{\lambda e^{-a}}{6a} z^3 \\ + \frac{\lambda}{24} z^4 + \left[\frac{\lambda(a^2 - \alpha^2)}{a^4 \alpha^2} \right] e^{-a+az} \end{aligned} \quad (335)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$):

$$u_{(z)} = \frac{W_{max} H^4}{K_b^*} \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) + \frac{W_{max} H^2}{2K_s^*} (1 - z^2) \quad (336)$$

4.1.9.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Recordando la matriz de transferencia de la viga TB, se tiene:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & z_i^2 & z_i^3 \\ 0 & 1 & 2z_i & 3z_i^2 + \frac{6}{\alpha^{*2}} \\ 0 & 0 & 2K_b^* & 6K_b^*z_i \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{\alpha^{*2}}K_s^* \end{bmatrix}_i \quad (337)$$

Además;

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i(z) = K_i(z_i)K_i^{-1}(h_i) \\ \begin{pmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{pmatrix} = T_i(0) \begin{pmatrix} u_i(h_i) \\ \theta_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga, según la viga TB resulta:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (338)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{array} \right\} \quad (339)$$

Además:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (340)$$

4.1.10 Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB)

Debido a la complejidad matemática que resulta al analizar la viga sándwich generalizada (GSB), se desarrolla un modelo matemático que descuida la rigidez a la flexión global. Según Mangione y Migliorati (2015), este modelo denominado viga sándwich generalizada modificada (MGSB) es adecuado para modelar pórticos planos que en la práctica se utilizan para edificios menores a lo 25 pisos.

El “acoplamiento de dos vigas modificada (MCTB) de dos campos” resulta del acoplamiento en paralelo de una viga Timoshenko (TB) y una viga de corte (SB). Se toma en cuenta un movimiento transversal único u y un campo de rotación θ igual en ambas vigas.

En el modelo; K_{s1} es la rigidez al corte global en la SB izquierda y K_{b1} y K_{s1} son las rigideces a la flexión local y al corte local en la TB derecha.

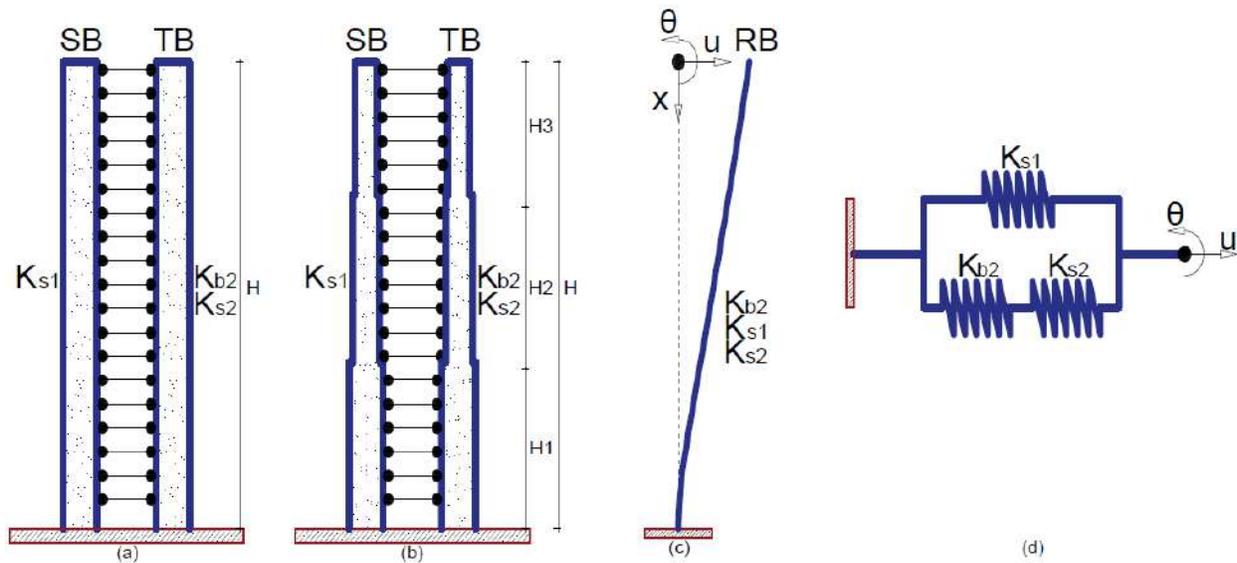


Figura 67. Acoplamiento de dos vigas modificada (MCTB) de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2, c) RB equivalente e d) Idealización de la rigidez MCTB.

4.1.10.1 Caso 1

La energía potencial del modelo MCTB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{s1} u'(x)^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^H \{ K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [\theta(x) - u'(x)]^2 \} dx \quad (341)$$

Donde:

$$\left\{ K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_{b2} = r \sum_{i=0}^c EI_{c,i}, K_{s2} = \sum_{i=0}^c GA_{c,i}, K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{hL}, K_c = \sum_{i=0}^c \frac{12EI_{c,i}}{h^2} \right\} \quad (342)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (343)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga MCTB de dos campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{s1} u'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [\theta(x) - u'(x)]^2 \right\} dx - \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (344)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta u = \int_0^H \left\{ K_{s1} u'(x) \delta u'(x) + K_{b2} \theta'(x) \delta \theta'(x) + K_{s2} [\theta(x) - u'(x)] \delta \theta(x) \right. \\ \left. - K_{s2} [\theta(x) - u'(x)] \delta u'(x) \right\} dx - \int_0^H f(x) \delta u(x) dx - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (345)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta u = [K_{b2} \theta'(x) \delta \theta(x)]_0^H + \{ (K_{s1} + K_{s2}) u'(x) - K_{s2} \theta(x) \} \delta u(x)_0^H \\ - \int_0^H \{ K_{b2} \theta''(x) - K_{s2} [\theta(x) - u'(x)] \} \delta \theta(x) \\ - \int_0^H \{ (K_{s1} + K_{s2}) u''(x) - K_{s2} \theta'(x) + f(x) \} \delta u(x) - \int_0^H u(x) \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (346)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} K_{b2}\theta''(x) - K_{s2}[\theta(x) - u'(x)] = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u''(x) - K_{s2}\theta'(x) + f(x) = 0 \end{cases} \quad (347)$$

Condiciones de borde:

$$\begin{cases} \theta'(0) = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'(0) - K_{s2}\theta(0) = 0 \end{cases} \quad (348)$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{s2}D & K_{b2}D^2 - K_{s2} \\ (K_{s1} + K_{s2})D^2 & -K_{s2}D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ f(x) \end{Bmatrix} \quad (349)$$

Es decir;

$$\begin{Bmatrix} u''''(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}u''(x) \\ \theta''''(x) - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}\theta''(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} \left[-f''(x) + \frac{K_{s2}}{K_{b2}}f(x) \right] \\ \frac{K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}f'(x) \end{Bmatrix} \quad (350)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u''''(z) - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}H^2 \right]u''(z) = \frac{H^2}{K_{s1} + K_{s2}} \left[-f''(z) + H^2 \frac{K_{s2}}{K_{b2}}f(z) \right] \quad (351)$$

Definiendo tres parámetros:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s2}^2}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{s2}}}, \lambda = \frac{W_{max}H^2}{(K_{s1} + K_{s2})(1 - e^{-a})} \right\} \quad (352)$$

Reemplazando los dos primeros parámetros:

$$u''''(z) - (\alpha\kappa)^2u''(z) = \frac{H^2}{K_{s1} + K_{s2}} \left[-f''(z) + \alpha^2(k^2 + 1)f(z) \right] \quad (353)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + a \frac{x}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a + az}) \quad (354)$$

Reemplazando la carga lateral y el tercer parámetro:

$$u_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'' = \lambda\alpha^2(k^2 + 1) - \lambda[\alpha^2(k^2 + 1) - a^2]e^{-a+az} \quad (355)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\alpha\kappa z) + C_3 \sinh(\alpha\kappa z) - \frac{\lambda(k^2 + 1)}{2\kappa^2} z^2 - \frac{\lambda[\alpha^2(k^2 + 1) - a^2]}{a^2[\alpha^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a+az} \quad (356)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = -\lambda \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) \\ u''_{(0)} = -\lambda(1 - e^{-a}) \\ u'''_{(1)} = \lambda \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) + a \right] \end{array} \right\} \quad (357)$$

Las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = u_{(1)} - C_1 - [C_2 \cosh(\alpha\kappa) + C_3 \sinh(\alpha\kappa)] + \lambda \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2k^2} + \frac{\alpha^2(\kappa^2 + 1) - a^2}{a^2[\alpha^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_1 = u'_{(1)} - (\alpha\kappa)[C_2 \sinh(\alpha\kappa) + C_3 \cosh(\alpha\kappa)] + \lambda \left\{ 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{\alpha^2(\kappa^2 + 1) - a^2}{a[\alpha^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_2 = \frac{\lambda}{(\alpha\kappa)^2} \left\{ \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-a}\alpha^2}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right\} \\ C_3 = -C_2 \tanh(\alpha\kappa) + \frac{\lambda\alpha^2}{(\alpha\kappa)^3 \cosh(\alpha\kappa)} \left[\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a}\right) + \frac{a}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \end{array} \right\} \quad (358)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), la expresión de $u_{(z)}$ resulta:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^2}{K_{s1}} (1 - z^2) - \frac{1}{\kappa^2 K_{s1} + K_{s2}} \frac{W_{max}H^2 \left\{ 1 - \cosh(\alpha\kappa z - \alpha\kappa) - (\alpha\kappa)[\sinh(\alpha\kappa z) - \sinh(\alpha\kappa)] \right\}}{(\alpha\kappa)^2 \cosh(\alpha\kappa)} \quad (359)$$

Esta expresión de la deflexión muestra que el desplazamiento lateral está compuesto por la deflexión por corte y una deflexión debido a la interacción entre la flexión y el corte.

4.1.10.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} K_{b2}\theta''(x) - K_{s2}[\theta(x) - u'(x)] = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u''(x) - K_{s2}\theta'(x) = 0 \end{cases} \quad (360)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_3 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_4 + C_5 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_6 \sinh(\alpha^* \kappa z) \end{cases} \quad (361)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s2}^2}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{s2}}} \right\} \quad (362)$$

Expresando los coeficientes de la función $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_3 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_1 + C_2 \frac{\alpha^* \kappa}{1 - \kappa^2} \sinh(\alpha^* \kappa z) + C_3 \frac{\alpha^* \kappa}{1 - \kappa^2} \cosh(\alpha^* \kappa z) \end{cases} \quad (363)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{1(z)} = K_{b2}\theta'(x) = C_2 \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{1 - \kappa^2} K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_3 \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{1 - \kappa^2} K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ V_{(z)} = (K_{s1} + K_{s2})u'(x) - K_{s2}\theta(x) = K_{s1}C_1 \end{cases} \quad (364)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (365)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & \frac{\alpha^* \kappa}{1 - \kappa^2} \sinh(\alpha^* \kappa z) & \frac{\alpha^* \kappa}{1 - \kappa^2} \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{1 - \kappa^2} K_{b2} \cosh(\alpha^* \kappa z) & \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{1 - \kappa^2} K_{b2} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & K_{s1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (366)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_1(h_i) \\ V_1(h_i) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (367)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_1(h_i) \\ V_1(h_i) \end{Bmatrix} + f \quad (368)$$

Donde:

$$\left\{ t = \prod_{k=1}^n T_k(0), f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \right\} \quad (369)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ K_{b2}\theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{rn(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (370)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \quad (371)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,5} \\ t_{4,3} & t_{4,5} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,5} \\ t_{4,3} & t_{4,5} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} \quad (372)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y la rotación en la parte superior:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \theta_n(0) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,5} \\ t_{4,3} & t_{4,5} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_3 \\ f_4 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right\} \quad (373)$$

4.1.11 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB)

Se desarrolla la viga GCTB de 3 campos, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de una viga Timoshenko extensible (viga Timoshenko debido al efecto de los muros de corte y extensible debido a la extensibilidad axial de los muros de corte) y una viga de restricción a la rotación (debido al núcleo continuo resultado de la presencia de la viga de conexión). Se supone que las vigas están acopladas en paralelo por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman.

Moghadasi (2015) propuso esta novedosa viga de reemplazo para el análisis de la deflexión lateral de muros de corte acoplados sometidos a una carga uniformemente distribuida y luego utilizó una formulación FEM unidimensionales para el análisis dinámico.

La rigidez de un muro de corte acoplado está fuertemente influenciada por las propiedades de las vigas de acoplamiento: si hay vigas de acoplamiento, la rigidez total del sistema excede la suma de las rigideces individuales de los muros de corte.

Para obtener la rigidez equivalente de la viga de restricción a la rotación, es necesario modelar la viga de conexión como viga Timoshenko e igualar la energía potencial de una viga de conexión y su equivalente continuo. La viga de conexión se modeló como viga Timoshenko para tener en cuenta la rigidez a flexión y a cortante (no despreciable en vigas de gran peralte).

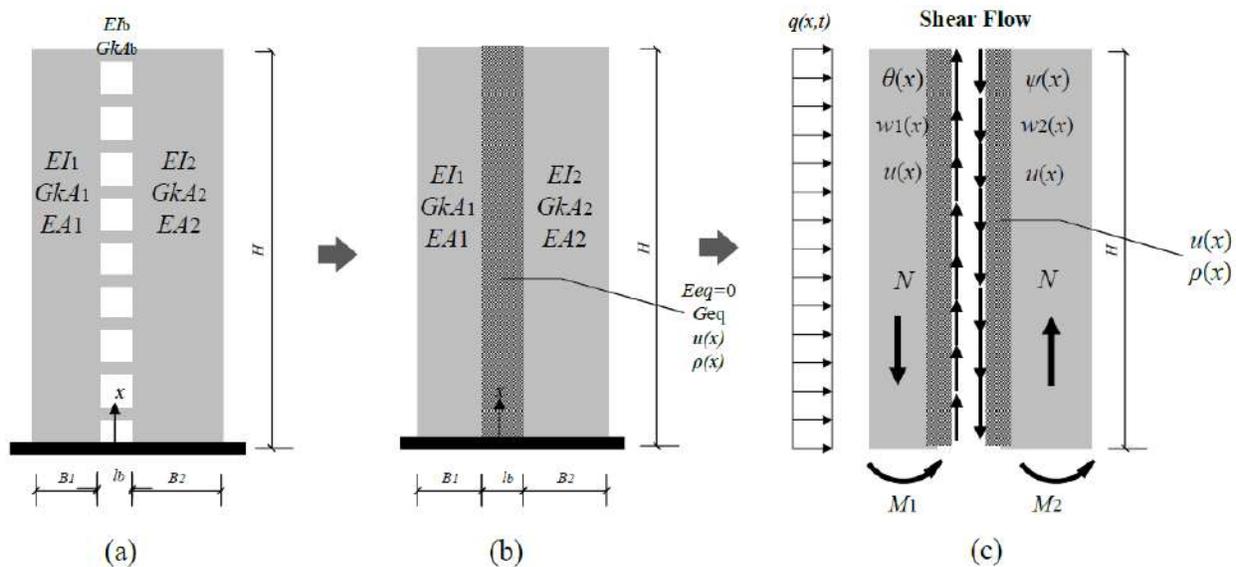


Figura 68. a) Muro de corte acoplado, (b) modelo continuo equivalente y (c) equilibrio de fuerza y campos cinemáticos consistentes (Moghadasi, 2015).

Energía potencial de la viga de conexión:

$$V_b = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{l_b} \left[\frac{M_{(x)}^2}{EI_b} + \frac{V_{(x)}^2}{kGA_b} \right] dx + 2 \frac{M_0^2}{K_\theta} \right\} = \frac{V^2 l_b}{2} \left[\frac{l_b^2}{12EI_b} + \frac{1}{kGA_b} + \frac{l_b}{2K_\theta} \right] \quad (374)$$

Donde $M_0 = V \frac{l_b}{2}$ es el momento flector en los extremos.

Energía potencial del equivalente continuo, según Capuani (1994):

$$V_{eq} = \frac{V^2 l_b}{2} \frac{1}{G_{eq} t_b h} \quad (375)$$

Al igualar ambas energías potenciales, se obtiene:

$$G_{eq} = \frac{1}{t_b h} \left(\frac{l_b^2}{12EI_b} + \frac{1}{kGA_b} + \frac{l_b}{2K_\theta} \right)^{-1} \quad (376)$$

Es muy complicado establecer una ecuación cerrada teniendo en cuenta el efecto rotacional en los extremos de la viga de conexión. Capuani (1994) sugiere:

$$K_\theta = \left\{ \pi + \frac{1}{\pi} [\log(3 - 4\nu)]^2 \right\} \frac{Eh^2 t_b}{16} \quad (377)$$

Moghadasi (2015), propone tener en cuenta el efecto rotacional en los extremos de la viga de conexión adicionando una longitud adicional:

$$l'_b = l_b \left(1 + \mu \frac{h_b}{l_b} \right) \approx l_b \left(1 + 0.50 \frac{h_b}{l_b} \right) \quad (378)$$

En este proyecto de investigación, se tendrá en cuenta la propuesta de Moghadasi (2015). La rigidez equivalente de la viga de restricción a la rotación equivale:

$$G_{eq} = \frac{1}{t_b h} \left(\frac{l'_b{}^2}{12EI_b} + \frac{1}{kGA_b} \right)^{-1} \quad (379)$$

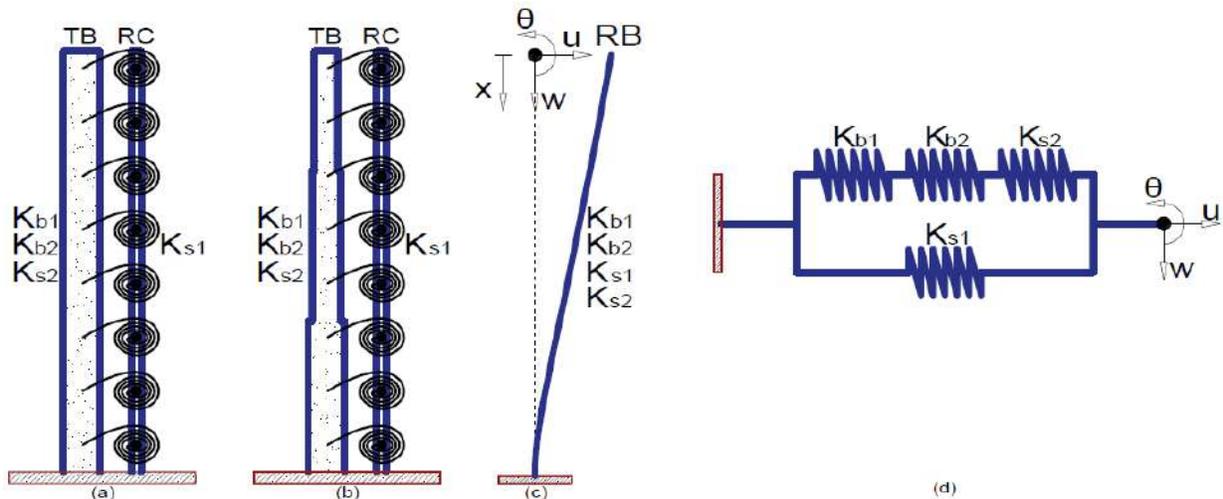


Figura 69. Viga CTB de tres campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez CTB de tres campos.

El modelo de viga GCTB de 3 campos toma en cuenta tres campos cinemáticos: un movimiento transversal u y un movimiento rotacional θ y una extensibilidad axial w .

Las hipótesis básicas del modelo son:

- Los muros de corte están en tensión plana.
- Los muros de corte tienen una sección transversal rígida.
- Las vigas de conexión son inextensibles axialmente.
- Se supone que los campos rotacionales en cada muro de conexión son iguales.

Tal como lo demuestra Moghadasi (2015), esta última condición se verifica cuando se cumple la siguiente relación:

$$0.25 \leq \frac{B_1}{B_2} \leq 4 \quad (380)$$

Donde B_1 y B_2 son los anchos de los muros de corte izquierdo y derecho respectivamente. La compatibilidad de rotación, entre los muros de corte y el núcleo equivalente se evalúa por medio del parámetro ρ :

$$\rho = -\frac{B_1\theta(x) + B_2\varphi(x)}{2l_b} \rightarrow \rho = -\frac{(B_1 + B_2)}{2l_b}\theta(x) \quad (381)$$

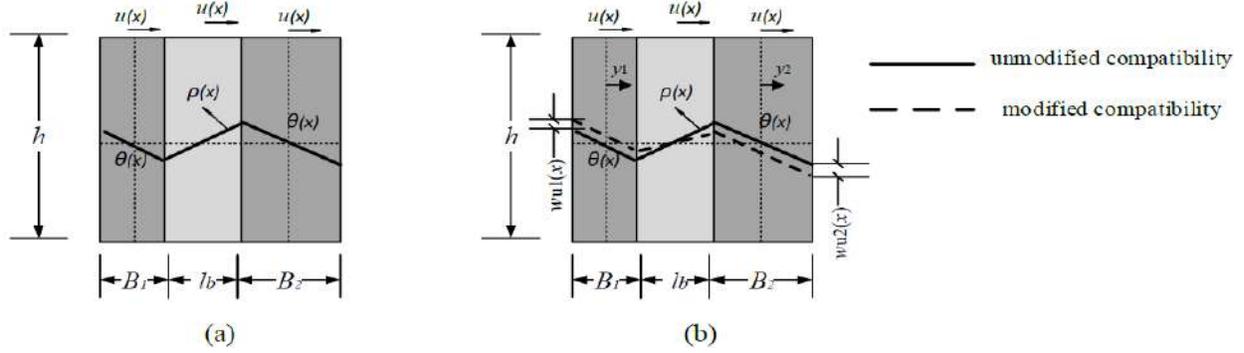


Figura 70. (a) Compatibilidad de rotación no modificada y (b) modificada con extensibilidad axial en una porción típica del modelo continuo (Moghadasi, 2015).

El flujo de corte que actúa verticalmente dentro del núcleo genera una extensibilidad axial que se distribuye a lo largo de la altura. Se establecen los campos cinemáticos locales:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x) = w_{u1}(x) + y_1 \theta(x) \\ w_2(x) = w_{u2}(x) + y_2 \theta(x) \\ \gamma_c(x) = u'_{(x)} + \rho \theta(x) - \frac{w_{u1}(x) + w_{u2}(x)}{l_b} w(x) \end{array} \right\} \quad (382)$$

Debido a que el flujo de corte genera una rotación secundaria en el muro de corte, se puede establecer una condición adicional entre ambos campos cinemáticos:

$$w_1 = -\frac{A_2}{A_1} w_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 = -\frac{A_2}{A_1} w \\ w_2 = w \end{array} \right\} \quad (383)$$

Teniendo en cuenta esta condición, los campos cinemáticos locales resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x) = -\frac{A_2}{A_1} w(x) + y_1 \theta(x) \\ w_2(x) = -w(x) + y_2 \theta(x) \\ \gamma_c(x) = u'_{(x)} + \frac{B_1 + B_1}{2l_b} \theta(x) - \frac{\frac{A_2}{A_1} + 1}{l_b} w(x) \end{array} \right\} \quad (384)$$

4.1.11.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de tres campos se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} \gamma_c(x)^2 dx \quad (385)$$

Donde:

$$\left\{ K_{b1} = E \left(A_2 + \frac{A_2^2}{A_1} \right), K_{b2} = E(I_1 + I_2), K_{s1} = G_{eq} t_b l_b, K_{s2} = G\kappa(A_1 + A_2) \right\} \quad (386)$$

Denotando:

$$\gamma_c = u'(x) + m\theta(x) - nw(x), m = \frac{B_1 + B_2}{2l_b}, n = \frac{1 + \frac{A_2}{A_1}}{l_b} \quad (387)$$

Reescribiendo:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [u'(x) + m\theta(x) - nw(x)]^2 dx \quad (388)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x) u(x) dx \quad (389)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GCTB de 3 campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [u'(x) + m\theta(x) - nw(x)]^2 dx - \int_0^H f(x) u(x) dx \end{aligned} \quad (390)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & \int_0^H \{K_{b1}w'(x)\delta w'(x) + K_{b2}\theta'(x)\delta\theta'(x) + K_{s2}[u'(x) - \theta(x)][\delta u'(x) - \delta\theta(x)]\}dx \\
& + \int_0^H K_{s1}[u'(x) + m\theta(x) - nw(x)][\delta u'(x) + m\delta\theta(x) - n\delta w(x)]dx \\
& - \int_0^H f(x)\delta u(x) dx - \int_0^H u(x)\delta f(x)dx
\end{aligned} \tag{391}$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & K_{b1}[w'(x)\delta w(x)]_0^H + K_{b2}[\theta'(x)\delta\theta(x)]_0^H + \{(K_{s1} + K_{s2})u'(x) - (K_{s2} - mK_{s1})\theta(x) - nK_{s1}w(x)\}\delta\theta(x)\}_0^H \\
& + \int_0^H \{-K_{b1}w''(x) - nK_{s1}u'(x) - mnK_{s1}\theta(x) + n^2K_{s1}w(x)\}\delta w(x) \\
& + \int_0^H \{-K_{b2}\theta''(x) - (K_{s2} - mK_{s1})u'(x) + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta(x) - mnK_{s1}w(x)\}\delta\theta(x) \\
& + \int_0^H \{-(K_{s1} + K_{s2})u''(x) + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'(x) + nK_{s1}w'(x) - f(x)\}\delta u(x) - \int_0^H u(x)\delta f(x)dx
\end{aligned} \tag{392}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''(x) - nK_{s1}u'(x) - mnK_{s1}\theta(x) + n^2K_{s1}w(x) = 0 \\ -K_{b2}\theta''(x) - (K_{s2} - mK_{s1})u'(x) + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta(x) - mnK_{s1}w(x) = 0 \\ -(K_{s1} + K_{s2})u''(x) + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'(x) + nK_{s1}w'(x) - f(x) = 0 \end{array} \right\} \tag{393}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'(0) - (K_{s2} - mK_{s1})\theta(0) - nK_{s1}w(0) = 0 \end{array} \right\} \tag{394}$$

Utilizando el método de coeficientes para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -nK_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} & -mnK_{s1} \\ -(K_{s2} - mK_{s1})D & -mnK_{s1} & -K_{b2}D^2 + (K_{s2} + m^2K_{s1}) \\ -(K_{s1} + K_{s2})D^2 & nK_{s1}D & (K_{s2} - mK_{s1})D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{Bmatrix} \tag{395}$$

Es decir;

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 u_{(x)}^{''''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u_{(x)}^{''''''} \\
 w_{(x)}^{''''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w_{(x)}^{''''''} \\
 \theta_{(x)}^{''''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \theta_{(x)}^{''''''}
 \end{aligned} \right\} \\
 & = \left\{ \begin{aligned}
 -\frac{1}{(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}^{''''''} + \frac{K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}^{''} - \frac{n^2K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)} \\
 \frac{nK_{s1}}{K_{b1}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}^{''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}n(m+1)}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}' \\
 \frac{(K_{s2} - mK_{s1})}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}^{''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}n^2}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} f_{(x)}'
 \end{aligned} \right\} \quad (396)
 \end{aligned}$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned}
 u_{(z)}^{''''''} - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u_{(z)}^{''''''} \\
 = -\frac{H^2}{(K_{s1} + K_{s2})} f_{(z)}^{''''''} + \frac{K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^4 f_{(z)}^{''} - \frac{n^2K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^6 f_{(z)}
 \end{aligned} \quad (397)$$

Definiendo seis parámetros:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \\
 \eta_w = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}}, \eta_\phi = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \lambda = \frac{W_{max}H^2}{(K_{s1} + K_{s2})(1 - e^{-a})}
 \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

Reemplazando los cinco primeros parámetros:

$$u_{(z)}^{''''''} - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}^{''''''} = \frac{H^2}{(K_{s1} + K_{s2})} [-f_{(z)}^{''''''} + (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2) f_{(z)}^{''} - (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2) f_{(z)}] \quad (399)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{x}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a+az}) \quad (400)$$

Reemplazando la carga lateral e introduciendo el sexto parámetro:

$$u_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'' = -n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2 \lambda + [a^4 - (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2 + n^2 \eta_w^2) a^2 + n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2] \lambda \quad (401)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $w_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + C_6 z^4 + C_7 e^{-a+az} \\ w_{(z)} = C_8 + C_9 z + C_{10} z^2 + C_{11} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{12} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{13} z^3 + C_{14} e^{-a+az} \\ \theta_{(z)} = C_{15} + C_{16} z + C_{17} z^2 + C_{18} \cosh(\alpha\kappa z) + C_{19} \sinh(\alpha\kappa z) + C_{20} z^3 + C_{21} e^{-a+az} \end{cases} \quad (402)$$

Donde:

$$\begin{cases} C_6 = \frac{n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2}{24(\alpha\kappa)^2} \\ C_7 = \frac{a^4 - (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2 + n^2 \eta_w^2) a^2 + n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2}{a^4 [a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \end{cases} \quad (403)$$

Expresando $w_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{cases} w_{(z)} = (p_3)C_1 + (2p_3 z)C_2 + (p_8 + 3p_3 z^2)C_3 + [p_6(\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa z)]C_4 \\ \quad + [p_6(\alpha\kappa) \cosh(\alpha\kappa z)]C_5 + (p_4 z + 4p_3 z^3)C_6 + ap_1 e^{-a+az} C_7 \\ \theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (p_9 + 3z^2)C_3 + [p_7(\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa z)]C_4 \\ \quad + [p_7(\alpha\kappa) \cosh(\alpha\kappa z)]C_5 + (p_5 z + 4z^3)C_6 + ap_2 e^{-a+az} C_7 \end{cases} \quad (404)$$

Donde:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{n\eta_w^2 [(m+1)\eta_\theta^2 - a^2]}{a^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)a^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_2 = \frac{n\eta_w^2\eta_\theta^2 - (\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2)a^2}{a^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)a^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2} \\ p_3 = \frac{m+1}{n}, p_4 = \frac{24[p_3(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2) + mn\eta_w^2]}{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_5 = \frac{24[p_3 m\eta_\phi^2 + n\eta_w^2]}{n\eta_w^2\eta_\theta^2} \\ p_6 = \frac{n\eta_w^2 [(m+1)\eta_\theta^2 - (\alpha\kappa)^2]}{a^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)a^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_7 = \frac{n\eta_w^2\eta_\theta^2 - (\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2)(\alpha\kappa)^2}{a^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)a^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2} \\ p_8 = \frac{6[p_3(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2) + mn\eta_w^2]}{n\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_9 = \frac{6[p_3 m\eta_\phi^2 + n\eta_w^2]}{n\eta_w^2\eta_\theta^2} \end{cases} \quad (405)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo). Las constantes:

- Evaluamos dos condiciones de borde en la parte superior:

$$\begin{cases} \theta'_{(0)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 \\ C_4 \end{cases} = - \begin{bmatrix} 2p_3 & p_6(\alpha\kappa)^2 \\ 2 & p_7(\alpha\kappa)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{cases} p_4 \\ p_5 \end{cases} C_6 + \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases} a^2 e^{-a} C_7 \right] \quad (406)$$

- Evaluamos tres condiciones de borde en la base:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{(1)} = 0 \\ w_{(1)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (407)$$

Es decir;

$$\begin{cases} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{cases} = - \begin{bmatrix} 1 & p_9 + 3 & p_7(\alpha\kappa) \cosh(\alpha\kappa) \\ p_3 & p_8 + 3p_3 & p_6(\alpha\kappa) \cosh(\alpha\kappa) \\ 0 & K_{s1}(mp_9 - np_8) - K_{s2}p_9 & (\alpha\kappa)[K_{s1}(1 + mp_7 - np_6) - K_{s2}(1 - p_7)] \end{bmatrix}^{-1} x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2C_2 + p_7(\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa) C_4 + (p_5 + 4)C_6 + p_2 a C_7 \\ 2p_3 C_2 + p_6(\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa) C_4 + (p_4 + 4p_3)C_6 + p_1 a C_7 \\ [K_{s1}(1 + mp_2 - np_1) + K_{s2}(1 - p_2)] a e^{-a} C_7 \end{array} \right\} \quad (408)$$

- Evaluamos un desplazamiento cero en la base:

$$\{u_{(1)} = 0\} \rightarrow \{C_0 = - (C_1 + C_2 + C_3) - [C_4 \cosh(\alpha\kappa) + C_5 \sinh(\alpha\kappa)] - (C_6 + C_7)\} \quad (409)$$

4.1.11.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(z)} - nK_{s1}u'_{(z)} - mnK_{s1}\theta_{(z)} + n^2K_{s1}w_{(z)} = 0 \\ -K_{b2}\theta''_{(z)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(z)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(z)} - mnK_{s1}w_{(z)} = 0 \\ -(K_{s1} + K_{s2})u''_{(z)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'_{(z)} + nK_{s1}w'_{(z)} = 0 \end{array} \right\} \quad (410)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $w_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ w_{(z)} = C_8 + C_9 z + C_{10} z^2 + C_{11} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{12} \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ \theta_{(z)} = C_{15} + C_{16} z + C_{17} z^2 + C_{18} \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_{19} \sinh(\alpha^* \kappa z) \end{array} \right\} \quad (411)$$

Definiendo cinco parámetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \\ \eta_w = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}}, \eta_\phi = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}} \end{array} \right\} \quad (412)$$

Expresando los coeficientes de la función $w_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha^* \kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ w_{(z)} = (p_3)C_1 + (2p_3 z)C_2 + (p_8 + 3p_3 z^2)C_3 + [p_6(\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_4 + [p_6(\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \\ \theta_{(z)} = C_1 + (2z)C_2 + (p_9 + 3z^2)C_3 + [p_7(\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_4 + [p_7(\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \end{array} \right\} \quad (413)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_6 = \frac{n\eta_w^2[(m+1)\eta_\theta^2 - (\alpha\kappa)^2]}{\alpha^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)\alpha^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_7 = \frac{n\eta_w^2\eta_\theta^2 - (\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2)(\alpha\kappa)^2}{\alpha^4 - (n^2\eta_w^2 + \eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)\alpha^2 + n^2\eta_w^2\eta_\theta^2} \\ p_3 = \frac{m+1}{n}, p_8 = \frac{6[p_3(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2) + mn\eta_w^2]}{n\eta_w^2\eta_\theta^2}, p_9 = \frac{6[p_3m\eta_\phi^2 + n\eta_w^2]}{n\eta_w^2\eta_\theta^2} \end{array} \right\}$$

El momento flector y la fuerza cortante asociado al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = K_{b1} w'_{(x)} = (2p_3 K_{b1})C_2 + (6p_3 K_{b1} z)C_3 + [p_6 K_{b1} (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_4 \\ \quad + [p_6 K_{b1} (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \\ M_2 = K_{b2} \theta'_{(x)} = (2K_{b2})C_2 + (6K_{b2} z)C_3 + [p_7 K_{b2} (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_4 \\ \quad + [p_7 K_{b2} (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \\ V = (K_{s1} + K_{s2})u'_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} - nK_{s1}w_{(x)} = p_{10}C_1 + (2p_{10}z)C_2 \\ \quad + (p_{11} + 3p_{10}z^2)C_3 + [p_{12}(\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z)]C_4 + [p_{12}(\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z)]C_5 \end{array} \right\} \quad (414)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{10} = (1 + m - np_3)K_{s1}, p_{11} = (mp_9 - np_8)K_{s1} - p_9K_{s2} \\ p_{12} = (1 + mp_7 - np_6)K_{s1} - (1 - p_7)K_{s2} \end{array} \right\} \quad (415)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ w_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{1i}(z_i) \\ M_{2i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} \quad (416)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & p_3 & 2p_3 z & p_8 + 3p_3 z^2 & p_6(\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z) & p_6(\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 1 & 2 & p_9 + 3z^2 & p_7(\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z) & p_7(\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2p_3 K_{b1} & 6p_3 K_{b1} z & p_6 K_{b1} (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) & p_6 K_{b1} (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & 0 & 2K_{b2} & 6K_{b2} z & p_7 K_{b2} (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) & p_7 K_{b2} (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ 0 & p_{10} & 2p_{10} z & p_{11} + 3p_{10} z^2 & p_{12} (\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z) & p_{12} (\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z) \end{bmatrix} \quad (417)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_i) \\ w_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_{11}(h_i) \\ M_{21}(h_i) \\ V_1(h_i) \end{pmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (418)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_i) \\ w_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_{11}(h_i) \\ M_{21}(h_i) \\ V_1(h_i) \end{pmatrix} + f \quad (419)$$

Donde:

$$\left\{ t = \prod_{k=1}^n T_k(0), f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \right\} \quad (420)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ w_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ w_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{1n(0)} = 0 \\ M_{2n(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (421)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (422)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} \quad (423)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento, la deformación axial y la rotación en la parte superior de la viga:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \end{array} \right\} = - \begin{bmatrix} t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right\} \quad (424)$$

4.1.12 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)

Se desarrolla la viga GCTB de dos campos, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de una viga Euler Bernoulli extensible (viga Bernoulli debido a que solo considera el efecto de flexión de los muros y extensible debido a la extensibilidad axial de los muros de corte) y una viga de restricción a la rotación (debido al núcleo continuo resultado de la presencia de la viga de conexión). Se supone que las vigas están acopladas en paralelo por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman. Esta viga GCTB de dos campos resulta adecuada para muros de corte intermedios a altos, en donde generalmente es posible despreciar el efecto de la rigidez al corte de los muros de corte.

La viga GCTB de dos campos resulta de ignorar la deformación por corte local y de considerar $u'(x) = \theta(x)$ en la viga GCTB de tres campos. El modelo de viga GCTB de dos campos toma en cuenta dos campos cinemáticos: un movimiento transversal u y una extensibilidad axial w . Además; K_{b1} , K_{b2} y K_{s1} son la rigidez a la flexión global, la rigidez al corte global, la rigidez a la flexión local y la rigidez al corte local equivalente de las vigas de conexión, respectivamente.

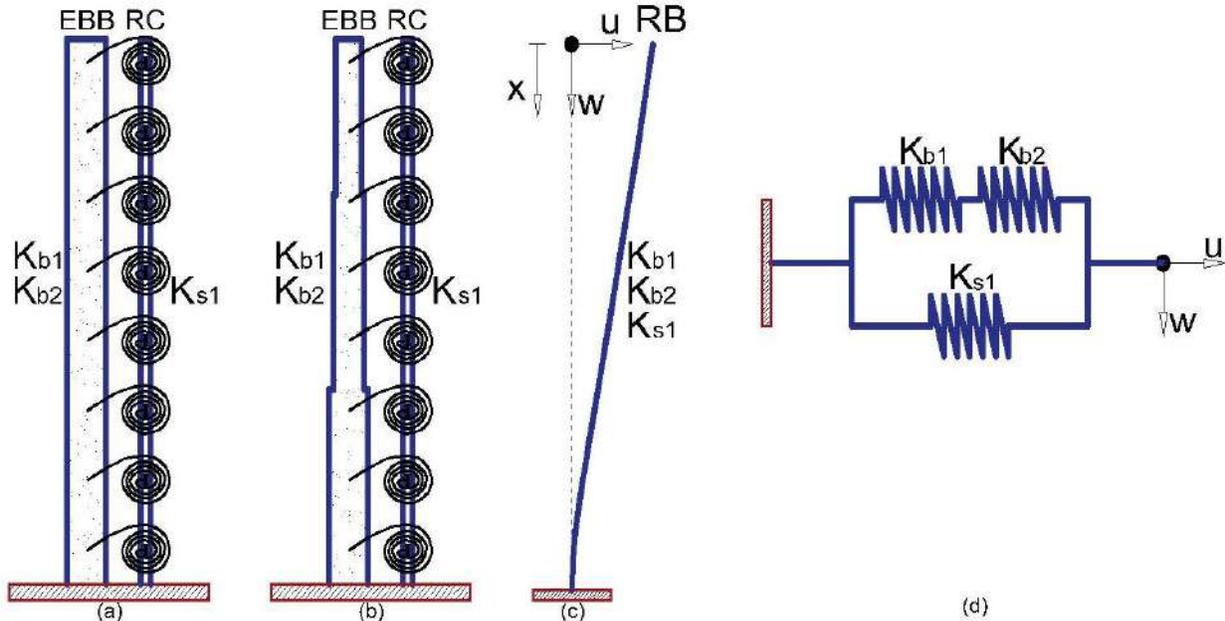


Figura 71. Viga GCTB de dos campos. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez GCTB de dos campos.

4.1.12.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de dos campos se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} u''(x)^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} \gamma_c(x)^2 dx \quad (425)$$

Donde:

$$\left\{ K_{b1} = E \left(A_2 + \frac{A_2^2}{A_1} \right), K_{b2} = E(I_1 + I_2), K_{s1} = G_{eq} t_w l_b \right\} \quad (426)$$

Denotando:

$$\gamma_c = (m + 1)u'(x) - nw(x), m = \frac{B_1 + B_2}{2l_b}, n = \frac{1 + A_2/A_1}{l_b} \quad (427)$$

Reescribiendo:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} u''(x)^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [(m + 1)u'(x) - nw(x)]^2 dx \quad (428)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (429)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GCTB de dos campos sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} u''(x)^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [(m + 1)u'(x) - nw(x)]^2 dx - \int_0^H f(x)u(x) dx \quad (430)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & \int_0^H \{K_{b1}w'_{(x)}\delta w'_{(x)} + K_{b2}u''_{(x)}\delta u''_{(x)}\}dx \\
& + \int_0^H K_{s1}[(m+1)u'_{(x)} - nw_{(x)}][(m+1)\delta u'_{(x)} - n\delta w_{(x)}]dx \\
& - \int_0^H f(x)\delta u_{(x)} dx - \int_0^H u_{(x)}\delta f(x)dx
\end{aligned} \tag{431}$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & K_{b1}[w'_{(x)}\delta w_{(x)}]_0^H + K_{b2}[u''_{(x)}\delta u'_{(x)}]_0^H \\
& + \{[-K_{b2}u''_{(x)} + (m+1)^2K_{s1}u'_{(x)} - n(m+1)K_{s1}w_{(x)}]\delta u_{(x)}\}_0^H \\
& + \int_0^H \{-K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)}\}\delta w_{(x)} \\
& + \int_0^H \{K_{b2}u''''_{(x)} - (m+1)^2K_{s1}u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w'_{(x)} - f(x)\}\delta u_{(x)} \\
& - \int_0^H u_{(x)}\delta f(x)dx
\end{aligned} \tag{432}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ K_{b2}u''''_{(x)} - (m+1)^2K_{s1}u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w'_{(x)} - f(x) = 0 \end{array} \right\} \tag{433}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ -K_{b2}u''''_{(0)} + (m+1)K_{s1}u'_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \tag{434}$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ w_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n(m+1)K_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} \\ K_{b2}D^4 - (m+1)^2K_{s1}D^2 & n(m+1)K_{s1}D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ f(x) \end{Bmatrix} \tag{435}$$

Es decir;

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x)}'''''' - \frac{K_{s1}[n^2 K_{b2} + (m+1)^2 K_{b1}]}{K_{b1} K_{b2}} u_{(x)}'''' \\ w_{(x)}'''''' - \frac{K_{s1}[n^2 K_{b2} + (m+1)^2 K_{b1}]}{K_{b1} K_{b2}} w_{(x)}'''' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_{b2}} \left[f_{(x)}'' - n^2 \frac{K_{s1}}{K_{b1}} f_{(x)} \right] \\ -n^2 \frac{K_{s1}}{K_{b1} K_{b2}} f_{(x)}' \end{array} \right\} \quad (436)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u_{(z)}'''''' - \frac{K_{s1}[n^2 K_{b2} + (m+1)^2 K_{b1}]}{K_{b1} K_{b2}} H^2 u_{(z)}'''' = \frac{H^4}{K_{b2}} \left[f_{(z)}'' - n^2 \frac{K_{s1}}{K_{b1}} H^2 f_{(z)} \right] \quad (437)$$

Definiendo tres parámetros:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{W_{max} H^4}{K_{b2}(1 - e^{-a})} \right\} \quad (438)$$

Reemplazando los dos primeros parámetros:

$$u_{(z)}'''''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'''' = \frac{H^4}{K_{b2}} \{ f_{(z)}'' - \alpha^2 [\kappa^2 - (m+1)^2] f_{(z)} \} \quad (439)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f_{(x)} = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{x}{H}} \right) \rightarrow f_{(z)} = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + az} \right) \quad (440)$$

Reemplazando la carga lateral y el tercer parámetro:

$$u_{(z)}'''''' - (\alpha\kappa)^2 u_{(z)}'''' = -\lambda \alpha^2 [\kappa^2 - (m+1)^2] + \lambda \{ \alpha^2 [\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2 \} e^{-a+az} \quad (441)$$

La expresión para $u_{(z)}$ se propone:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha\kappa z) + \frac{\lambda [\kappa^2 - (m+1)^2]}{24\kappa^2} z^4 + \frac{\lambda \{ \alpha^2 [\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2 \}}{\alpha^4 [a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a+az} \quad (442)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(1)} = \lambda \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} \right) \\ u'''_{(0)} = \lambda(1 - e^{-a}) \\ u''''_{(1)} = \lambda \left[\alpha^2(m+1)^2 \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} \right) - a \right] \end{array} \right. \quad (443)$$

Las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = -[C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \cosh(\alpha\kappa) + C_5 \sinh(\alpha\kappa)] - \lambda \left\{ \frac{1}{24} \left[1 - \frac{(m+1)^2}{k^2} \right] + \frac{\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2}{a^4[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_1 = -[2C_2 + 3C_3 + (\alpha\kappa)C_4 \sinh(\alpha\kappa) + (\alpha\kappa)C_5 \cosh(\alpha\kappa)] - \lambda \left\{ \frac{1}{6} \left[1 - \frac{(m+1)^2}{k^2} \right] + \frac{\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2}{a^3[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_2 = -C_4 \frac{(\alpha\kappa)^2}{2} - \frac{\lambda\{\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2\}}{2a^2[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} e^{-a} \\ C_3 = -\frac{(\alpha\kappa)^3}{6} [C_4 \sinh(\alpha\kappa) + C_5 \cosh(\alpha\kappa)] + \frac{\lambda}{6} \left\{ \frac{e^{-a}}{a} + \frac{(m+1)^2}{k^2} + \frac{(m+1)^2\alpha^2}{a[a^2 - (\alpha\kappa)^2]} \right\} \\ C_4 = \frac{\lambda}{(\alpha\kappa)^4} \left\{ \frac{(m+1)^2}{k^2} - e^{-a} \left[\frac{\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] - a^2}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} + 1 \right] \right\} \\ C_5 = -C_4 \tanh(\alpha\kappa) + \frac{\lambda\alpha^2(m+1)^2}{(\alpha\kappa)^5 \cosh(\alpha\kappa)} \left[\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} \right) + \frac{a}{a^2 - (\alpha\kappa)^2} \right] \end{array} \right. \quad (444)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), las constantes resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left\{ -\frac{(m+1)^2}{\alpha^3 \kappa^5 \cosh(\alpha \kappa)} \left[\frac{1}{(\alpha \kappa)} + \sinh(\alpha \kappa) \right] + \frac{(m+1)^2}{2\alpha^2 \kappa^4} + \frac{1}{8} - \frac{(m+1)^2}{8\kappa^2} \right\} \\ C_1 = -\lambda \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{6\kappa^2} \right] \\ C_2 = -\lambda \frac{(m+1)^2}{2\alpha^2 \kappa^4} \\ C_3 = 0 \\ C_4 = \lambda \frac{(m+1)^2}{\alpha^4 \kappa^6} \\ C_5 = \lambda \frac{(m+1)^2}{\alpha^3 \kappa^5 \cosh(\alpha \kappa)} \left[1 - \frac{\sinh(\alpha \kappa)}{(\alpha \kappa)} \right] \end{array} \right. \quad (445)$$

La expresión de $u_{(z)}$:

$$u_{(z)} = \lambda \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{\kappa^2} \right] \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) + \frac{(m+1)^2}{2\kappa^4 \alpha^2} \lambda (1 - z^2) - \frac{(m+1)^2}{\kappa^2} \lambda \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) - (\alpha \kappa) [\sinh(\alpha \kappa z) - \sinh(\alpha \kappa)]}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \quad (446)$$

Es decir;

$$u_{(z)} = \frac{W_{max} H^4}{\left(\frac{m+1}{n} \right)^2 K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) + \frac{(m+1)^2 W_{max} H^2}{2k^4 K_{s1}} (1 - z^2) - \frac{(m+1)^2 W_{max} H^4}{\kappa^2 K_{b2}} \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) - (\alpha \kappa) [\sinh(\alpha \kappa z) - \sinh(\alpha \kappa)]}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \quad (447)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(flexión)} = \frac{W_{max} H^4}{\left(\frac{m+1}{n} \right)^2 K_{b1} + K_{b2}} \left(\frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z + \frac{1}{8} \right) \\ u_{(corte)} = \frac{(m+1)^2 W_{max} H^2}{2k^4 K_{s1}} (1 - z^2) \\ u_{(interacción)} = -\frac{(m+1)^2 W_{max} H^4}{\kappa^2 K_{b2}} \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \kappa z - \alpha \kappa) - (\alpha \kappa) [\sinh(\alpha \kappa z) - \sinh(\alpha \kappa)]}{(\alpha \kappa)^4 \cosh(\alpha \kappa)} \right\} \end{array} \right. \quad (448)$$

Evaluando la deflexión máxima cuando $z = 0$:

$$u_{(z)} = \frac{W_{max}H^4}{8 \left[\left(\frac{m+1}{n} \right)^2 K_{b1} + K_{b2} \right]} + \frac{(m+1)^2 W_{max}H^2}{k^4 \frac{2K_{s1}}{2K_{s1}}} - \frac{(m+1)^2 W_{max}H^4}{\kappa^2 K_{b2}} \left[\frac{1 - \text{Cosh}(\alpha\kappa) + (\alpha\kappa) \sinh(\alpha\kappa)}{(\alpha\kappa)^4 \cosh(\alpha\kappa)} \right] \quad (449)$$

4.1.12.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas y suponiendo que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ K_{b2}u''''_{(x)} - (m+1)^2K_{s1}u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (450)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $w_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4 \cosh(\alpha^*\kappa z) + C_5 \sinh(\alpha^*\kappa z) \\ w_{(z)} = C_6 + C_7z + C_8z^2 + C_9 \cosh(\alpha^*\kappa z) + C_{10} \sinh(\alpha^*\kappa z) \end{array} \right\} \quad (451)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \right\} \quad (452)$$

Expresando los coeficientes de la función $w_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$w_{(z)} = \left(\frac{m+1}{n} \right) C_1 + \left[2 \left(\frac{m+1}{n} \right) z \right] C_2 + \left\{ 3 \left(\frac{m+1}{n} \right) z^2 + \left(\frac{m+1}{n} \right) \frac{6}{\alpha^{*2} [\kappa^2 - (m+1)^2]} \right\} C_3 - \left\{ \frac{\alpha^*\kappa}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \sinh(\alpha^*\kappa z) \right\} C_4 - \left\{ \frac{\alpha^*\kappa}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \cosh(\alpha^*\kappa z) \right\} C_5 \quad (453)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{1(z)} = K_{b1} \theta'_{(z)} = (2K_{b1})C_2 + \left[6 \left(\frac{m+1}{n} \right) K_{b1} z \right] C_3 - \left\{ \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} \right\} C_4 \\ \quad - \left\{ \frac{(\alpha^* \kappa)^2}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} \right\} C_5 \\ M_{r(z)} = K_{b2} u''_{(x)} = (2K_{b2})C_2 + (6K_{b2}z)C_3 + [(\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b2}] C_4 + [(\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b2}] C_5 \\ V_{(z)} = K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + K_{b2} u'''_{(x)} = \left[6 \left(\frac{m+1}{n} \right)^2 K_{b1} + K_{b2} \right] C_3 \end{array} \right\} \quad (454)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ w_i(z_i) \\ M_1(z_i) \\ M_r(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} \quad (455)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 \\ 0 & \left(\frac{m+1}{n} \right) & 2 \left(\frac{m+1}{n} \right) z & 3 \left(\frac{m+1}{n} \right) z^2 + \left(\frac{m+1}{n} \right) \frac{6}{\alpha^{*2} [\kappa^2 - (m+1)^2]} \\ 0 & 0 & 2K_{b1} & 6 \left(\frac{m+1}{n} \right) K_{b1} z \\ 0 & 0 & 2K_{b2} & 6K_{b2} z \\ 0 & 0 & 0 & 6 \left(\frac{m+1}{n} \right)^2 K_{b1} + K_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\alpha^* \kappa z) & \sinh(\alpha^* \kappa z) \\ (\alpha^* \kappa) \sinh(\alpha^* \kappa z) & (\alpha^* \kappa) \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ -\frac{\alpha^* \kappa}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \sinh(\alpha^* \kappa z) & -\frac{\alpha^* \kappa}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \cosh(\alpha^* \kappa z) \\ -\frac{(\alpha^* \kappa)^2}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} & -\frac{(\alpha^* \kappa)^2}{n(m+1)} [\kappa^2 - (m+1)^2] \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b1} \\ (\alpha^* \kappa)^2 \cosh(\alpha^* \kappa z) K_{b2} & (\alpha^* \kappa)^2 \sinh(\alpha^* \kappa z) K_{b2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (456)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (457)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} + f \quad (458)$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{pmatrix} \quad (459)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{pmatrix} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ -K_{b2}u''_{(0)} + (m+1)^2K_{s1}u'_{(0)} - n(m+1)K_{s1}w_{(0)} = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln}(0) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{pmatrix} \quad (460)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (461)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (462)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento, su derivada y la rotación en la parte superior de la viga:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (463)$$

4.1.13 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB)

Se desarrolla la viga GCTB de un campo, el cual considera que la estructura consiste en un acoplamiento en paralelo de una viga Euler Bernoulli (viga Bernoulli debido a que solo considera el efecto de flexión de los muros) y una viga de restricción a la rotación (debido al núcleo continuo resultado de la presencia de la viga de conexión). Se supone que las vigas están acopladas en paralelo por medio de miembros axialmente rígidos que solo transmiten las fuerzas horizontales y no se deforman. Esta viga GCTB de 1 campo resulta adecuada para muros de corte en donde el efecto de las deformaciones axiales y las deformaciones por cortante son despreciables.

El modelo de viga GCTB de un campos toma en cuenta como campo cinemático al movimiento transversal (u). K_{b1} y K_{s2} ; son la rigidez a la flexión y la rigidez equivalente de las vigas de conexión, respectivamente.

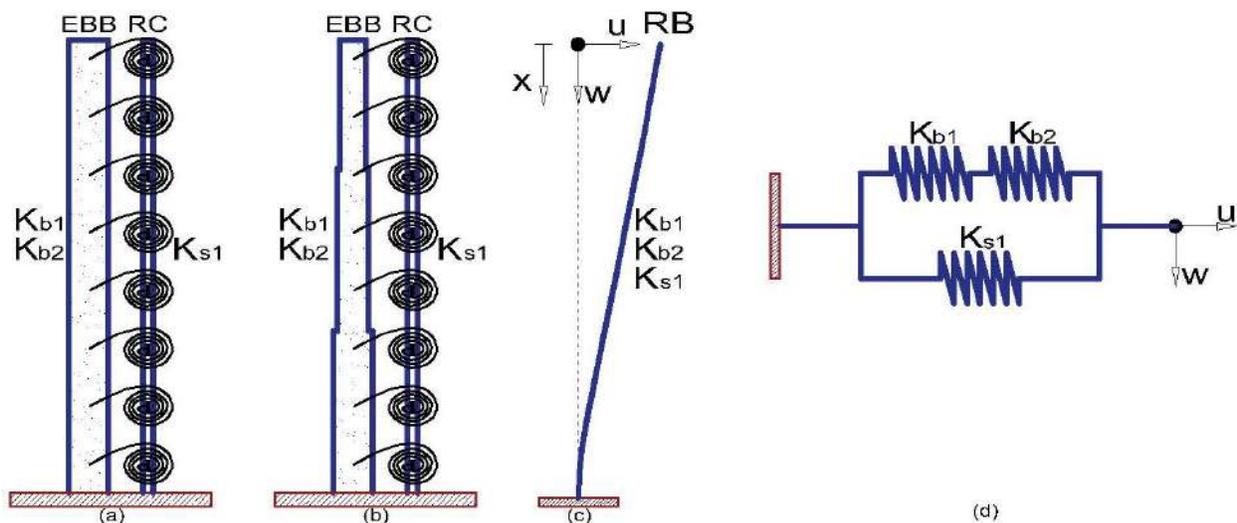


Figura 72. Viga GCTB de un campo. a) Caso 1, b) Caso 2 y c) RB equivalente y d) Idealización de la rigidez GCTB de un campo.

4.1.13.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de un campo se expresa como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_s \gamma_c(x)^2 dx \quad (464)$$

Donde:

$$\{K_b = E(I_1 + I_2), K_s = G_{eq} t_w l_b\} \quad (465)$$

Denotando:

$$\gamma_c = (m + 1)u'_{(x)}, m = \frac{B_1 + B_2}{2l_b} \quad (466)$$

Reescribiendo:

$$V = \frac{1}{2}K_b u''_{(x)}{}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^H (m + 1)^2 K_s u'_{(x)}{}^2 dx \quad (467)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = \int_0^H f(x)u_{(x)} dx \quad (468)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GCTB de un campo sometido a una distribución de carga lateral general se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''_{(x)}{}^2 + (m + 1)^2 K_s u'_{(x)}{}^2] dx - \int_0^H f(x)u_{(x)} dx \quad (469)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo sobre el que actúa una carga transversal se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta\mathcal{U} = \int_0^H \{K_b u''_{(x)} \delta u''_{(x)} + (m + 1)^2 K_s u'_{(x)} \delta u'_{(x)}\} dx - \int_0^H f(x) \delta u_{(x)} dx - \int_0^H u_{(x)} \delta f(x) dx \quad (470)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & [K_b u''_{(x)} \delta u'_{(x)}]_0^H - \{[K_b u'''_{(x)} - (m + 1)^2 K_s u'_{(x)}] \delta u_{(x)}\}_0^H \\ & + \int_0^H [K_b u''''_{(x)} - (m + 1)^2 K_s u''_{(x)} - f(x)] \delta u_{(x)} dx - \int_0^H u_{(x)} \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (471)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$K_b u''''(x) - (m + 1)^2 K_s u''(x) - f(x) = 0 \quad (472)$$

Condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(0) = 0 \\ K_b u'''(0) - (m + 1)^2 K_s u'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (473)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$K_b u''''(z) - (m + 1)^2 K_s H^2 u''(z) - H^4 f(z) = 0 \quad (474)$$

Definiendo dos parámetros:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{(m + 1)^2 K_s}{K_b}}, \lambda = \frac{W_{max} H^4}{K_b (1 - e^{-a})} \right\} \quad (475)$$

Reemplazando el primer parámetro:

$$u''''(z) - \alpha^2 u''(z) = \frac{H^4}{K_b} f(z) \quad (476)$$

Asumiendo una carga lateral general (Miranda, 1999):

$$f(x) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} \left(1 - e^{-a + \frac{x}{H}}\right) \rightarrow f(z) = \frac{W_{max}}{1 - e^{-a}} (1 - e^{-a + az}) \quad (477)$$

Reemplazando la carga lateral y el segundo parámetro:

$$u''''(z) - \alpha^2 u''(z) \lambda = (1 - e^{-a + az}) \quad (478)$$

La expresión para $u(z)$ se propone:

$$u(z) = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\alpha z) + C_3 \sinh(\alpha z) - \frac{\lambda}{2\alpha^2} z^2 - \frac{\lambda}{a^2(a^2 - \alpha^2)} e^{-a + az} \quad (479)$$

Las constantes se obtienen de evaluar las condiciones de contorno relevantes (el origen de x está en la parte superior del modelo):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(x)} - \alpha^2 u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (480)$$

Las constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda \left[\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - \alpha^2)} \right] - (C_1 + C_2 \text{Cosh}\alpha + C_3 \text{Senha}) \\ C_1 = -\lambda \left(\frac{e^{-\alpha}}{\alpha\alpha^2} \right), C_2 = \frac{\lambda}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2 - \alpha^2} \right) \\ C_3 = \frac{1}{\alpha \text{Cosh}\alpha} \left\{ \lambda \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha(\alpha^2 - \alpha^2)} \right] - (C_1 + C_2 \alpha \text{Senha}) \right\} \end{array} \right\} \quad (481)$$

Para el caso de una carga lateral uniformemente distribuida ($a \rightarrow \infty$), la expresión de $u_{(z)}$ resulta:

$$u_{(z)} = \lambda \left(\frac{1 - z^2}{2\alpha^2} \right) + \lambda \left\{ \frac{\alpha [\sinh(\alpha z) - \sinh \alpha] - 1 + \cosh[\alpha(z - 1)]}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right\} \quad (482)$$

Es decir;

$$u_{(z)} = \frac{W_{max} H^2}{K_s} \left(\frac{1 - z^2}{2} \right) + \frac{W_{max} H^4}{K_b} \left\{ \frac{\alpha [\sinh(\alpha z) - \sinh \alpha] - 1 + \cosh[\alpha(z - 1)]}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right\} \quad (483)$$

Esta expresión muestra claramente cómo interactúan los contribuyentes a flexión y a corte; produciendo una interacción entre ellos.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(corte)} = \frac{W_{max} H^2}{K_s} \left(\frac{1 - z^2}{2} \right) \\ u_{(interacción)} = \frac{W_{max} H^4}{K_b} \left\{ \frac{\alpha [\sinh(\alpha z) - \sinh \alpha] - 1 + \cosh[\alpha(z - 1)]}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right\} \end{array} \right\} \quad (484)$$

Evaluando la deflexión máxima cuando $z = 0$:

$$u_{(0)} = \frac{W_{max} H^2}{2K_s} - \frac{W_{max} H^4}{K_b} \left[\frac{1 + \alpha \sinh \alpha - \cosh \alpha}{\alpha^4 \cosh \alpha} \right] \quad (485)$$

Al ser idéntica en solución la viga GCTB de dos campos y la viga CTB clásica, las conclusiones obtenidas para la viga CTB clásica son también aplicables para la viga GCTB de un campo.

4.1.13.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial y dado que se supone que las cargas externas actúan en los pisos y no a lo largo de la altura del piso, es posible escribirlo de la siguiente manera:

$$K_b u_{(x)}'''' - (m + 1)^2 K_s u_{(x)}'' = 0 \quad (486)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\alpha^* z) + C_3 \sinh(\alpha^* z) \\ u'_{(z)} = C_1 + C_2 \alpha^* \sin(\alpha^* z) + C_3 \alpha^* \cosh(\alpha^* z) \end{cases} \quad (487)$$

Donde:

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{(m + 1)^2 K_s}{K_b}} \quad (488)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_b u_{(z)}'' = \alpha^{*2} \cosh(\alpha^* z) K_b C_2 + \alpha^{*2} \sinh(\alpha^* z) K_b C_3 \\ V_{(z)} = K_b u_{(z)}''' - (m + 1)^2 K_s u'_{(z)} = (-\alpha^{*2} K_b) C_1 \end{cases} \quad (489)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (490)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cosh(\alpha^* z) & \sinh(\alpha^* z) \\ 0 & 1 & \alpha^* \sin(\alpha^* z) & \alpha^* \cosh(\alpha^* z) \\ 0 & 0 & \alpha^{*2} \cosh(\alpha^* z) K_b & \alpha^{*2} \sinh(\alpha^* z) K_b \\ 0 & -\alpha^{*2} K_b & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (491)$$

- **Análisis estático bajo cargas estáticas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales.

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \quad (492)$$

Expresándolo en forma simplificada:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + f \quad (493)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \\ f = - \sum_{s=0}^n \left[\prod_{k=s+1}^n T_k(0) \right] F_s - F_n \end{array} \right\} \quad (494)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_b u''_{(0)} - (m+1)^2 K_s u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (495)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (496)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (497)$$

Sustituyendo las fuerzas internas se obtienen el desplazamiento y su derivada en la parte superior:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,3} & t_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (498)$$

4.2 Análisis dinámico de los sistemas estructurales individuales

El objetivo de esta sección es desarrollar el análisis dinámico de las vigas de reemplazo presentadas en la sección anterior. Mediante el análisis de vibración libre se calcula las frecuencias naturales de los modos de vibración principales y se construyen gráficos que serán muy útiles para la aplicación práctica en las oficinas de ingeniería.

- **Caso 1:** Se considera un análisis continuo porque el método utilizado se basa únicamente en el método continuo y se asume una carga vertical uniformemente distribuida en la altura del elemento.

Para tener en cuenta que la carga vertical se aplica a nivel de los pisos y que no se distribuye en la altura del edificio, Zalka (2020) utilizando el teorema de de Dunkerley propone considerar un factor de corrección en el análisis de dinámico.

$$r_f = \frac{n}{n + 2.06} \quad (499)$$

Donde n es el número de pisos del edificio. Es cierto que este efecto es despreciable en edificios altos, pero para los edificios medianos y bajos el no considerar este coeficiente de corrección no es conservador debido a que el centroide de la carga vertical total se desplaza hacia abajo resultando en valores de periodos de vibración menores al periodo de vibración real.

La principal desventaja es que solo es aplicable a estructuras en donde la sección transversal es uniforme en altura, y su principal ventaja es que se obtienen soluciones continuas de forma cerrada que permiten realizar análisis paramétricos.

- **Caso 2:** Se considera un análisis discreto porque los métodos utilizados son el método continuo y el método de matriz de transferencia, y se asume una carga vertical puntual arbitraria aplicada a nivel de los pisos.

La principal desventaja es que no se obtienen soluciones continuas cerradas que permitan realizar análisis paramétricos, y su principal ventaja es que permite analizar estructuras no uniformes con masa y rigidez distribuidas en forma variable a lo largo de la altura y/o para estructuras donde las cargas se aplican a nivel de los pisos; es decir se considera un caso de análisis general porque incluso sirve como verificación del caso 1.

4.2.1 Viga de flexión de un campo (EBB)

4.2.1.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo EBB de un campo son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_b (u'')^2 dx, T = \frac{1}{2} \int_0^H \gamma_u (\dot{u})^2 dx \quad (500)$$

Donde:

$$\gamma_u = \sum_{i=1}^n \rho A_i \quad (501)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga EBB de un campo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}^2 - K_b u''_{(x,t)}{}^2] dx \quad (502)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} - K_b u''_{(x,t)} \delta u''_{(x,t)}] dx \quad (503)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta \mathcal{U} = [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_b u'''_{(x,t)}] \delta u_{(x,t)} \Big|_0^H - [K_b u''_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} \Big|_0^H - \int_0^H [\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_b u''''_{(x,t)}] \delta u \quad (504)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_b u''''_{(x,t)} = 0 \quad (505)$$

Y condiciones de borde:

$$\begin{cases} u'''_{(H)} = 0 \\ u''_{(H)} = 0 \end{cases} \quad (506)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$u_{(x,t)} = \phi_{(x)}q_{(t)} \quad (507)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares:

$$\frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{K_b}{\gamma_u} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi_{(x)}'''' = 0 \quad (508)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ K_b \phi_{(x)}'''' - \gamma_u w^2 \phi_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (509)$$

Donde la primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la longitud por la variable $z = x/H$, se obtiene:

$$\phi_{(z)}'''' - \left(\frac{\gamma_u w^2 H^4}{K_b} \right) \phi_{(z)} = 0 \quad (510)$$

La ecuación se reescribe:

$$\phi_{(z)}'''' - \delta^4 \phi_{(z)} = 0 \quad (511)$$

Donde

$$\delta^2 = \sqrt{\frac{\gamma_u H^4}{K_b} w^2} \quad (512)$$

Se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\phi(z) = C_1 \cos(\delta z) + C_2 \sin(\delta z) + C_3 \cosh(\delta z) + C_4 \sinh(\delta z) \quad (513)$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Se consideran las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi'(0) = 0 \\ \phi''(1) = 0 \\ \phi'''(1) = 0 \end{cases} \quad (514)$$

Escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos \delta & -\sin \delta & \cosh \delta & \sinh \delta \\ \sin \delta & -\cos \delta & \sinh \delta & \cosh \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (515)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene la ecuación característica modal, cuyas raíces definen un conjunto de soluciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones de borde.

$$\cos \delta \cosh \delta + 1 = 0 \quad (516)$$

El valor propio δ se deriva al resolver numéricamente la ecuación característica. Conociendo el valor de δ se obtienen las frecuencias y los periodos de vibración del modelo.

$$w = \frac{\delta}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H^2}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \quad (517)$$

- **Valores propios**

Resolviendo numéricamente el valor de δ , se calcula las frecuencias y periodos de vibración.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = 1.87510 \rightarrow w_1 = \frac{3.51602}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_1 = 1.78702H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \delta_2 = 4.69409 \rightarrow w_2 = \frac{22.03449}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_2 = 0.28515H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \delta_3 = 7.85476 \rightarrow w_3 = \frac{61.69721}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_3 = 0.10184H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \end{array} \right. \quad (518)$$

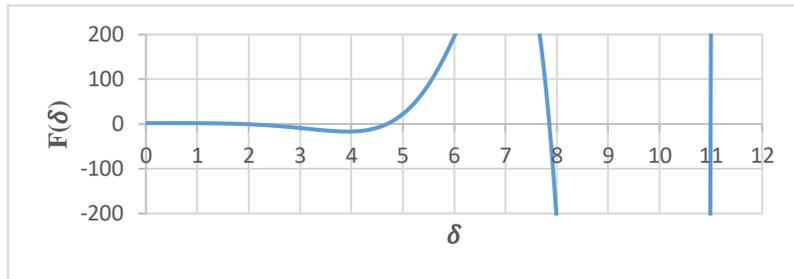


Figura 73. Función característica de la viga EBB.

- **Formas de modo**

Considerando las primeras condiciones de borde, normalizando a 1 en la parte superior y escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos \delta & -\sin \delta & \cosh \delta & \sinh \delta \\ \cos \delta & \sin \delta & \cosh \delta & \sinh \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (519)$$

Despejando el vector de coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos \delta & -\sin \delta & \cosh \delta & \sinh \delta \\ \cos \delta & \sin \delta & \cosh \delta & \sinh \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (520)$$

Luego de algunas manipulaciones simples:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-\sin \delta + \sinh \delta + \eta(\cos \delta - \cosh \delta)} \begin{Bmatrix} \eta \\ -1 \\ -\eta \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (521)$$

Donde

$$\eta = \frac{\sinh \delta + \sin \delta}{\cos \delta + \cosh \delta} \quad (522)$$

Reemplazando estos coeficientes, se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\phi_{(z)} = \frac{-\sin \delta z + \sinh \delta z + \eta(\cos \delta z - \cosh \delta z)}{-\sin \delta + \sinh \beta + \eta(\cos \delta - \cosh \delta)} \quad (523)$$

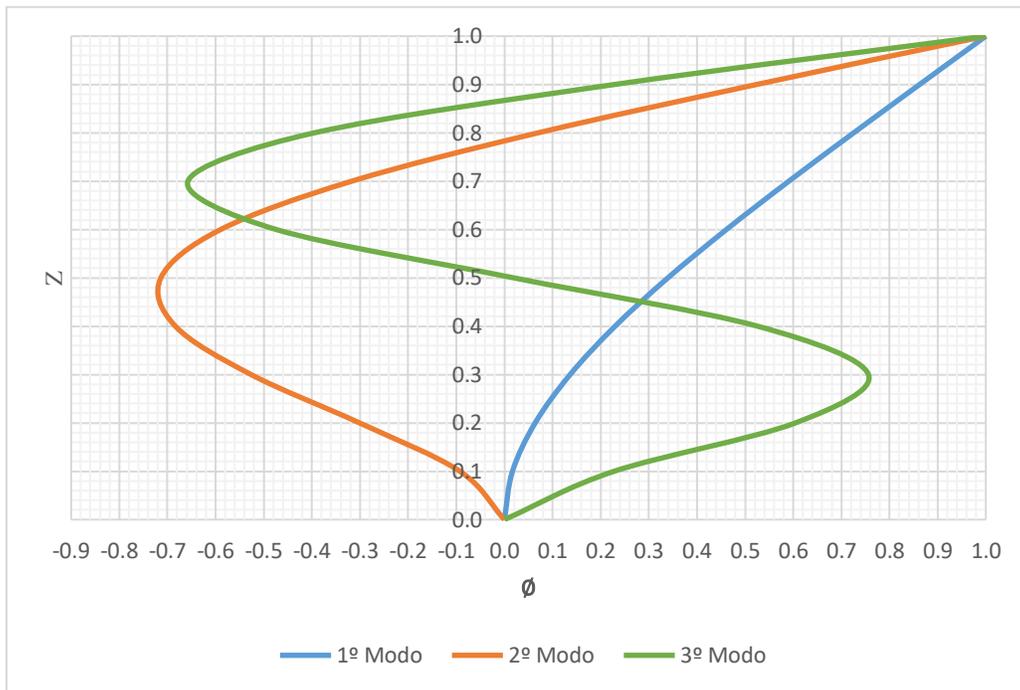


Figura 74. Formas naturales de la vibración de flexión para los primeros tres modos de vibración.

4.2.1.2 Caso 2

Considerando las masas concentradas a nivel de los pisos y analizando el equilibrio dinámico para la masa m_i , la fuerza inercial es:

$$F_i = m_i \ddot{u}_i = m_i w^2 u_i \quad (524)$$

Por equilibrio:

$$V_{i+1} = V_i + m_i \omega^2 u_i \quad (525)$$

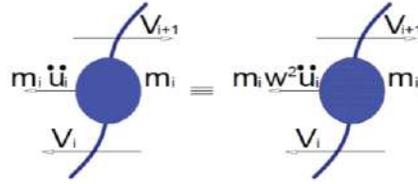


Figura 75. Fuerzas dinámicas en el nivel i-ésimo.

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (526)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (527)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (528)$$

Para el primer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u'_1(0) \\ M_1(0) \\ V_1(0) \end{Bmatrix} = T_{w1}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (529)$$

Para el segundo piso:

$$\begin{Bmatrix} u_2(0) \\ u'_2(0) \\ M_2(0) \\ V_2(0) \end{Bmatrix} = T_{w2}(0)T_{w1}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (530)$$

Para el tercer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_3(0) \\ u'_3(0) \\ M_3(0) \\ V_3(0) \end{Bmatrix} = T_{w3}(0)T_{w2}(0)T_{w1}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (531)$$

Para el n-ésimo piso (parte superior de la viga):

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = T_{wn}(0) \dots T_{w2}(0)T_{w1}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (532)$$

Expresando la ecuación entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (533)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (534)$$

Reemplazando este parámetro:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (535)$$

Esta ecuación expresa la relación entre las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(0)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{cases} \quad (536)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (537)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (538)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.2 Viga de corte de un campo (SB)

4.2.2.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo SB de un campo son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_S u'_{(x,t)}{}^2 dx, T = \frac{1}{2} \int_0^H \gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 dx \quad (539)$$

Donde:

$$\gamma_u = \rho A \quad (540)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga SB de un campo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 - K_S u'_{(x,t)}{}^2] dx \quad (541)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} - K_S u'_{(x,t)} \delta u'_{(x,t)}] dx \quad (542)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta \mathcal{U} = [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} - K_S u'_{(x,t)}] \delta u_{(x,t)} \Big|_0^H - \int_0^H [\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - K_S u''_{(x,t)}] \delta u \quad (543)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - K_S u''_{(x,t)} = 0 \quad (544)$$

Y condición de borde:

$$u'_{(H)} = 0 \quad (545)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$u_{(x,t)} = \phi_{(x)}q_{(t)} \quad (546)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} - \frac{K_s}{\gamma_u} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi''_{(x)} = 0 \quad (547)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ K_s \phi''_{(x)} + \gamma_u w^2 \phi_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (548)$$

Donde la primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\phi''_{(z)} + \left(\frac{\gamma_u w^2 H^2}{K_s} \right) \phi_{(z)} = 0 \quad (549)$$

La ecuación se reescribirse:

$$\phi''_{(z)} + \delta^2 \phi_{(z)} = 0 \quad (550)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^2}{K_s}} w^2 \quad (551)$$

Se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\phi_{(z)} = C_1 \cos(\delta z) + C_2 \sin(\delta z) \quad (552)$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Se consideran las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} \phi_{(0)} = 0 \\ \phi'_{(1)} = 0 \end{cases} \quad (553)$$

Escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (554)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene la ecuación característica modal, cuyas raíces definen un conjunto de soluciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones de borde.

$$\cos(\delta) = 0 \rightarrow \delta = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (555)$$

Conociendo el valor de δ se obtienen las frecuencias y los periodos de vibración del modelo.

$$w = \frac{\delta}{H} \sqrt{\frac{K_s}{\gamma_u}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_s}} \quad (556)$$

- **Valores propios**

Resolviendo el valor de δ , se calcula las frecuencias y periodos de vibración.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = 1.57080 \rightarrow w_1 = \frac{2.46740}{H} \sqrt{\frac{K_s}{\gamma_u}} \rightarrow T_1 = 4.00000H \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_s}} \\ \delta_2 = 4.71239 \rightarrow w_2 = \frac{22.20661}{H} \sqrt{\frac{K_s}{\gamma_u}} \rightarrow T_2 = 1.33333H \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_s}} \\ \delta_3 = 7.85398 \rightarrow w_3 = \frac{61.68503}{H} \sqrt{\frac{K_s}{\gamma_u}} \rightarrow T_3 = 0.80000H \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_s}} \end{array} \right. \quad (557)$$

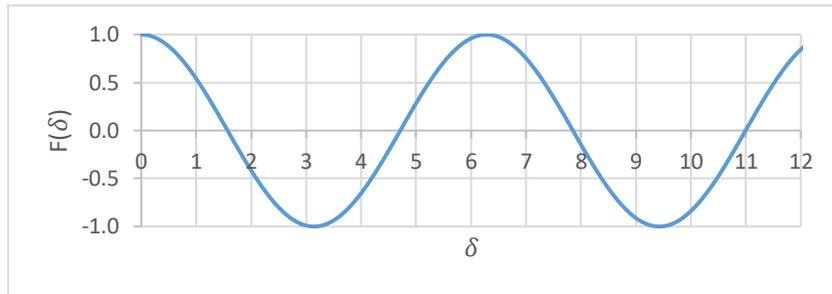


Figura 76. Función característica de la viga SB.

- **Formas de modo**

Considerando las primeras condiciones de borde, normalizando a 1 en la parte superior y escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \delta & \sin \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (558)$$

Despejando el vector de coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \delta & \sin \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (559)$$

Luego de algunas manipulaciones simples:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sin \delta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (560)$$

Reemplazando estos coeficientes, se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\phi_{(z)} = \frac{\sin \delta z}{\sin \delta} \quad (561)$$

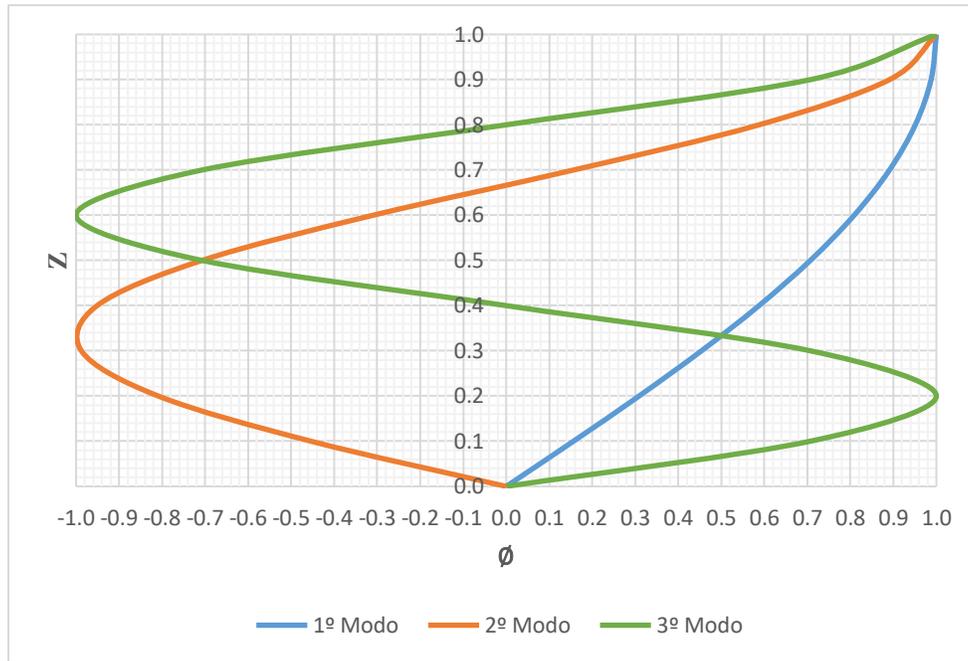


Figura 77. Formas naturales de la vibración de corte para los primeros tres modos de vibración.

4.2.2.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_i w^2 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \end{Bmatrix} \quad (562)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \end{Bmatrix} \quad (563)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_i w^2 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (564)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (565)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (566)$$

Reemplazando este parámetro:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (567)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 2x2 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{Bmatrix} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_{(h_1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{Bmatrix} \quad (568)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u'_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (569)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\{0\} = t_{2,2}u'_1(h_1) \quad (570)$$

Igualando a cero $t_{2,2}$ se obtienen las frecuencias angulares de la viga.

4.2.3 Viga Timoshenko de dos campos (TB)

4.2.3.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo TB de dos campos son:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'_{(x,t)}{}^2 + K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]{}^2\} dx \\ T &= \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2] dx \end{aligned} \quad (571)$$

Donde:

$$\{\gamma_u = \rho A, \gamma_\theta = \rho I\} \quad (572)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga TB de dos campos se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \{\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 - K_b \theta'_{(x,t)}{}^2 - K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]{}^2\} dx \quad (573)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} &= \int_0^H \{\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} \delta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_b \theta'_{(x,t)} \delta \theta'_{(x,t)} \\ &\quad - K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] [\delta \theta_{(x,t)} - \delta u'_{(x,t)}]\} dx \end{aligned} \quad (574)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} &= \{\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]\} \delta u_{(x,t)} \Big|_0^H + \{\gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_b \theta'_{(x,t)}\} \delta \theta_{(x,t)} \Big|_0^H \\ &\quad - \int_0^H \{\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_s [\theta'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}]\} \delta u \\ &\quad - \int_0^H \{\gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_b \theta''_{(x,t)} + K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]\} \delta \theta \end{aligned} \quad (575)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_s [\theta'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}] = 0 \\ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_b \theta''_{(x,t)} + K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] = 0 \end{array} \right\} \quad (576)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{(H)} - u'_{(H)} = 0 \\ K_b \theta'_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \quad (577)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \\ \theta_{(x,t)} = \lambda_{(x)} q_{(t)} \end{array} \right\} \quad (578)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{[-K_s \phi''_{(x)} + K_s \lambda'_{(x)}]}{\gamma_u \phi_{(x)}} = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{[-K_b \lambda''_{(x)} - K_s \phi'_{(x)} + K_s \lambda_{(x)}]}{\gamma_\theta \lambda_{(x)}} = 0 \end{array} \right\} \quad (579)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ K_s \phi''_{(x)} - K_s \lambda'_{(x)} + w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \\ K_b \lambda''_{(x)} + K_s \phi'_{(x)} - K_s \lambda_{(x)} + w^2 \gamma_\theta \lambda_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (580)$$

Donde la primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Despejando $\lambda'_{(x)}$, derivando dos veces y reemplazando:

$$\phi_{(x)}'''' + w^2 \left(\frac{\gamma_u}{K_s} + \frac{\gamma_\theta}{K_b} \right) \phi_{(x)}'' + \left(\frac{w^4 \gamma_u \cdot \gamma_\theta}{K_b K_s} - \frac{\gamma_u w^2}{K_b} \right) \phi_{(x)} = 0 \quad (581)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la longitud por la variable $z = x/H$, la ecuación se puede expresar como:

$$\phi_{(z)}'''' + \left[H^2 w^2 \left(\frac{\gamma_u}{K_s} + \frac{\gamma_\theta}{K_b} \right) \right] \phi_{(z)}'' + \left[\frac{H^4 \gamma_u w^2}{K_b K_s} (w^2 \gamma_\theta - K_s) \right] \phi_{(z)} = 0 \quad (582)$$

La ecuación se reescribe:

$$\phi_{(z)}'''' + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] \phi_{(z)}'' + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] \phi_{(z)} = 0 \quad (583)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \mu = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\rho I}{\rho A}}, \delta = \sqrt{\frac{\rho A H^4}{K_b} w^2} \right\} \quad (584)$$

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el polinomio característico:

$$P_{(r)} = r^4 + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] r^2 + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] = 0 \quad (585)$$

Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; \quad i = 1, 2 \quad (586)$$

Reescribimos el polinomio característico:

$$P_{(r)} = q^2 + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] q + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] = 0 \quad (587)$$

Definimos un autovalor crítico:

$$\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) = 0 \rightarrow \delta_c^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2} \quad (588)$$

Se presentan dos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva una raíz real negativa.

$$\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) < 0 \rightarrow \delta^2 < \frac{\alpha^2}{\mu^2} \rightarrow \delta < \delta_{cr} \quad (589)$$

- Caso 2: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales negativas.

$$\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) > 0 \rightarrow \delta^2 > \frac{\alpha^2}{\mu^2} \rightarrow \delta > \delta_{cr} \quad (590)$$

Definimos q_i de tal manera que:

$$q_1 < q_2 \quad (591)$$

De tal forma que $q_1 < 0$ y que $q_2 > 0$ para $\delta > \delta_{cr}$ y $q_2 < 0$ para $\delta < \delta_{cr}$.

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$q_{1,2} = \frac{-\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right)\right] \pm \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right)\right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right)\right]}}{2} \quad (592)$$

- **Influencia de la relación ζ =altura/espesor del muro de corte en las propiedades dinámicas**

Consideraremos al muro de corte como una viga Timoshenko con una sección transversal rectangular uniforme y con una relación de Poisson de 0.20 para el concreto.

Un coeficiente de corrección por corte adecuado sigue siendo tema de investigación. Sin embargo G. R. Cowper (1966); basado en la relación entre la deformación cortante promedio en una sección y la deformación cortante en el centroide, propuso el siguiente valor:

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (593)$$

Recientemente S. Ali Faghidian (2017); basándose en dos enfoques elastostáticos para formulaciones unificadas propuso un coeficiente de corrección por corte innovador:

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + \nu \left(11 - \frac{2}{1 + 2\zeta^2} \right)} \quad (594)$$

Como puede observarse en la figura 78, el coeficiente de corrección por corte de Faghidian es prácticamente idéntico al propuesto por Cowper para muros de corte típicos. En este proyecto de investigación se utilizará como factor de corrección por corte al propuesto por Cowper ($k=0.845070$).

La relación entre el módulo de Young E y el módulo de corte G:

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2(1 + \nu)} = 0.416667 \quad (595)$$

Teniendo en cuenta estas dos consideraciones, los parámetros que controlan el comportamiento dinámico resultan ser dependientes únicamente de la relación altura/ancho del muro de corte.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}} = \sqrt{12} \frac{H}{L} \sqrt{\frac{kG}{E}} = 2.055566 \frac{H}{L} = 2.055566R \\ \mu = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\rho A}{\rho I}} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\rho A}{\rho I}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{\frac{H}{L}} = 0.288675 \frac{1}{R} \end{array} \right. \quad (596)$$

Donde R se define como el parámetro que relaciona la altura/ancho del muro estructural.

$$R = \frac{H}{L} \quad (597)$$

Como puede observarse, los parámetros que gobiernan el comportamiento dinámico son dependientes solo de la variable R. Es decir, el comportamiento en el modelo continuo solo depende del parámetro R.

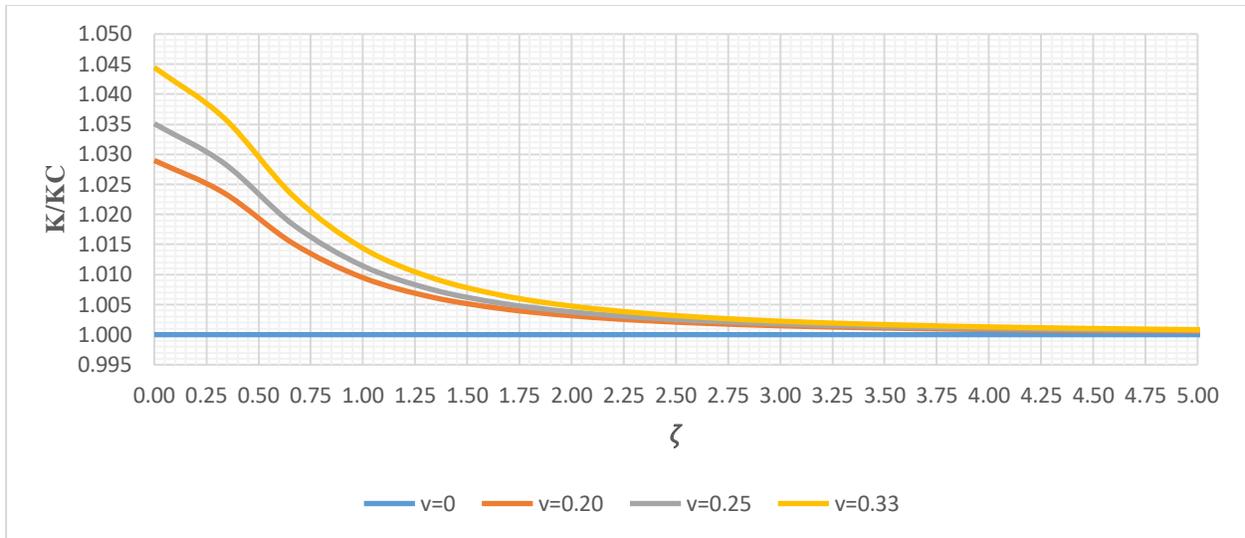


Figura 78. Relación entre el coeficiente de cortante de Faghidian y Cowper.

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Normalizando por la variable $z = x/H$ las dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi''_{(z)} - H\lambda'_{(z)} + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \phi_{(z)} = 0 \\ H\lambda''_{(z)} + \alpha^2 \phi'_{(z)} + (\delta^2 \mu^2 - \alpha^2) H\lambda_{(z)} = 0 \end{array} \right\} \quad (598)$$

La solución será de la forma:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} H\lambda_{(z)} \\ \phi_{(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} e^{rz} \quad (599)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación, se obtienen dos ecuaciones homogéneas que escritas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} -r & \left(r^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \\ r^2 + (\delta^2 \mu^2 - \alpha^2) & \alpha^2 r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (600)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$P_{(r)} = r^4 + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] r^2 + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] = 0 \quad (601)$$

Para todas las raíces, la ecuación implica:

$$\begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} r_i^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \\ r_i \end{bmatrix} C, i = 1, 2, 3, 4 \quad (602)$$

Donde C es una constante arbitraria. Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases}; i = 1, 2 \quad (603)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$q^2 + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] q + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] = 0 \quad (604)$$

Se demostró que las raíces son siempre reales. Reescribiendo la solución completa:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} H\lambda_{(z)} \\ \phi_{(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} e^{rz} = \sum_{i=1}^4 C_i \begin{bmatrix} r_i^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \\ r_i \end{bmatrix} e^{r_i z} \quad (605)$$

Sustituyendo esta ecuación completa en las condiciones de borde, se obtienen:

- En la base (z=0):

$$\begin{cases} \phi_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^4 C_i r_i = 0 \\ \phi'_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^4 C_i r_i^2 = 0 \end{cases} \quad (606)$$

- En la parte superior (z=1):

$$\begin{cases} H\lambda_{(1)} - \phi'_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^4 C_i e^{r_i} = 0 \\ H\lambda'_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^4 C_i r_i \left(r_i^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right) e^{r_i} = 0 \end{cases} \quad (607)$$

Definiendo:

$$D_i = r_i^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}; i = 1, 2 \quad (608)$$

Escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{q_1} & -\sqrt{q_1} & \sqrt{q_2} & -\sqrt{q_2} \\ q_1 & q_1 & q_2 & q_2 \\ e^{\sqrt{q_1}} & e^{-\sqrt{q_1}} & e^{\sqrt{q_2}} & e^{-\sqrt{q_2}} \\ \sqrt{q_1}D_1e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1}D_1e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2}D_2e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2}D_2e^{-\sqrt{q_2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (609)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Mediante algunas manipulaciones simples del determinante en la ecuación, se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 \\ s_1 & c_1 & s_2 & c_2 \\ D_1c_1 & q_1D_1s_1 & D_2c_2 & q_2D_2s_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (610)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i(z) = \frac{1}{2\sqrt{q_i}} [e^{\sqrt{q_i}z} - e^{-\sqrt{q_i}z}] = \left\{ \begin{array}{l} s_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|q_1|}} \sinh(\sqrt{|q_1|}z) ; \lambda < \lambda_c \\ \frac{1}{\sqrt{|q_1|}} \sin(\sqrt{|q_1|}z) ; \lambda > \lambda_c \end{cases} \\ s_2(z) = \frac{1}{\sqrt{|q_2|}} \sin(\sqrt{|q_2|}z) \end{array} \right\} \\ c_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_i}z} + e^{-\sqrt{q_i}z}] = \left\{ \begin{array}{l} c_1(z) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{|q_1|}z) ; \lambda < \lambda_c \\ \cos(\sqrt{|q_1|}z) ; \lambda > \lambda_c \end{cases} \\ c_2(z) = \cos(\sqrt{|q_2|}z) \end{array} \right\} \\ s_i = s_i(1), c_i = c_i(1) \end{array} \right. \quad (611)$$

Una reducción adicional en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} (s_2 - s_1) & (q_1c_2 - q_2c_1) \\ (D_2c_2 - D_1c_1) & q_1q_2(D_2s_2 - D_1s_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (612)$$

La determinante se puede escribir en su forma más simple:

$$F(\delta^2) = q_1 q_2 (s_2 - s_1) (D_2 s_2 - D_1 s_1) - (D_2 c_2 - D_1 c_1) (q_1 c_2 - q_2 c_1) = 0 \quad (613)$$

Resolvemos para ambos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva una raíz real negativa ($\delta < \delta_{cr}$).

Definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^* = \frac{-\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2\right)\right] + \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2\right)\right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1\right)\right]}}{2} \\ q_2^* = \frac{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2\right)\right] + \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2\right)\right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1\right)\right]}}{2} \end{array} \right. \quad (614)$$

De modo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1^* \\ q_2 = -q_2^* \end{array} \right. \quad (615)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^*}} \sinh(\sqrt{q_1^*}), s_2 = \frac{1}{\sqrt{q_2^*}} \sin(\sqrt{q_2^*}) \\ c_1 = \cosh(\sqrt{q_1^*}), c_2 = \cos(\sqrt{q_2^*}) \\ D_1 = \left(q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right), D_2 = \left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \end{array} \right. \quad (616)$$

Reescribiendo la determinante como $F(\delta^2)$:

$$F(\delta^2) = q_1 q_2 (s_2 - s_1) (D_2 s_2 - D_1 s_1) - (D_2 c_2 - D_1 c_1) (q_1 c_2 - q_2 c_1) = 0 \quad (617)$$

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene la ecuación característica modal, cuyas raíces definen un conjunto de soluciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones de borde.

$$\begin{aligned} & \left[2q_1^*q_2^* + \left(\frac{1}{1 + \alpha^2\mu^2} \right) (q_2^* - q_1^*)^2 \right] + \left[\left(\frac{1 - \alpha^2\mu^2}{1 + \alpha^2\mu^2} \right) (q_2^* - q_1^*) \right] \sqrt{q_1^*}\sqrt{q_2^*} \sinh \sqrt{q_1^*} \sin \sqrt{q_2^*} \\ & + \left[(q_1^{*2} + q_2^{*2}) - \left(\frac{1}{1 + \alpha^2\mu^2} \right) (q_2^* - q_1^*)^2 \right] \cosh \sqrt{q_1^*} \cos \sqrt{q_1^*} = 0 \end{aligned} \quad (618)$$

De la ecuación, se obtiene la siguiente ecuación en términos de los valores q_1^* y q_2^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2^* - q_1^* = \delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \\ q_2^*q_1^* = \delta^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^4 \end{array} \right\} \rightarrow (q_2^* - q_1^*) \left\{ \left[-\frac{\alpha^2\mu^2}{(1 + \alpha^2\mu^2)^2} \right] (q_2^* - q_1^*) + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2\mu^2} \right\} - q_2^*q_1^* = 0 \quad (619)$$

- Caso 2: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales negativas ($\delta > \delta_{cr}$).

Definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^* = \frac{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] - \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right]}}{2} \\ q_2^* = \frac{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] + \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right]}}{2} \end{array} \right\} \quad (620)$$

De modo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -q_1^* \\ q_2 = -q_2^* \end{array} \right\} \quad (621)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^*}} \sin(\sqrt{q_1^*}), s_2 = \frac{1}{\sqrt{q_2^*}} \sin(\sqrt{q_2^*}) \\ c_1 = \cos(\sqrt{q_1^*}), c_2 = \cos(\sqrt{q_2^*}) \\ D_1 = \left(-q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right), D_2 = \left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2} \right) \end{array} \right\} \quad (622)$$

Reescribiendo la determinante como $F(\delta^2)$:

$$F(\delta^2) = q_1 q_2 (s_2 - s_1) (D_2 s_2 - D_1 s_1) - (D_2 c_2 - D_1 c_1) (q_1 c_2 - q_2 c_1) = 0 \quad (623)$$

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene la ecuación característica modal, cuyas raíces definen un conjunto de soluciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones de borde.

$$\left[2q_1^* q_2^* - \left(\frac{1}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right) (q_1^* + q_2^*)^2 \right] + \left[\left(\frac{1 - \alpha^2 \mu^2}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right) (q_1^* + q_2^*) \right] \sqrt{q_1^*} \sqrt{q_2^*} \sin \sqrt{q_1^*} \sin \sqrt{q_2^*} - \left[(q_1^{*2} + q_2^{*2}) - \left(\frac{1}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right) (q_1^* + q_2^*)^2 \right] \cos \sqrt{q_1^*} \cos \sqrt{q_2^*} = 0 \quad (624)$$

De la ecuación, se obtiene la siguiente ecuación en términos de los valores q_1^* y q_2^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2^* + q_1^* = \delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \\ q_2^* q_1^* = -\delta^2 + \frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^4 \end{array} \right\} \rightarrow (q_1^* + q_2^*) \left\{ \left[\frac{\alpha^2 \mu^2}{(1 + \alpha^2 \mu^2)^2} \right] (q_1^* + q_2^*) - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right\} - q_1^* q_2^* = 0 \quad (625)$$

Para ambos casos, los autovalores q_1^* y q_2^* se derivan al resolver simultáneamente las dos ecuaciones que están en función de los valores adoptados para α y μ . Conociendo los valores de q_1^* y q_2^* se calcula las frecuencias y periodos.

$$w = \frac{\delta}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\rho A}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H^2}{\delta} \sqrt{\frac{\rho A}{K_b}} \quad (626)$$

A continuación, se muestra las formas de modos. Como se demostró anteriormente el valor de $\alpha \rightarrow \infty$ reproduce de manera exacta la forma de modo de una viga de flexión EBB (Euler Bernoulli).

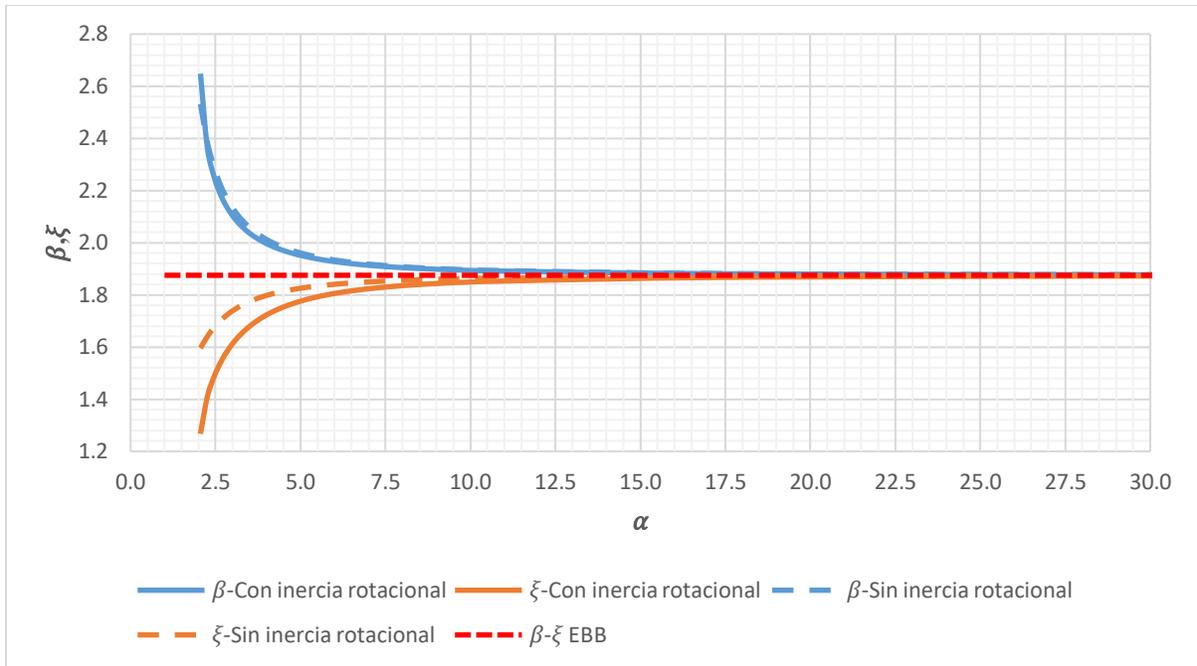


Figura 79. Variación de los parámetros δ y β en función de α para el primer modo de vibración.

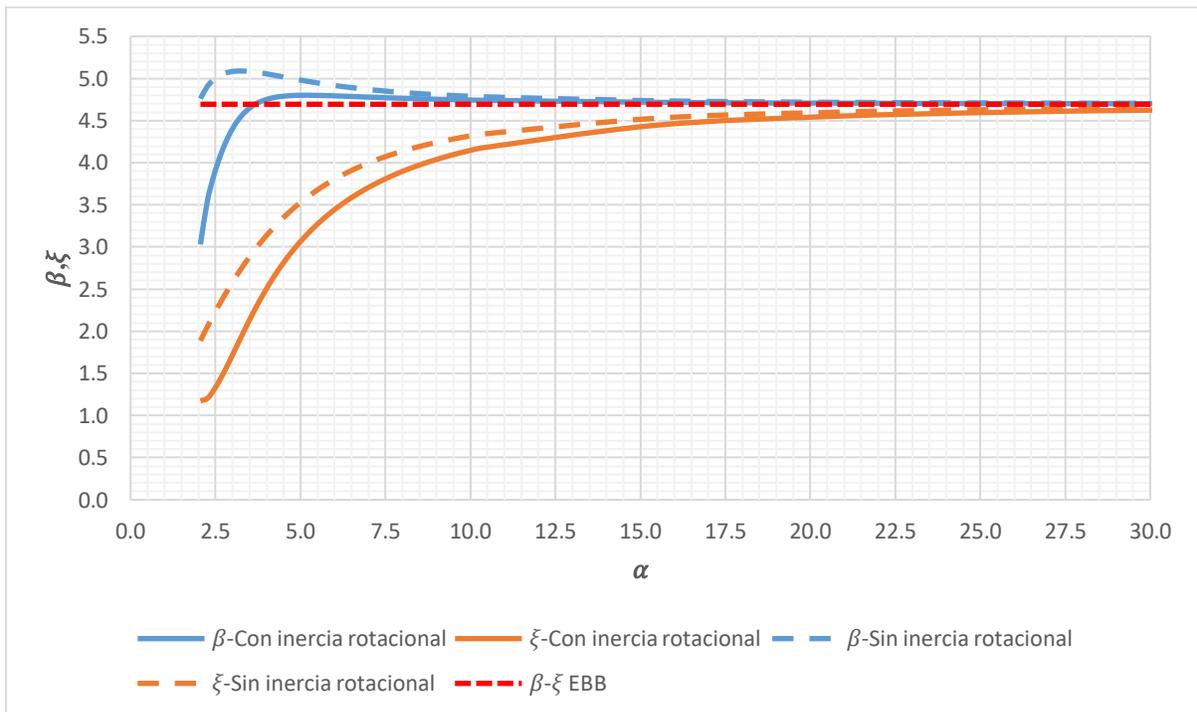


Figura 80. Variación de los parámetros δ y β en función de α para el segundo modo de vibración.

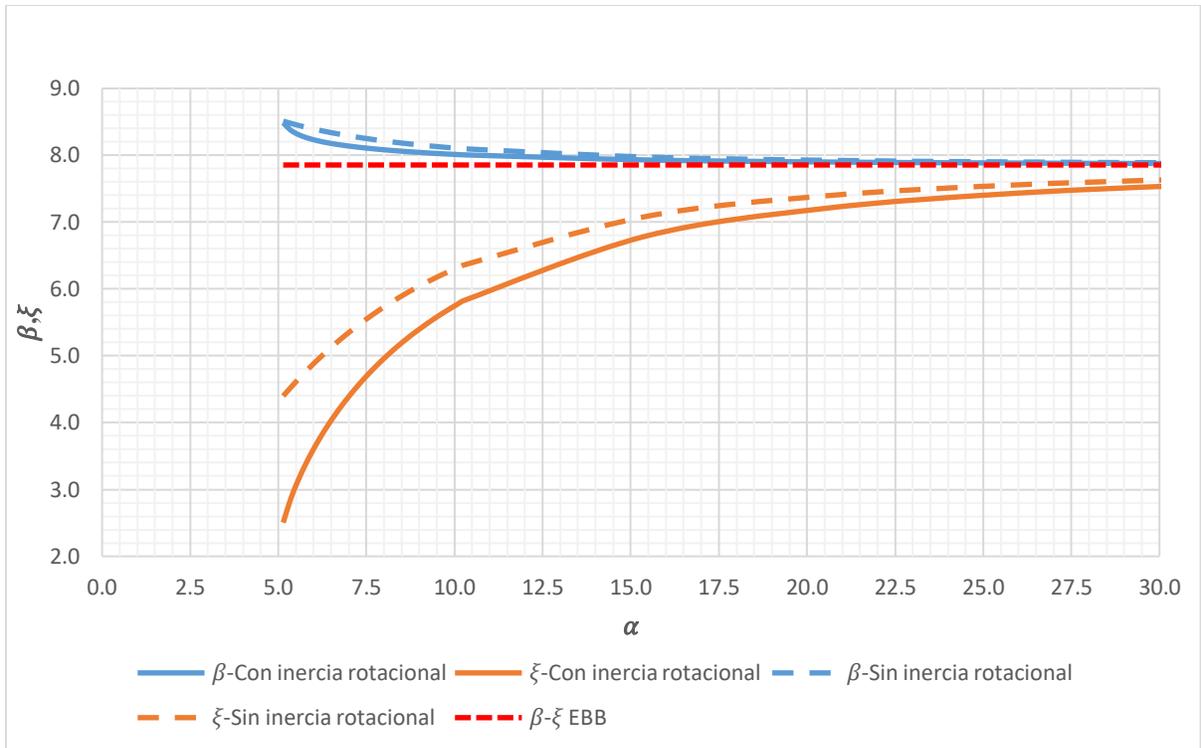


Figura 81. Variación de los parámetros δ y β en función de α para el tercer modo de vibración.

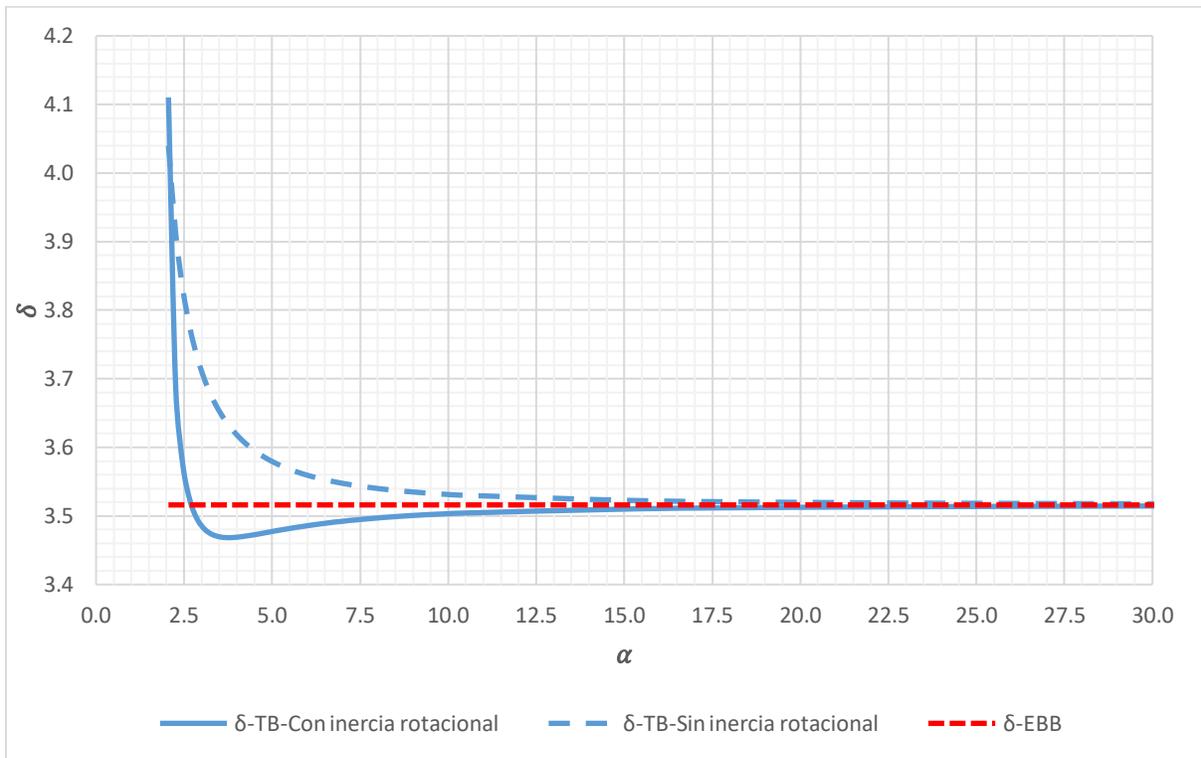


Figura 82. Primer valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.

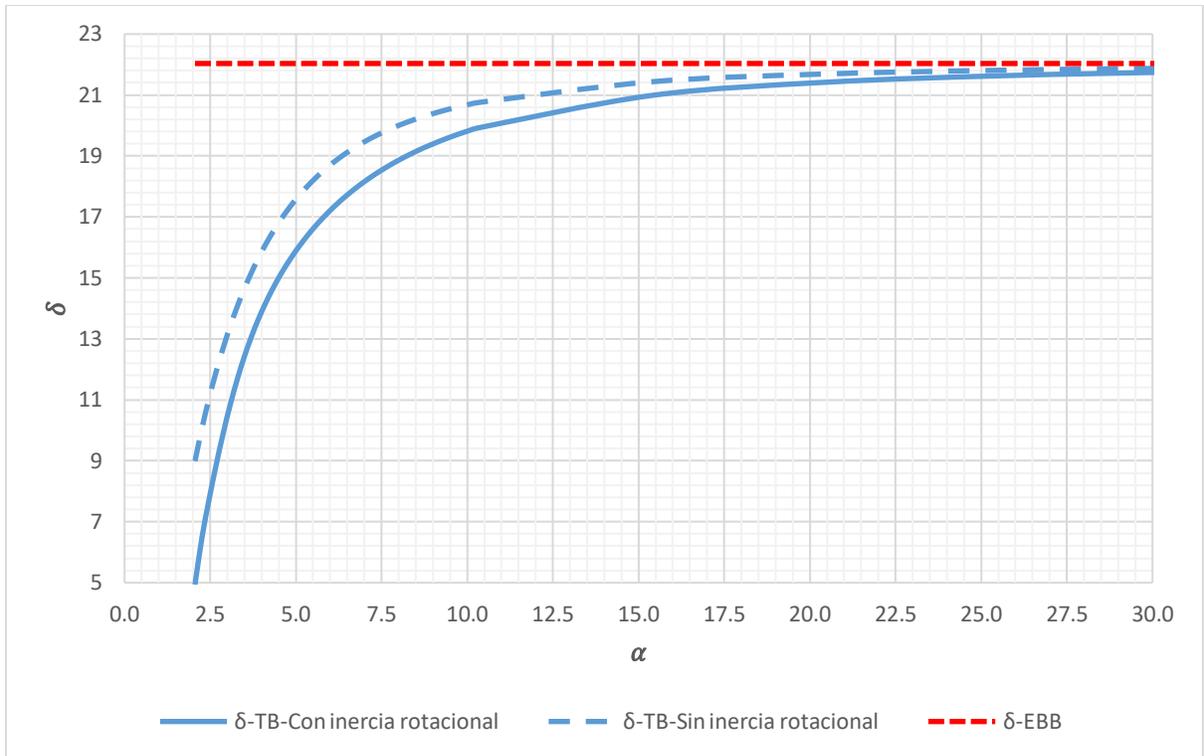


Figura 83. Segundo valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.

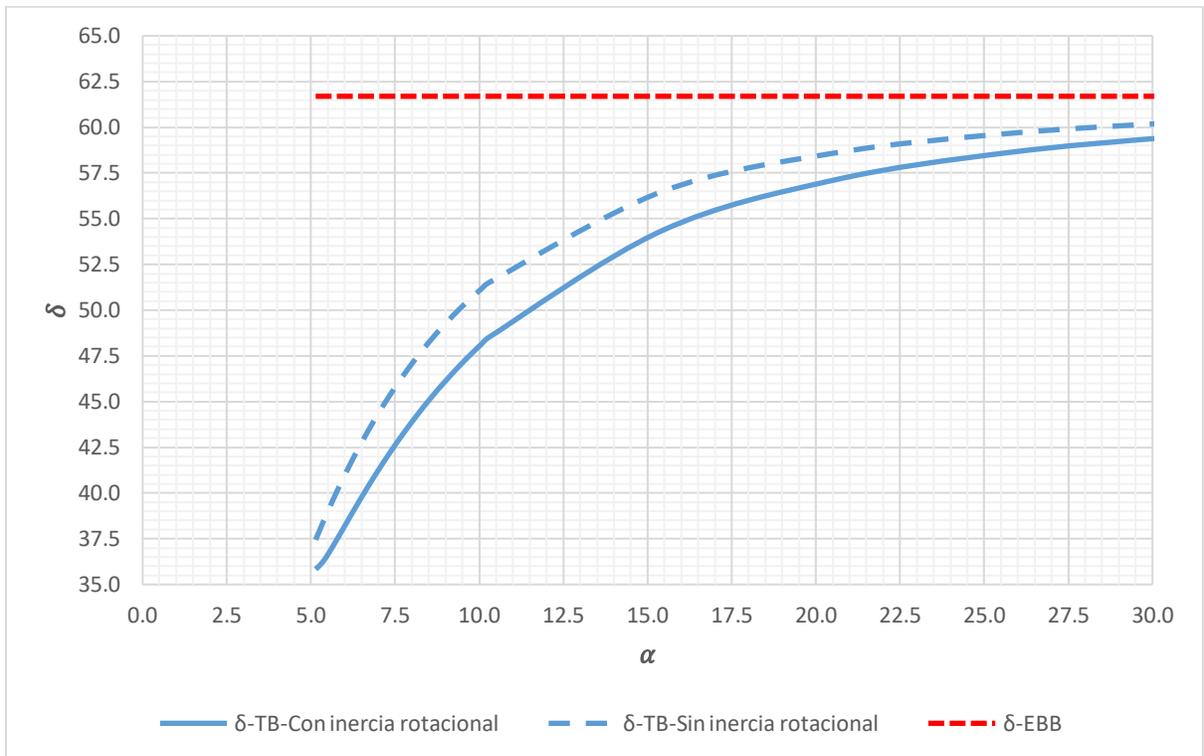


Figura 84. Tercer valor propio de la viga TB vs. EBB para el caso de α variable.

- **Formas de modo**

Considerando las primeras condiciones de borde, normalizando a 1 en la parte superior y escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{q_1} & -\sqrt{q_1} & \sqrt{q_2} & -\sqrt{q_2} \\ q_1 & q_1 & q_2 & q_2 \\ \sqrt{q_1}D_1e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1}D_1e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2}D_2e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2}D_2e^{-\sqrt{q_2}} \\ \sqrt{q_1}e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1}e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2}e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2}e^{-\sqrt{q_2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (627)$$

Los vectores propios se pueden obtener resolviendo la ecuación para las constantes C_i . Para simplificar el problema de la matriz, las constantes C_i se transformarán en un conjunto de nuevas constantes \bar{C}_i mediante la transformación:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2C_{2i-1} = \bar{C}_{2i-1} + \frac{1}{\sqrt{q_i}}\bar{C}_{2i} \\ 2C_{2i} = \bar{C}_{2i-1} - \frac{1}{\sqrt{q_i}}\bar{C}_{2i} \end{array} ; i = 1, 2 \right\} \quad (628)$$

La ecuación se reduce:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ q_1 & 0 & q_2 & 0 \\ q_1D_1s_1 & D_1c_1 & q_2D_2s_2 & D_2c_2 \\ q_1s_1 & c_1 & q_2s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (629)$$

Es posible expresar \bar{C}_1 , \bar{C}_2 y \bar{C}_3 en función de \bar{C}_4 ; la ecuación matricial se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q_1 & 0 & q_2 \\ q_1D_1s_1 & D_1c_1 & q_2D_2s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{Bmatrix} = -\bar{C}_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ D_2c_2 \end{Bmatrix} \quad (630)$$

Que se puede resolver para la constante \bar{C}_i :

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{Bmatrix} = -\bar{C}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q_1 & 0 & q_2 \\ q_1D_1s_1 & D_1c_1 & q_2D_2s_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ D_2c_2 \end{Bmatrix} \quad (631)$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{pmatrix} = \frac{\bar{C}_4}{D_2 s_2 - D_1 s_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} (D_2 c_2 - D_1 c_1) \\ -(D_2 s_2 - D_1 s_1) \\ -\frac{1}{q_2} (D_2 c_2 - D_1 c_1) \end{pmatrix} = \bar{C}_4 \begin{pmatrix} \frac{\eta}{q_1} \\ -1 \\ \frac{\eta}{q_2} \end{pmatrix} \quad (632)$$

Donde el parámetro η viene dado por:

$$\eta = \frac{D_2 c_2 - D_1 c_1}{D_2 s_2 - D_1 s_1} \quad (633)$$

Ahora se puede obtener el desplazamiento $H\lambda_{(z)}$ y $\phi_{(z)}$ correspondiente al vector propio en la ecuación (3.50). De la ecuación (3.33), haciendo uso de las ecuaciones (3.35), (3.40) y (3.47)

$$W_{(z)} = \begin{pmatrix} H\lambda_{(z)} \\ \phi_{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [D_1 c_1(z)]\bar{C}_1 + [D_1 s_1(z)]\bar{C}_2 + [D_2 c_2(z)]\bar{C}_3 + [D_2 s_2(z)]\bar{C}_4 \\ [q_1 s_1(z)]\bar{C}_1 + [c_1(z)]\bar{C}_2 + [q_2 s_2(z)]\bar{C}_3 + [c_2(z)]\bar{C}_4 \end{pmatrix} \quad (634)$$

Normalizamos $\phi_{(1)} = 1$ en la parte superior:

$$\bar{C}_4 = \frac{1}{(c_2 - c_1) - \eta(s_2 - s_1)} \quad (635)$$

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene:

$$\phi_{(z)} = \frac{[c_2(z) - c_1(z)] - \eta[s_2(z) - s_1(z)]}{[c_2 - c_1] - \eta[s_2 - s_1]} \quad (636)$$

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva una raíz real negativa ($\delta < \delta_{cr}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \cos(\sqrt{q_2^*}) - \left(-q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \cosh(\sqrt{q_1^*})}{\left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\sin(\sqrt{q_2^*})}{\sqrt{q_2^*}} - \left(-q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\sinh(\sqrt{q_1^*})}{\sqrt{q_1^*}}} \\ \phi_{(z)} = \frac{\left[\cos(\sqrt{q_2^*} z) - \cosh(\sqrt{q_1^*} z)\right] - \eta \left[\frac{\sin(\sqrt{q_2^*} z)}{\sqrt{q_2^*}} - \frac{\sinh(\sqrt{q_1^*} z)}{\sqrt{q_1^*}}\right]}{\left[\cos(\sqrt{q_2^*}) - \cosh(\sqrt{q_1^*})\right] - \eta \left[\frac{\sin(\sqrt{q_2^*})}{\sqrt{q_2^*}} - \frac{\sinh(\sqrt{q_1^*})}{\sqrt{q_1^*}}\right]} \end{array} \right. \quad (637)$$

- Caso 2: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales negativas ($\delta > \delta_{cr}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \cos(\sqrt{q_2^*}) - \left(-q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \cos(\sqrt{q_1^*})}{\left(-q_2^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\sin(\sqrt{q_2^*})}{\sqrt{q_2^*}} - \left(-q_1^* + \frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \frac{\sin(\sqrt{q_1^*})}{\sqrt{q_1^*}}} \\ \phi_{(z)} = \frac{[\cos(\sqrt{q_2^*}z) - \cos(\sqrt{q_1^*}z)] - \eta \left[\frac{\sin(\sqrt{q_2^*}z)}{\sqrt{q_2^*}} - \frac{\sin(\sqrt{q_1^*}z)}{\sqrt{q_1^*}} \right]}{[\cos(\sqrt{q_2^*}) - \cos(\sqrt{q_1^*})] - \eta \left[\frac{\sin(\sqrt{q_2^*})}{\sqrt{q_2^*}} - \frac{\sin(\sqrt{q_1^*})}{\sqrt{q_1^*}} \right]} \end{array} \right. \quad (638)$$

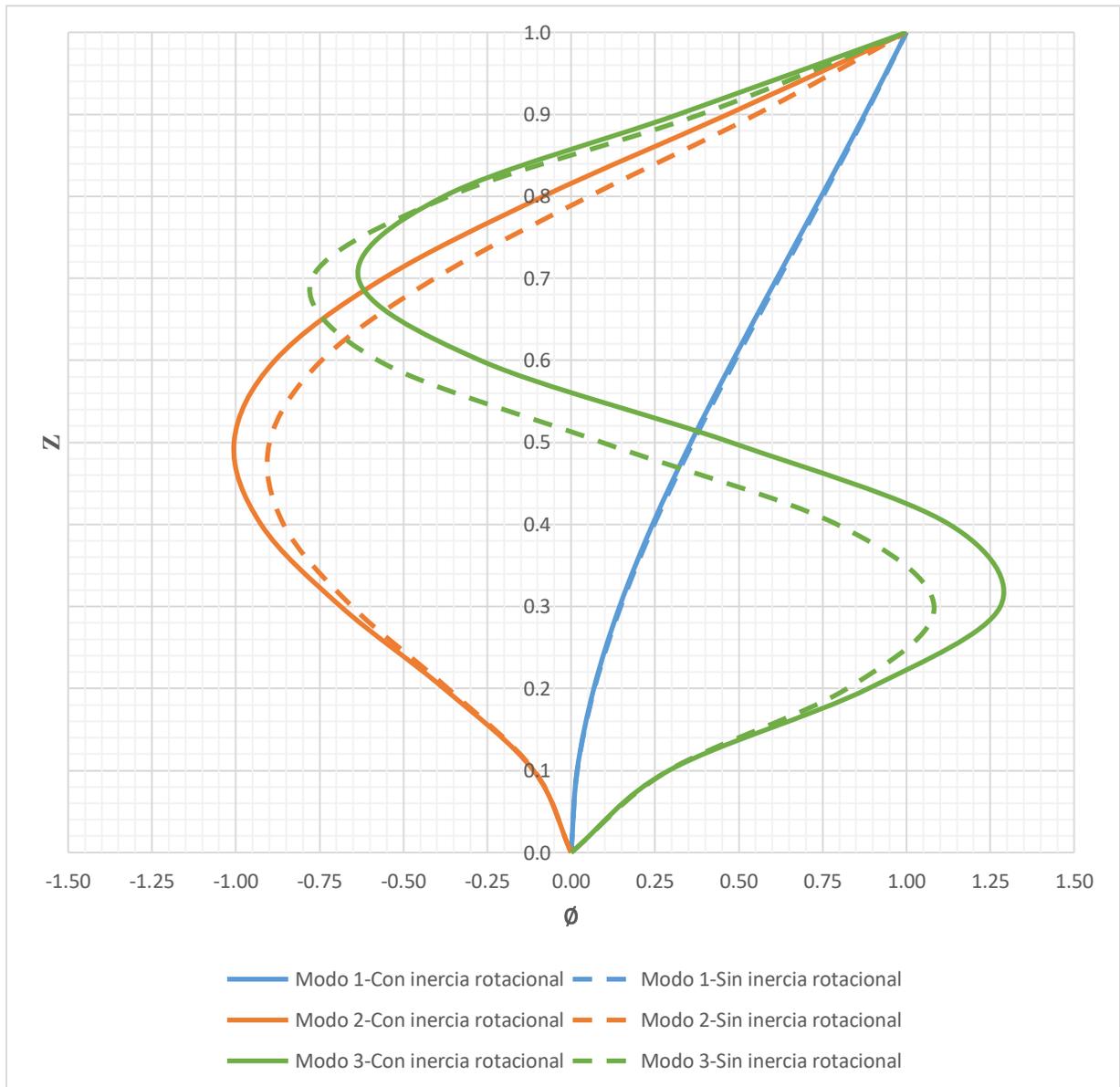


Figura 85. Formas de modos de vibración para R=2.5.

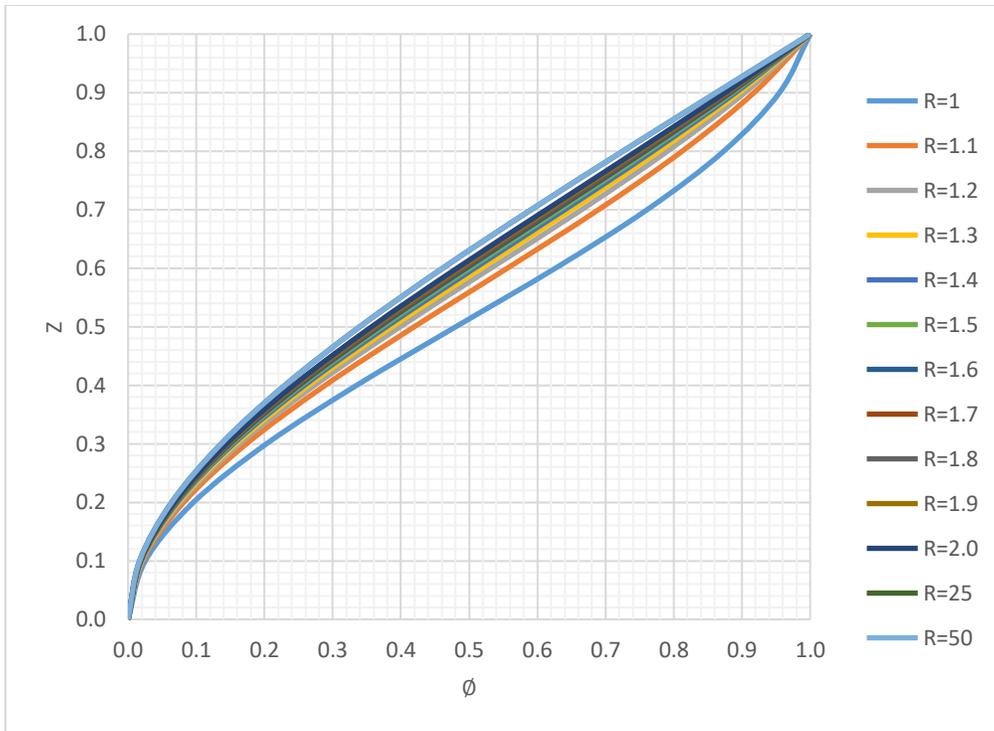


Figura 86. Formas del primer modo de vibración en función del valor R .

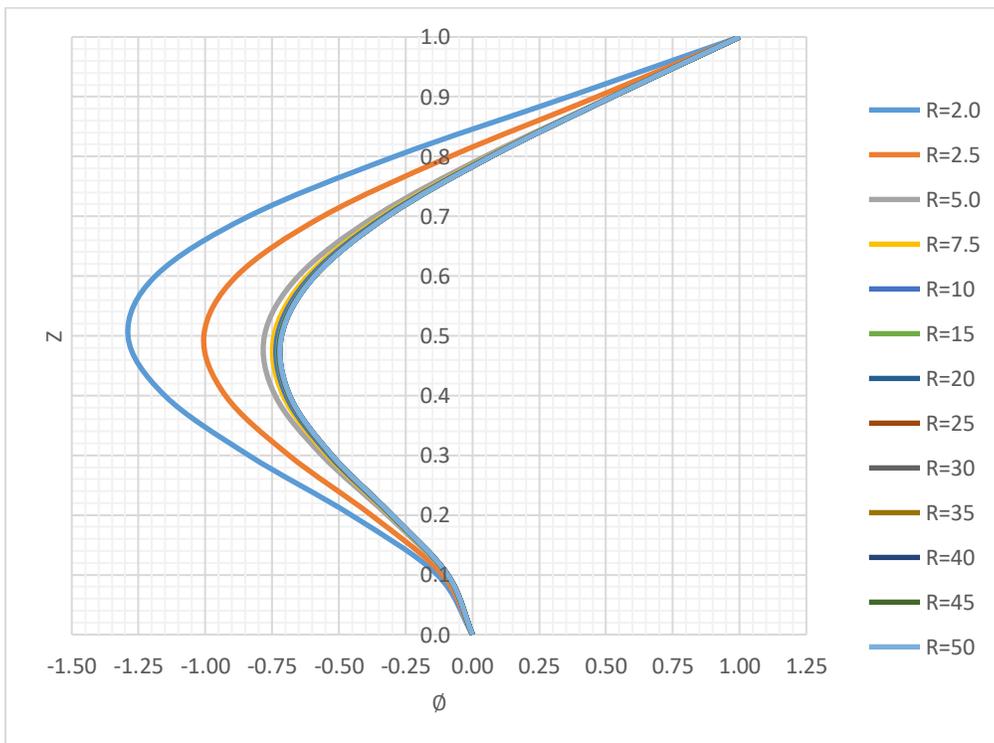


Figura 87. Formas del segundo modo de vibración en función del valor R .

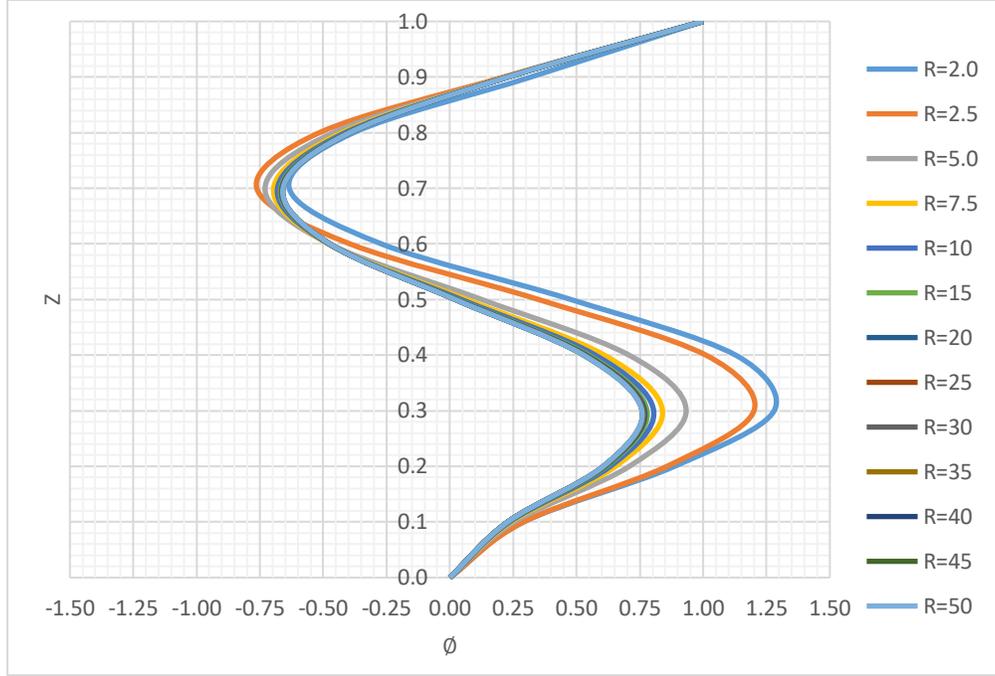


Figura 88. Formas del tercer modo de vibración en función del valor R .

4.2.3.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (639)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (640)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (641)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (642)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (643)$$

Reemplazando este parámetro:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (644)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{pmatrix} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u'_{(0)} - \theta_{(0)} = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{pmatrix} \quad (645)$$

Reemplazando:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (646)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.4 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento traslacional

4.2.4.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo CTB de un campo son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''_{(x,t)}{}^2 + K_s u'_{(x,t)}{}^2] dx, T = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2] dx \quad (647)$$

Donde:

$$\gamma_u = \rho A \quad (648)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga CTB de un campo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 - K_b u''_{(x,t)}{}^2 - K_s u'_{(x,t)}{}^2] dx \quad (649)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} - K_b u''_{(x,t)} \delta u''_{(x,t)} - K_s u'_{(x,t)} \delta u'_{(x,t)}] dx \quad (650)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_b u'''_{(x,t)} - K_s u'_{(x,t)}] \delta u_{(x,t)} \Big|_0^H - [K_b u''_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} \Big|_0^H \\ & - \int_0^H [\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_b u''''_{(x,t)} - K_s u''_{(x,t)}] \delta u \end{aligned} \quad (651)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_b u''''_{(x,t)} - K_s u''_{(x,t)} = 0 \quad (652)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b u_{(H)}''' - K_s u'_{(H)} = 0 \\ u''_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \quad (653)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$u_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \quad (654)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{K_b}{\gamma_u} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi_{(x)}'''' - \frac{K_s}{\gamma_u} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi_{(x)}'' = 0 \quad (655)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ K_b \phi_{(x)}'''' - K_s \phi_{(x)}'' - \gamma_u w^2 \phi_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (656)$$

Donde la primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\phi_{(z)}'''' - \left(H^2 \frac{K_s}{K_b} \right) \phi_{(z)}'' - \left(\frac{\gamma_u w^2 H^4}{K_b} \right) \phi_{(z)} = 0 \quad (657)$$

La ecuación se reescribe:

$$\phi_{(z)}'''' - \alpha^2 \phi_{(z)}'' - \delta^2 \phi_{(z)} = 0 \quad (658)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^4}{K_b} w^2} \right\} \quad (659)$$

Se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\Phi_{(z)} = C_1 \cos(\beta z) + C_2 \sin(\beta z) + C_3 \cosh(\xi z) + C_4 \sinh(\xi z) \quad (660)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 4\delta^2}}{2}} \\ \beta = \sqrt{\frac{-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 4\delta^2}}{2}} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi^2 = \beta^2 + \alpha^2 \\ \beta^2 \xi^2 = \delta^2 \end{array} \right\} \quad (661)$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Se consideran las siguientes condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{(0)} = 0 \\ \Phi'_{(0)} = 0 \\ \Phi'''_{(1)} - \alpha^2 \Phi'_{(1)} = 0 \\ \Phi''_{(1)} = 0 \end{array} \right\} \quad (662)$$

Escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \xi \\ -\beta^2 \cos \beta & -\beta^2 \sin \beta & \xi^2 \cosh \xi & \xi^2 \sinh \xi \\ \beta(\beta^2 + \alpha^2) \sin \beta & -\beta(\beta^2 + \alpha^2) \cos \beta & \xi(\xi^2 - \alpha^2) \sinh \xi & \xi(\xi^2 - \alpha^2) \cosh \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (663)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Luego de algunas manipulaciones simples, se obtiene la ecuación característica modal, cuyas raíces definen un conjunto de soluciones particulares que satisfacen la ecuación diferencial del movimiento y las condiciones de borde.

$$[(\beta^4 + \xi^4) - \alpha^2(\xi^2 - \beta^2)] + [2\alpha^2 - (\xi^2 - \beta^2)]\xi\beta \sin \beta \sinh \xi + [2\beta^2\xi^2 + \alpha^2(\xi^2 - \beta^2)] \cos \beta \cosh \xi = 0 \quad (664)$$

Y teniendo en cuenta las relaciones entre los autovalores β , ξ y α ; se obtiene:

$$2 + \left(\frac{\xi^2 - \beta^2}{\xi\beta}\right) \sin \beta \sinh \xi + \left(\frac{\xi^4 + \beta^4}{\beta^2\xi^2}\right) \cos \beta \cosh \xi = 0 \quad (665)$$

Puede observarse que esta ecuación característica solo depende de los autovalores ξ y β , los cuales a su vez dependen del parámetro α ; es decir, las propiedades dinámicas de la viga CTB clásico de un campo dependen únicamente del parámetro α .

Los autovalores ξ y β se derivan al resolver numéricamente la ecuación característica. Conociendo los valores de ξ y β se calcula el valor del parámetro δ , y como consecuencia se obtienen las frecuencias y los periodos de vibración del modelo.

$$w = \frac{\delta}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\rho A}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H^2}{\delta} \sqrt{\frac{\rho A}{K_b}} \quad (666)$$

- **Valores propios**

En las figuras 89, 90 y 91 se muestran los tres primeros valores propios en función de la variable α . Como se puede observar para los tres valores propios; cuando $\alpha = 0$ se obtienen valores propios idénticos a los obtenidos para la viga de flexión EBB y cuando $\alpha = 100$ se obtienen valores propios idénticos a los obtenidos para la viga de corte SB.

Se observa que se presenta una variabilidad fuerte y notable para los tres valores propios en el rango de valores de α ; es decir, el modelo CTB de un campo es muy sensible a la variabilidad del parámetro α . Esta variabilidad afecta directamente a las propiedades dinámicas del modelo tales como el periodo de vibración y la forma modal.

Al analizar el análisis paramétrico desarrollado para graficar los valores propios en función del parámetro α ; se encuentra que la diferencia porcentual entre los valores propios del modelo CTB-EBB y CTB-SB son del 3.79% y 23.89 % para el primer modo, 7.56% y 7.15% para el segundo modo y 4.29% y 4.31% para el tercer modo de vibración.

Basado en esta observación es de suma importancia subrayar que esta variabilidad se acentúa más para el caso del primer modo de vibración, afectando directamente las propiedades dinámicas como el periodo de vibración y la forma modal. Por otro lado, la variabilidad del segundo y tercer modo es menos pronunciada; notándose además, que esta variabilidad disminuye aún más al aumentar el número de modos a considerar.

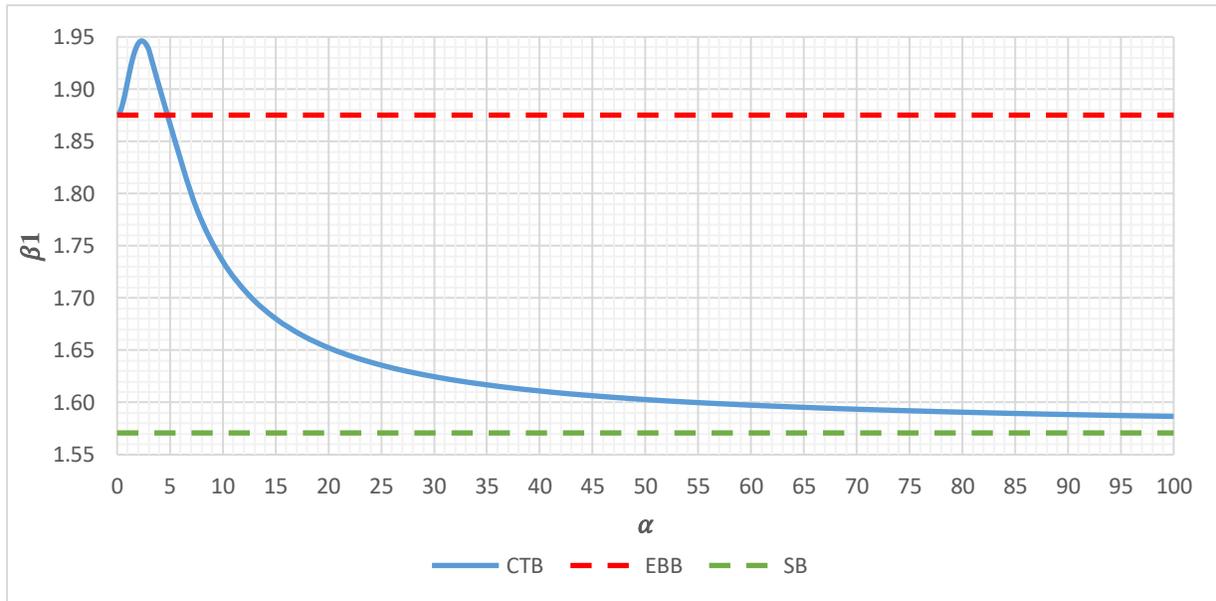


Figura 89. Primer valor propio β_1 para el caso de α variable.

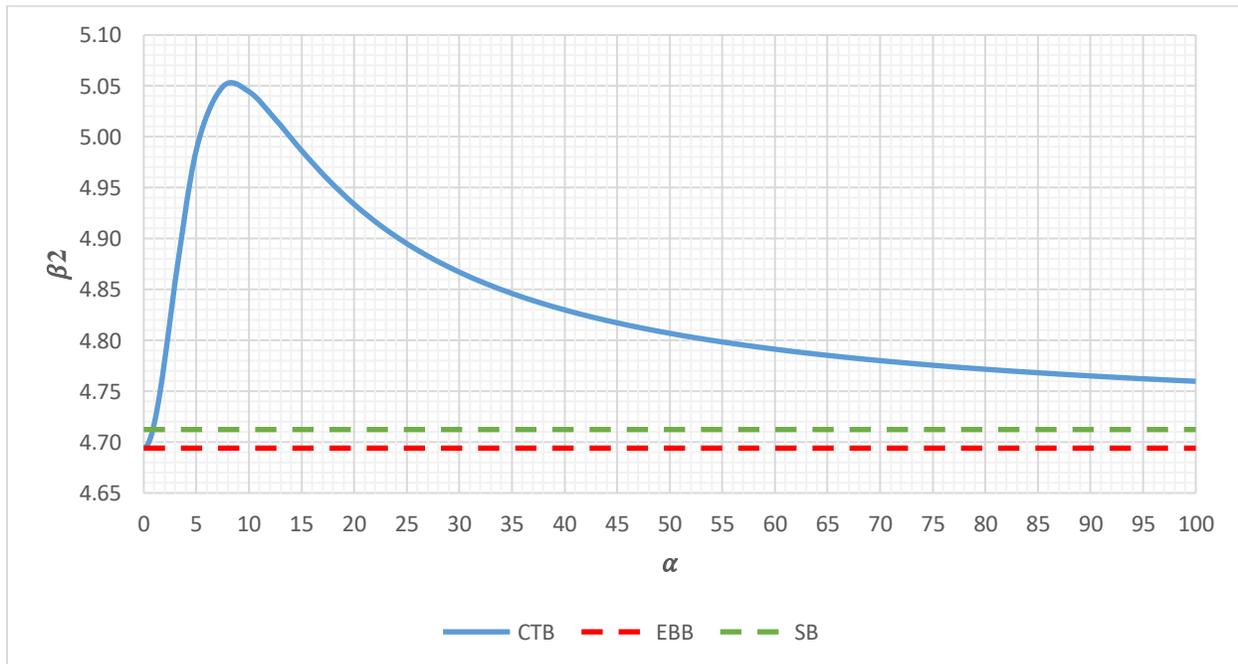


Figura 90. Segundo valor propio β_2 para el caso de α variable.

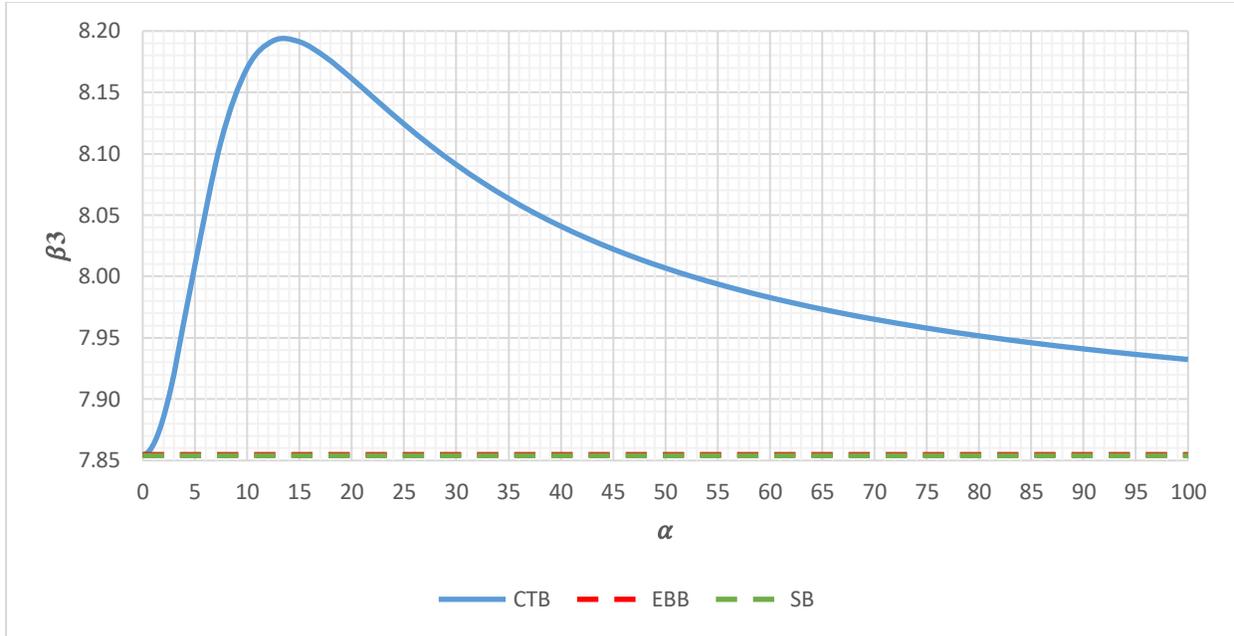


Figura 91. Tercer valor propio β_3 para el caso de α variable.

- **Formas de modo**

Considerando las primeras condiciones de borde, normalizando a 1 en la parte superior y escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante:

Escribiendo en forma matricial el sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \xi \\ -\beta^2 \cos \beta & -\beta^2 \sin \beta & \xi^2 \cosh \xi & \xi^2 \sinh \xi \\ \cos \beta & \sin \beta & \cosh \xi & \sinh \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (667)$$

Luego de algunas manipulaciones simples:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-\frac{\xi}{\beta} \text{Sen} \beta + \text{Senh} \xi + \eta [\text{Cos} \beta - \text{Cosh} \xi]} \begin{Bmatrix} \eta \\ -\frac{\xi}{\beta} \\ -\eta \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (668)$$

Donde

$$\eta = \frac{\xi^2 \text{Senh}\xi + \xi\beta \text{Sen}\beta}{\xi^2 \text{Cosh}\xi + \beta^2 \text{Cos}\beta} \quad (669)$$

Reemplazando estos coeficientes, se puede obtener una solución de la siguiente forma para las formas de modo:

$$\Phi_{(z)} = \frac{-\frac{\xi}{\beta} \text{Sen}(\beta z) + \text{Senh}(\xi z) + \eta[\text{Cos}(\beta z) - \text{Cosh}(\xi z)]}{-\frac{\xi}{\beta} \text{Sen}\beta + \text{Senh}\xi + \eta[\text{Cos}\beta - \text{Cosh}\xi]} \quad (670)$$

En las Figura 92, 93 y 94, se presentan las tres primeras formas de modo de vibración del modelo CTB clásico de un campo. Como se mencionó, se ha normalizado a uno en la parte superior del modelo. Además, se han representado formas modales para diferentes valores de α .

Según lo observado; es fácil notar que las formas de los modos correspondientes para valores relativamente pequeños de α ($\alpha \rightarrow 0$) son idénticos a lo encontrado para la viga de flexión pura (EBB), mientras que para valores relativamente grandes de α ($\alpha \rightarrow \infty$) son idénticos a lo encontrado para la viga de corte (SB). También se observa que la viga CTB de un campo reproduce adecuadamente las formas modales para estructuras duales con valores intermedios de α ($0 < \alpha < \infty$).

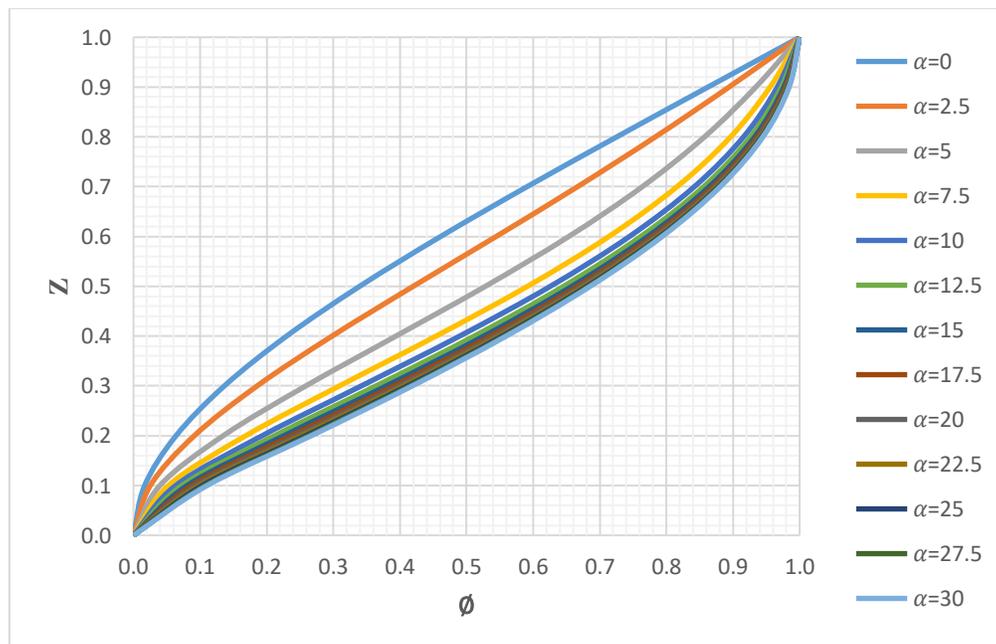


Figura 92. Formas del primer modo de vibración en función del valor α .

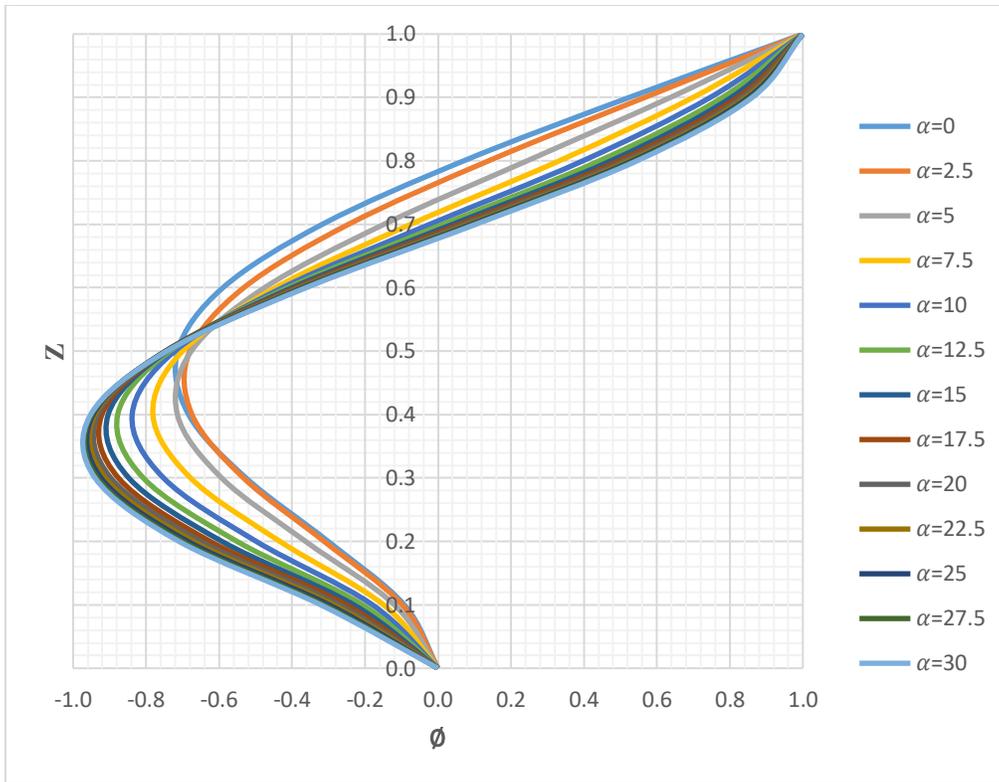


Figura 93. Formas del segundo modo de vibración en función del valor α .

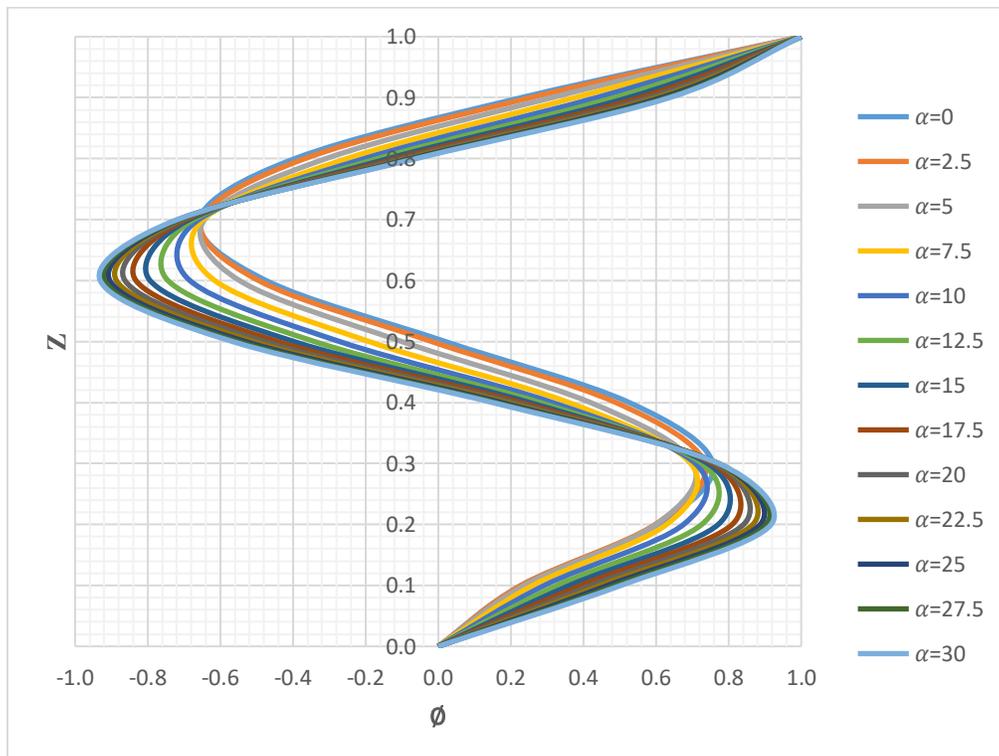


Figura 94. Formas del tercer modo de vibración en función del valor α .

- **Casos especiales**

a) Cuando $\alpha \rightarrow 0$. Esta situación corresponde a una viga de flexión (Euler Bernoulli).

$$\alpha = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1.87510 \rightarrow w_1 = \frac{3.51600}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_1 = 1.78703H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_2 = 4.69405 \rightarrow w_2 = \frac{22.03411}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_2 = 0.28516H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_3 = 7.85475 \rightarrow w_3 = \frac{61.69710}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_3 = 0.10184H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \end{array} \right. \quad (671)$$

b) Cuando $\alpha = 2.5$; que corresponde a una estructura dual con α intermedio.

$$\alpha = 2.5 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1.9455 \rightarrow w_1 = \frac{6.16296}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_1 = 1.01951H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_2 = 4.8195 \rightarrow w_2 = \frac{26.16664}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_2 = 0.24012H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_3 = 7.90190 \rightarrow w_3 = \frac{65.49051}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_3 = 0.09594H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \end{array} \right. \quad (672)$$

c) Cuando $\alpha = 30$; que corresponde aproximadamente a una viga de corte.

$$\alpha = 30 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 1.62465 \rightarrow w_1 = \frac{48.81092}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_1 = 0.12872H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_2 = 4.86705 \rightarrow w_2 = \frac{147.92045}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_2 = 0.04248H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \\ \beta_3 = 8.09105 \rightarrow w_3 = \frac{251.40457}{H^2} \sqrt{\frac{K_b}{\gamma_u}} \rightarrow T_3 = 0.02499H^2 \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_b}} \end{array} \right. \quad (673)$$

Se observa que los valores son casi idénticos a los obtenidos al considerar una viga de corte pura. El error cometido es del 3.43%, 3.28% y 3.02% para el primer, el segundo y el tercer modo respectivamente. Sin embargo estos errores son aceptables desde el punto de vista ingenieril; por lo que es práctico fijar un valor de $\alpha = 30$ para caracterizar a los edificios cuyo comportamiento es de corte puro. El considerar un valor de $\alpha = 100$ reduce el error al 1.01%.

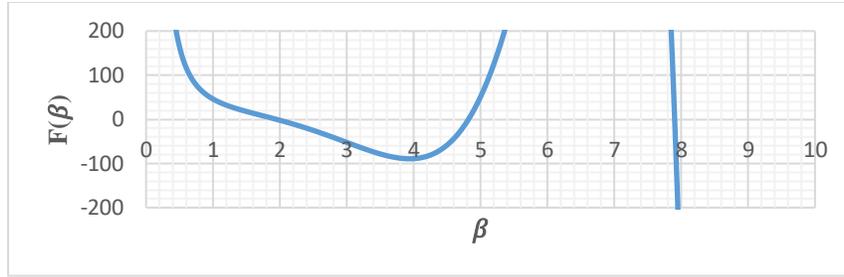


Figura 95. Función característica para el caso $\alpha = 2.5$.

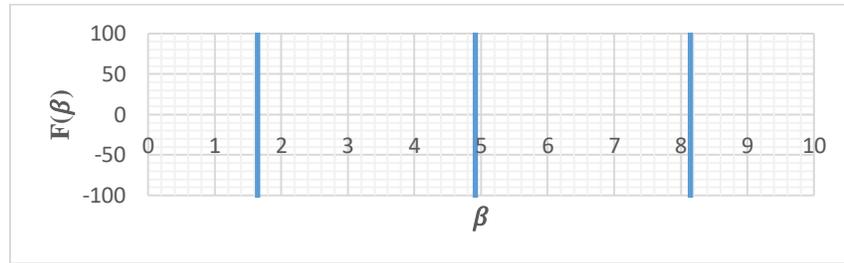


Figura 96. Función característica para el caso $\alpha = 30.0$ (Viga de Corte).

4.2.4.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (674)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (675)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (676)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (677)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (678)$$

Reemplazando este parámetro:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (679)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_b u'''_{(0)} - K_s u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (680)$$

Reemplazando:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (681)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.5 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - Comportamiento torsional

Al igual que el análisis del desplazamiento torsional se puede derivar en base a la analogía que existe entre los esfuerzos de estructuras de paredes delgadas en flexión y torsión, el análisis de la vibración torsional de un núcleo estructural también puede extenderse utilizando esta analogía. El modelo a utilizar es un voladizo equivalente de sección transversal abierta de paredes delgadas que tiene una rigidez de Saint Venant efectiva (GJ_e) y una rigidez a la deformación (EI_w).

4.2.5.1 Caso 1

Al analizar el equilibrio de una sección elemental del núcleo estructural, su ecuación diferencial resulta:

$$EI_w \varphi'''' - GJ^* \varphi'' + \rho I \ddot{\varphi} = 0 \quad (682)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} J^* = J + \bar{J} \\ J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m h_i v_i^3 \text{ (Sección abierta)}, J = \frac{4A_0^2}{\sum_{i=1}^m \frac{h_i}{v_i}} \text{ (Sección errada)} \\ \bar{J} = \frac{4A_0^2}{\frac{l^3 sG}{12EI_b} + \frac{1.2lS}{A_b}}, A_b = t_b d, I_b = \frac{t_b d^3}{12} \end{array} \right. \quad (683)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\varphi_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \quad (684)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} - \frac{EI_w}{\rho I} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi_{(x)}'''' + \frac{GJ}{\rho I} \cdot \frac{1}{\phi_{(x)}} \phi_{(x)}'' = 0 \quad (685)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ EI_w \phi''''_{(x)} - GJ \phi''_{(x)} - \rho I w^2 \phi_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (686)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

La segunda ecuación diferencial es idéntica a la ecuación presentada para el caso de la vibración lateral de una viga CTB, con la diferencia en que solo cambia la nomenclatura de sus rigideces; además, se tienen las mismas condiciones de contorno, por lo que la solución dada en la sección anterior es completamente válida para el análisis torsional puro de un núcleo estructural. Para resolverlo es necesario utilizar las rigideces equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b \rightarrow EI_w \\ K_s \rightarrow GJ \\ \rho A \rightarrow \rho I \end{array} \right\} \quad (687)$$

4.2.5.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{i+1}(0) \\ \varphi'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \left\{ T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{ti} w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(0) \\ \varphi'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{ti} w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(0) \\ \varphi'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (688)$$

Reescribiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{i+1}(0) \\ \varphi'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = T_{wi}(0) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(0) \\ \varphi'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (689)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{ti}w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (690)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (691)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (692)$$

Reemplazando este parámetro:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (693)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(1)} = 0 \\ \varphi'_{(1)} = 0 \\ \varphi''_{(0)} = 0 \\ EI_w \varphi'''_{(0)} - GJ^* \varphi'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(h_1) = 0 \\ \varphi'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (694)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi_n'(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (695)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (696)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.6 Viga sándwich de dos campos (SWB)

4.2.6.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo SWB de dos campos son:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{b2} u''_{(x)}^2 dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u (\dot{u})^2 + \gamma_\theta (\dot{\theta})^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{697}$$

Donde:

$$\{\gamma_u = \rho A, \gamma_\theta = \rho I\} \tag{698}$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga SWB de dos campos se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u (\dot{u})^2 + \gamma_\theta (\dot{\theta})^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2} u''_{(x)}^2 \right\} dx \tag{699}$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{U} &= \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} \delta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta'_{(x,t)} \delta \theta'_{(x,t)} - K_{s1} [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \delta \theta_{(x,t)} \right. \\
 &\quad \left. + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} - K_{b2} u''_{(x,t)} \delta u''_{(x,t)} \right\} dx
 \end{aligned} \tag{700}$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{U} &= \left\{ \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] + K_{b2} u''_{(x,t)} \right] \delta u_{(x,t)} \right\}_0^H - \left[K_{b2} u''_{(x,t)} \delta u'_{(x,t)} \right]_0^H \\
 &\quad + \left\{ \left[\gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta'_{(x,t)} \right] \delta \theta_{(x,t)} \right\}_0^H \\
 &\quad - \int_0^H \left\{ \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_{s1} [\theta'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}] + K_{b2} u'''_{(x,t)} \right\} \delta u_{(x,t)} \\
 &\quad - \int_0^H \left[\gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta''_{(x,t)} + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \right] \delta \theta_{(x,t)}
 \end{aligned} \tag{701}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_s [\theta'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}] + K_{b2} u''''_{(x,t)} = 0 \\ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta''_{(x,t)} + K_s [\theta_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] = 0 \end{cases} \quad (702)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(H)} = 0 \\ u''_{(H)} = 0 \\ K_s [\theta_{(H)} - u'_{(H)}] + K_{b2} u''''_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \quad (703)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\begin{cases} u_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \\ \theta_{(x,t)} = \lambda_{(x)} q_{(t)} \end{cases} \quad (704)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{[K_s \lambda'_{(x)} - K_s \phi''_{(x)} + K_{b2} \phi''''_{(x)}]}{\gamma_u \phi_{(x)}} = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \frac{[-K_{b1} \lambda''_{(x)} + K_s \lambda_{(x)} - K_s \phi'_{(x)}]}{\gamma_\theta \lambda_{(x)}} = 0 \end{array} \right\} \quad (705)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ K_{b2} \phi''''_{(x)} - K_s \phi''_{(x)} + K_s \lambda'_{(x)} - w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \\ K_{b1} \lambda''_{(x)} + K_s \phi'_{(x)} - K_s \lambda_{(x)} + w^2 \gamma_\theta \lambda_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (706)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Despejando $\lambda'_{(x)}$, derivando dos veces y reemplazando:

$$\phi_{(x)}'''' - \left[\frac{K_{s1}}{K_{b2}} + \frac{K_{s1}}{K_{b1}} - \frac{\gamma_{\theta} w^2}{K_{b1}} \right] \phi_{(x)}'''' - \left[\frac{\gamma_u w^2}{K_{b2}} \left(1 + \frac{\gamma_{\theta} K_{s1}}{\gamma_u K_{b1}} \right) \right] \phi_{(x)}'' + \frac{\gamma_u w^2}{K_{b2}} \left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} - \frac{\gamma_{\theta} w^2}{K_{b1}} \right) \phi_{(x)} = 0 \quad (707)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}'''''' - \left[\frac{K_{s1}}{K_{b2}} + \frac{K_{s1}}{K_{b1}} - \frac{\gamma_{\theta} w^2}{K_{b1}} \right] H^2 \phi_{(z)}'''' - \left[\frac{\gamma_u w^2}{K_{b2}} \left(1 + \frac{\gamma_{\theta} K_{s1}}{\gamma_u K_{b1}} \right) \right] H^4 \phi_{(z)}'' \\ + \frac{\gamma_u w^2}{K_{b2}} \left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}} - \frac{\gamma_{\theta} w^2}{K_{b1}} \right) H^6 \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (708)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\phi_{(z)}'''''' - [\alpha^2 \kappa^2 - \delta^2 \mu^2] \phi_{(z)}'''' - \delta^2 [1 + \alpha^2 \mu^2] \phi_{(z)}'' + \delta^2 [\alpha^2 (\kappa^2 - 1) - \delta^2 \mu^2] \phi_{(z)} = 0 \quad (709)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \mu = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\gamma_{\theta} K_{b2}}{\gamma_u K_{b1}}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^4}{K_{b2}} w^2} \right\} \quad (710)$$

Reescribimos nuevamente la ecuación:

$$\phi_{(z)}'''''' - [\pi_1 + \pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3] \phi_{(z)}'''' - [\delta^2 (1 + \pi_1 \pi_3)] \phi_{(z)}'' + [\delta^2 (\pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3)] \phi_{(z)} = 0 \quad (711)$$

Donde:

$$\{\pi_1 = \alpha^2, \pi_2 = \kappa^2 - 1, \pi_3 = \mu^2\} \quad (712)$$

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el polinomio característico:

$$P_{(r)} = r^6 - [\pi_1 + \pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3] r^4 - [\delta^2 (1 + \pi_1 \pi_3)] r^2 + [\delta^2 (\pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3)] = 0 \quad (713)$$

Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \quad (714)$$

Reescribimos el polinomio característico:

$$P_{(r)} = q^3 - (\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)q^2 - [\delta^2(1 + \pi_1\pi_3)]q + [\delta^2(\pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)] = 0 \quad (715)$$

Esta ecuación tendrá tres raíces reales y desiguales en q, si:

$$\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} < 0 \quad (716)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} [3(1 + \pi_1\pi_3)\delta^2 + (\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)^2] \\ b = -\frac{1}{27} \{2(\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)^3 + 9(\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)(1 + \pi_1\pi_3)\delta^2 - 27(\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)\delta^2\} \end{array} \right\} \quad (717)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} = & -\frac{\delta^2}{108} \{ \pi_1^4 [4\pi_2(1 + \pi_2)^3] \\ & + \pi_1^2 [(1 + 20\pi_2 - 8\pi_2^2) - 2(1 + \pi_2)(1 + 8\pi_2^2)\pi_1\pi_3 + (1 + \pi_2)^2\pi_1^2\pi_3^2] \delta^2 \\ & + [4 - 8(1 - 2\pi_1)\pi_1\pi_3 + 2(1 - 2\pi_1 + 12\pi_2^2)\pi_1^2\pi_3^2 + 2(1 - \pi_1)\pi_1^3\pi_3^3] \delta^4 \\ & + \pi_3^2 [-8 - 8(1 - 2\pi_2)\pi_1\pi_3 + \pi_1^2\pi_3^2] \delta^6 + (4\pi_3^4) \delta^8 \} \end{aligned} \quad (718)$$

Numéricamente, se puede demostrar que la ecuación siempre es negativa cuando:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \pi_1 < 10^6 \\ 0 < \pi_2 < 0.5 \\ 0 < \pi_3 < 0.5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha < 10^3 \\ 0 < \kappa < 1.2247 \\ 0 < \mu < 0.7071 \end{array} \right\} \quad (719)$$

Definimos un autovalor crítico:

$$\pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3 = 0 \rightarrow \delta_c^2 = \frac{\pi_1\pi_2}{\pi_3} \quad (720)$$

Se presentan dos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales positivas y una raíz real negativa.

$$\pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3 > 0 \rightarrow \delta^2 < \frac{\pi_1\pi_2}{\pi_3} \rightarrow \delta < \delta_{cr} \quad (721)$$

- Caso 2: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva y dos raíces reales negativas.

$$\pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3 < 0 \rightarrow \delta^2 > \frac{\pi_1\pi_2}{\pi_3} \rightarrow \delta > \delta_{cr} \quad (722)$$

Definimos q_i de tal manera que:

$$q_1 < q_2 < q_3 \quad (723)$$

De tal forma que $q_1 < 0$, $q_3 > 0$ y que $q_2 > 0$ para $\delta < \delta_{cr}$ y $q_2 < 0$ para $\delta > \delta_{cr}$.

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\varnothing}{3} + \frac{2\pi i}{3}\right) + \frac{\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3}{3} ; i = 1, 2, 3 \\ \varnothing = \arccos\left(\frac{3b}{2a}\sqrt{-\frac{3}{a}}\right) \end{array} \right\} \quad (724)$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Normalizando por la variable $z = x/H$ las dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{(z)}'''' - \alpha^2\varnothing_{(z)}'' + \alpha^2H\lambda'_{(z)} - \delta^2\varnothing_{(z)} = 0 \\ H\lambda''_{(z)} + [\alpha^2(\kappa^2 - 1)]\varnothing'_{(z)} - [\alpha^2(\kappa^2 - 1) - \delta^2\mu^2]H\lambda_{(z)} = 0 \end{array} \right\} \quad (725)$$

Expresándolo en términos de π_1, π_2 y π_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{(z)}'''' - \pi_1\varnothing_{(z)}'' + \pi_1H\lambda'_{(z)} - \delta^2\varnothing_{(z)} = 0 \\ H\lambda''_{(z)} + \pi_1\pi_2\varnothing'_{(z)} - (\pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3)H\lambda_{(z)} = 0 \end{array} \right\} \quad (726)$$

La solución será de la forma:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} H\lambda_{(z)} \\ \Phi_{(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} e^{rz} \quad (727)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación, se obtienen dos ecuaciones homogéneas que escritas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 r & r^4 - \pi_1 r^2 - \delta^2 \\ r^2 - (\pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3) & \pi_1 \pi_2 r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (728)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$r^6 - [\pi_1 + \pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3] r^4 - [\delta^2 (1 + \pi_1 \pi_3)] r^2 + [\delta^2 (\pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3)] = 0 \quad (729)$$

Para todas las raíces, la ecuación implica:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i^4 - \pi_1 r_i^2 - \delta^2 \\ -\pi_1 r_i \end{bmatrix} C ; i = 1, 2, \dots, 6 \quad (730)$$

Donde C es una constante arbitraria. Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \quad (731)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$q^3 - (\pi_1 + \pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3) q^2 - [\delta^2 (1 + \pi_1 \pi_3)] q + [\delta^2 (\pi_1 \pi_2 - \delta^2 \pi_3)] = 0 \quad (732)$$

Se demostró que las raíces son siempre reales para los intervalos dados en la ecuación.

Reescribiendo la solución completa:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} H\lambda_{(z)} \\ \Phi_{(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} e^{rz} = \sum_{i=1}^6 C_i \begin{bmatrix} r_i^4 - \pi_1 r_i^2 - \delta^2 \\ -\pi_1 r_i \end{bmatrix} e^{r_i z} \quad (733)$$

Sustituyendo esta ecuación completa en las condiciones de borde, se obtienen:

- En la base (z=0):

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i = 0 \\ \phi'_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^2 = 0 \\ H\lambda_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i (r_i^4 - \pi_1 r_i^2 - \delta^2) = 0 \end{array} \right\} \quad (734)$$

- En la parte superior (z=1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi''_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^3 e^{r_i} = 0 \\ \phi'''_{(1)} - \pi_1 [\phi'_{(1)} - H\lambda_{(1)}] = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i e^{r_i} = 0 \\ H\lambda'_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i (r_i^4 - \pi_1 r_i^2 - \delta^2) e^{r_i} = 0 \end{array} \right\} \quad (735)$$

Definiendo:

$$D_i = r_i^4 - \pi_1 r_i^2 - \delta^2 = q_i^2 - \pi_1 q_i - \delta^2 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (736)$$

El sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde, se escribe en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{q_1} & -\sqrt{q_1} & \sqrt{q_2} & -\sqrt{q_2} & \sqrt{q_3} & -\sqrt{q_3} \\ q_1 & q_1 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 \\ D_1 & D_1 & D_2 & D_2 & D_3 & D_3 \\ q_1^{3/2} e^{\sqrt{q_1}} & -q_1^{3/2} e^{-\sqrt{q_1}} & q_2^{3/2} e^{\sqrt{q_2}} & -q_2^{3/2} e^{-\sqrt{q_2}} & q_3^{3/2} e^{\sqrt{q_3}} & -q_3^{3/2} e^{-\sqrt{q_3}} \\ e^{\sqrt{q_1}} & e^{-\sqrt{q_1}} & e^{\sqrt{q_2}} & e^{-\sqrt{q_2}} & e^{\sqrt{q_3}} & e^{-\sqrt{q_3}} \\ \sqrt{q_1} D_1 e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1} D_1 e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2} D_2 e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2} D_2 e^{-\sqrt{q_2}} & \sqrt{q_3} D_3 e^{\sqrt{q_3}} & -\sqrt{q_3} D_3 e^{-\sqrt{q_3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (737)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Mediante algunas manipulaciones simples del determinante en la ecuación, se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 \\ 0 & D_1 & 0 & D_2 & 0 & D_3 \\ q_1 c_1 & q_1^2 s_1 & q_2 c_2 & q_2^2 s_2 & q_3 c_3 & q_3^2 s_3 \\ s_1 & c_1 & s_2 & c_2 & s_3 & c_3 \\ D_1 c_1 & q_1 D_1 s_1 & D_2 c_2 & q_2 D_2 s_2 & D_3 c_3 & q_3 D_3 s_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (738)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i(z) = \frac{1}{2\sqrt{q_i}} [e^{\sqrt{q_i}z} - e^{-\sqrt{q_i}z}] \\ c_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_i}z} + e^{-\sqrt{q_i}z}] \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} s_1(z) = \frac{1}{|q_1|} \sin(\sqrt{|q_1|}z) \\ s_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|q_2|}} \sinh(\sqrt{|q_2|}z) ; \lambda < \lambda_c \\ \frac{1}{\sqrt{|q_2|}} \sin(\sqrt{|q_2|}z) ; \lambda > \lambda_c \end{cases} \\ s_3(z) = \frac{1}{\sqrt{|q_3|}} \sinh(\sqrt{|q_3|}z) \\ c_1(z) = \cos(\sqrt{|q_1|}z) \\ c_2(z) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{|q_2|}z) ; \lambda < \lambda_c \\ \cos(\sqrt{|q_2|}z) ; \lambda > \lambda_c \end{cases} \\ c_3(z) = \cosh(\sqrt{|q_3|}z) \end{array} \right\} \quad (739)$$

$s_i = s_i(1) ; c_i = c_i(1)$

Una reducción adicional en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} (q_1^2 Q_1 s_1 + q_2^2 Q_2 s_2 + q_3^2 Q_3 s_3) & (q_2 c_2 - q_1 c_1) & (q_3 c_3 - q_1 c_1) \\ (Q_1 c_1 + Q_2 c_2 + Q_3 c_3) & (s_2 - s_1) & (s_3 - s_1) \\ (q_1 D_1 Q_1 s_1 + q_2 D_2 Q_2 s_2 + q_3 D_3 Q_3 s_3) & (D_2 c_2 - D_1 c_1) & (D_3 c_3 - D_1 c_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (740)$$

Teniendo en cuenta que:

$$c_i^2 - q_i s_i^2 = 1; i = 1, 2, 3 \quad (741)$$

La determinante se puede escribir en su forma más simple:

$$\begin{aligned} & Q_2 Q_3 [2 + (q_2 + q_3) s_2 s_3] c_1 + Q_3 Q_1 [2 + (q_3 + q_1) s_3 s_1] c_2 + Q_1 Q_2 [2 + (q_1 + q_2) s_1 s_2] c_3 \\ & + (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) c_1 c_2 c_3 = 0 \end{aligned} \quad (742)$$

Donde:

$$\begin{cases} Q_1 = q_3 D_2 - q_2 D_3 = (q_2 - q_3)(q_2 q_3 + \delta^2) \\ Q_2 = q_1 D_3 - q_3 D_1 = (q_3 - q_1)(q_3 q_1 + \delta^2) \\ Q_3 = q_2 D_1 - q_1 D_2 = (q_1 - q_2)(q_1 q_2 + \delta^2) \end{cases} \quad (743)$$

Reescribiendo la determinante como $F(\delta^2)$:

$$\begin{aligned} F(\delta^2) = & Q_2 Q_3 [2 + (q_2 + q_3) s_2 s_3] c_1 + Q_3 Q_1 [2 + (q_3 + q_1) s_3 s_1] c_2 \\ & + Q_1 Q_2 [2 + (q_1 + q_2) s_1 s_2] c_3 + (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) c_1 c_2 c_3 = 0 \end{aligned} \quad (744)$$

Resolviendo esta ecuación característica se obtienen soluciones para δ por métodos numéricos y consecuentemente se obtienen los periodos de vibración. Es importante mencionar que por lo general q_3 tiende a un valor numérico grande, por lo que es necesario tener cuidado para evitar problemas numéricos.

$$w = \frac{\delta}{H^2} \sqrt{\frac{K_{b2}}{\gamma_u}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H^2}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_{b2}}} \quad (745)$$

- **Formas de modo**

Los vectores propios se pueden obtener resolviendo la ecuación para las constantes C_i . Para simplificar el problema de la matriz, las constantes C_i se transformarán en un conjunto de nuevas constantes \bar{C}_i mediante la transformación:

$$\begin{cases} 2C_{2i-1} = \bar{C}_{2i-1} + \frac{1}{\sqrt{q_i}} \bar{C}_{2i} \\ 2C_{2i} = \bar{C}_{2i-1} - \frac{1}{\sqrt{q_i}} \bar{C}_{2i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \quad (746)$$

La ecuación se reduce:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 & 0 \\ D_1 & 0 & D_2 & 0 & D_3 & 0 \\ q_1^2 s_1 & q_1 c_1 & q_2^2 s_2 & q_2 c_2 & q_3^2 s_3 & q_3 c_3 \\ c_1 & s_1 & c_2 & s_2 & c_3 & s_3 \\ q_1 D_1 s_1 & D_1 c_1 & q_2 D_2 s_2 & D_2 c_2 & q_3 D_3 s_3 & D_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_5 \\ \bar{C}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (747)$$

Dado que el determinante de esta matriz es cero, las constantes \bar{C}_1 a \bar{C}_5 se pueden expresar como una función de \bar{C}_6 . Eliminando la quinta ecuación en (3.47), la ecuación matricial se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 \\ D_1 & 0 & D_2 & 0 & D_3 \\ q_1^2 s_1 & q_1 c_1 & q_2^2 s_2 & q_2 c_2 & q_3^2 s_3 \\ q_1 D_1 s_1 & D_1 c_1 & q_2 D_2 s_2 & D_2 c_2 & q_3 D_3 s_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_5 \end{Bmatrix} = -\bar{C}_6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ q_3 c_3 \\ D_3 c_3 \end{Bmatrix} \quad (748)$$

Que se puede resolver para la constante \bar{C}_i :

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_5 \end{Bmatrix} = -\bar{C}_6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ q_1 & 0 & q_2 & 0 & q_3 \\ D_1 & 0 & D_2 & 0 & D_3 \\ q_1^2 s_1 & q_1 c_1 & q_2^2 s_2 & q_2 c_2 & q_3^2 s_3 \\ q_1 D_1 s_1 & D_1 c_1 & q_2 D_2 s_2 & D_2 c_2 & q_3 D_3 s_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ q_3 c_3 \\ D_3 c_3 \end{Bmatrix} \quad (749)$$

Operando:

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_5 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{C}_6}{Q_2 Q_3 (q_2 s_2 - q_3 s_3) - Q_3 Q_1 (q_3 s_3 - q_1 s_1)} \begin{Bmatrix} Q_1 (Q_1 c_2 c_3 + Q_2 c_3 c_1 + Q_3 c_1 c_2) \\ Q_3 Q_1 (q_3 s_3 - q_1 s_1) c_2 - Q_1 Q_2 (q_1 s_1 - q_2 s_2) c_3 \\ Q_2 (Q_1 c_2 c_3 + Q_2 c_3 c_1 + Q_3 c_1 c_2) \\ Q_1 Q_2 (q_1 s_1 - q_2 s_2) c_3 - Q_2 Q_3 (q_2 s_2 - q_3 s_3) c_1 \\ Q_3 (Q_1 c_2 c_3 + Q_2 c_3 c_1 + Q_3 c_1 c_2) \end{Bmatrix} \quad (750)$$

Y finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_5 \\ \bar{C}_6 \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} Q_1 \chi_4 \\ \chi_2 - \chi_3 \\ Q_2 \chi_4 \\ \chi_3 - \chi_1 \\ Q_3 \chi_4 \\ \chi_1 - \chi_2 \end{Bmatrix} \quad (751)$$

Donde C es una constante y

$$\begin{cases} \chi_1 = Q_2 Q_3 (q_2 s_2 - q_3 s_3) c_1 \\ \chi_2 = Q_3 Q_1 (q_3 s_3 - q_1 s_1) c_2 \\ \chi_3 = Q_1 Q_2 (q_1 s_1 - q_2 s_2) c_3 \\ \chi_4 = Q_1 c_2 c_3 + Q_2 c_3 c_1 + Q_3 c_1 c_2 \end{cases} \quad (752)$$

Ahora se puede obtener el desplazamiento $\Phi_{(z)}$:

$$\Phi_{(z)} = -\pi_1[\bar{C}_1 q_1 s_1(z) + \bar{C}_2 c_1(z) + \bar{C}_3 q_2 s_2(z) + \bar{C}_4 c_2(z) + \bar{C}_5 q_3 s_3(z) + \bar{C}_6 c_3(z)] \quad (753)$$

Y sustituyendo los valores de \bar{C}_i dados en la ecuación

$$\begin{aligned} \Phi_{(z)} = & -\pi_1 C \{ \chi_4 [Q_1 q_1 s_1(z) + Q_2 q_2 s_2(z) + Q_3 q_3 s_3(z)] + (\chi_2 - \chi_3) c_1(z) \\ & + (\chi_3 - \chi_1) c_2(z) + (\chi_1 - \chi_2) c_3(z) \} \end{aligned} \quad (754)$$

Normalizamos de tal manera que $\Phi_{(1)} = 1$:

$$\bar{\Phi}_{(z)} = \frac{\Phi_{(z)}}{\Phi_{(1)}} \quad (755)$$

4.2.6.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\left(\begin{array}{c} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right) = \left(T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{array}{c} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left(\begin{array}{c} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right) \quad (756)$$

Reescribiendo:

$$\left(\begin{array}{c} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right) = T_{wi}(0) \left(\begin{array}{c} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right) \quad (757)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (758)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (759)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (760)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{Bmatrix} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{s1}[\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + K_{b2}u'''_{(0)} = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln}(0) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (761)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (762)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (763)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.7 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1)

4.2.7.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo GSB1 de tres campos son:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'_{(x,t)}{}^2 + K_{s1} [u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}]^2 + K_{b2} \theta'_{(x,t)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}]^2 \right\} dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{764}$$

Donde:

$$\{ \gamma_u = \rho(A_1 + A_2); \gamma_\psi = \rho I_1; \gamma_\theta = \rho I_2 \} \tag{765}$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB1 de tres campos se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 \right] dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'_{(x,t)}{}^2 + K_{s1} [u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}]^2 + K_{b2} \theta'_{(x,t)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}]^2 \right\} dx
 \end{aligned} \tag{766}$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{U} &= \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)} \delta \dot{\psi}_{(x,t)} + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} \delta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \psi'_{(x,t)} \delta \psi'_{(x,t)} \right. \\
 &\quad - K_{s1} [u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} + K_{s1} [u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \delta \psi_{(x,t)} - K_{b2} \theta'_{(x,t)} \delta \theta'_{(x,t)} \\
 &\quad \left. - K_{s2} [u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} + K_{s2} [u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}] \delta \theta_{(x,t)} \right\} dx
 \end{aligned} \tag{767}$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \left\{ [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u'_{(x,t)} + K_{s1}\psi_{(x,t)} + K_{s2}\theta_{(x,t)}] \delta u_{(x,t)} \right\}_0^H \\
& + [\gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)} - K_{b1}\psi'_{(x,t)}] \delta \psi_{(x,t)} \Big|_0^H + [\gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta'_{(x,t)}] \delta \theta_{(x,t)} \Big|_0^H \\
& - \int_0^H \{ \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u''_{(x,t)} + K_{s1}\psi'_{(x,t)} + K_{s2}\theta'_{(x,t)} \} \delta u_{(x,t)} \\
& - \int_0^H \{ \gamma_\psi \ddot{\psi}_{(x,t)} - K_{b1}\psi''_{(x,t)} - K_{s1}[u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \} \delta \psi_{(x,t)} \\
& - \int_0^H \{ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta''_{(x,t)} - K_{s2}[u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}] \} \delta \theta_{(x,t)}
\end{aligned} \tag{768}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u''_{(x,t)} + K_{s1}\psi'_{(x,t)} + K_{s2}\theta'_{(x,t)} = 0 \\
\gamma_\psi \ddot{\psi}_{(x,t)} - K_{b1}\psi''_{(x,t)} - K_{s1}[u'_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] = 0 \\
\gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta''_{(x,t)} - K_{s2}[u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}] = 0
\end{array} \right\} \tag{769}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l}
(K_{s1} + K_{s2})u'_{(H)} - K_{s1}\psi_{(H)} - K_{s2}\theta_{(H)} = 0 \\
\psi'_{(H)} = 0 \\
\theta'_{(H)} = 0
\end{array} \right\} \tag{770}$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_{(x,t)} = \varnothing_{(x)}q_{(t)} \\
\psi_{(x,t)} = \lambda_{1(x)}q_{(t)} \\
\theta_{(x,t)} = \lambda_{2(x)}q_{(t)}
\end{array} \right\} \tag{771}$$

Donde $\varnothing_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-(K_{s1} + K_{s2})\phi''_{(x)} + K_{s1}\lambda'_{1(x)} + K_{s2}\lambda'_{2(x)}}{\gamma_u \phi_{(x)}} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-K_{b1}\lambda''_{1(x)} - K_{s1}\phi'_{(x)} + K_{s1}\lambda_{1(x)}}{\gamma_\psi \lambda_{1(x)}} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-K_{b2}\lambda''_{2(x)} - K_{s2}\phi'_{(x)} + K_{s2}\lambda_{2(x)}}{\gamma_\theta \lambda_{2(x)}} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (772)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})\phi''_{(x)} - K_{s1}\lambda'_{1(x)} - K_{s2}\lambda'_{2(x)} + w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \\ K_{b1}\lambda''_{1(x)} + K_{s1}\phi'_{(x)} - K_{s1}\lambda_{1(x)} + w^2 \gamma_\psi \lambda_{1(x)} = 0 \\ K_{b2}\lambda''_{2(x)} + K_{s2}\phi'_{(x)} - K_{s2}\lambda_{2(x)} + w^2 \gamma_\theta \lambda_{2(x)} = 0 \end{array} \right. \quad (773)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{ccc} (K_{s1} + K_{s2})D^2 + w^2 \gamma_u & -K_{s1}D & -K_{s2}D \\ K_{s1}D & K_{b1}D^2 + (w^2 \gamma_\psi - K_{s1}) & 0 \\ K_{s2}D & 0 & K_{b2}D^2 + (w^2 \gamma_\theta - K_{s2}) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_{(x)} \\ \lambda_{1(x)} \\ \lambda_{2(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (774)$$

Es decir;

$$\begin{aligned} \phi''''_{(x)} - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_\psi)(K_{s1} + K_{s2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] \phi''''_{(x)} \\ - w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}(\gamma_\theta + \gamma_\psi) + (K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1})\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right. \\ \left. - \frac{(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta\gamma_\psi + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_\psi)\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right\} \phi''_{(x)} \\ + \frac{\gamma_u w^2 (w^2 \gamma_\psi - K_{s1})(w^2 \gamma_\theta - K_{s2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (775)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}^{(6)} - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_\psi)(K_{s1} + K_{s2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}^{(4)} \\ - w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}(\gamma_\theta + \gamma_\psi) + (K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1})\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right. \\ \left. - \frac{(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta\gamma_\psi + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_\psi)\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right\} H^4 \phi_{(z)}'' \\ + \frac{\gamma_u w^2 (w^2 \gamma_\psi - K_{s1})(w^2 \gamma_\theta - K_{s2}) H^6}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} = 0 \end{aligned} \quad (776)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}^{(6)} - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] \phi_{(z)}^{(4)} \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\psi^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} \phi_{(z)}'' \\ + \delta^2 (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (777)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^2}{K_{s1} + K_{s2}}} w^2 \\ \mu_\psi = \sqrt{\frac{K_{s1} + K_{s2}}{K_{b1}} \frac{\gamma_\psi}{\gamma_u}}, \mu_\theta = \sqrt{\frac{K_{s1} + K_{s2}}{K_{b2}} \frac{\gamma_\theta}{\gamma_u}}, \eta_\psi = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}} \end{array} \right. \quad (778)$$

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_{(r)} = r^6 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] r^4 \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\psi^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} r^2 \\ + \delta^2 (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0 \end{aligned} \quad (779)$$

Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{array} ; i = 1, 2, 3 \right\} \quad (780)$$

Reescribimos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
P_{(r)} = & q^3 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] q^2 \\
& - \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} q \\
& + \delta^2 (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0
\end{aligned} \tag{781}$$

Esta ecuación tendrá tres raíces reales y desiguales en q, si:

$$\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} < 0 \tag{782}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
a = & -\frac{1}{3} \left[3\delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} \right. \\
& \left. + [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2]^2 \right] \\
b = & -\frac{1}{27} \left\{ 2 [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2]^3 \right. \\
& + 9 [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2) \\
& \left. - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} - 27 \delta^2 (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \right\}
\end{aligned} \tag{783}$$

Se presentan dos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales positivas y una raíz real negativa.
- Caso 2: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva y dos raíces reales negativas.

Definimos q_i de tal manera que:

$$q_1 < q_2 < q_3 \tag{784}$$

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$\begin{aligned}
q_i = & 2 \sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\varnothing}{3} + \frac{2\pi i}{3} \right) - \frac{\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2}{3} ; i = 1, 2, 3 \\
\varnothing = & \arccos \left(\frac{3b}{2a} \sqrt{-\frac{3}{a}} \right)
\end{aligned} \tag{785}$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Normalizando por la variable $z = x/H$ las dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{cases} (K_{s1} + K_{s2})\Phi''_{(z)} - K_{s1}H\lambda'_{1(x)} - K_{s2}H\lambda'_{2(x)} + H^2w^2\gamma_u\Phi_{(x)} = 0 \\ K_{b1}H\lambda''_{1(z)} + H^2K_{s1}\Phi'_{(z)} - H^2K_{s1}H\lambda_{1(z)} + H^2w^2\gamma_\psi H\lambda_{1(z)} = 0 \\ K_{b2}H\lambda''_{2(z)} + H^2K_{s2}\Phi'_{(z)} - H^2K_{s2}H\lambda_{2(z)} + H^2w^2\gamma_\theta H\lambda_{2(z)} = 0 \end{cases} \quad (786)$$

La solución será de la forma:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} \Phi_{(z)} \\ H\lambda_{1(z)} \\ H\lambda_{2(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} e^{rz} \quad (787)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación, se obtienen dos ecuaciones homogéneas que escritas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} (K_{s1} + K_{s2})r^2 + H^2w^2\gamma_u & -K_{s1}r & -K_{s2}r \\ H^2K_{s1}r & K_{b1}r^2 + H^2(w^2\gamma_\psi - K_{s1}) & 0 \\ H^2K_{s2}r & 0 & K_{b2}r^2 + H^2(w^2\gamma_\theta - K_{s2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (788)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned} P_{(r)} = r^6 - [\alpha^2\kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2)\delta^2]r^4 \\ - \delta^2\{\alpha^2[(\kappa^2 - 1)\mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2) - (\mu_\psi^2\mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2)\delta^2\}r^2 \\ + \delta^2(\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)(\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0 \end{aligned} \quad (789)$$

Para todas las raíces, la ecuación implica:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{b1}K_{b2}\{r_i^4 + [(\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2)]r_i^2 + (\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)(\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)\} \\ -H^2K_{s1}K_{b2}r_i[r_i^2 + (\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] \\ -H^2K_{s2}K_{b1}r_i[r_i^2 + (\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)] \end{Bmatrix} C \quad (790)$$

Donde $i=1, 2, 3, \dots, 6$ y C es una constante arbitraria. Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \quad (791)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} q^3 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] q^2 \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\phi^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} q \\ + \delta^2 (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0 \end{aligned} \quad (792)$$

Reescribiendo la solución completa:

$$W_{(z)} = \sum_{i=1}^6 C_i \begin{bmatrix} K_{b1} K_{b2} \{ r_i^4 + [(\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 - (\eta_\phi^2 + \eta_\theta^2)] r_i^2 + (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \} \\ - H^2 K_{s1} K_{b2} r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] \\ - H^2 K_{s2} K_{b1} r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)] \end{bmatrix} e^{r_i z} \quad (793)$$

Sustituyendo esta ecuación completa en las condiciones de borde, se obtienen:

- En la base (z=0):

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i \{ r_i^4 + [(\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 - (\eta_\phi^2 + \eta_\theta^2)] r_i^2 + (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \} = 0 \\ H\lambda_{1(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] = 0 \\ H\lambda_{2(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (794)$$

- En la parte superior (z=1):

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} (K_{s1} + K_{s2}) \Phi'_{(1)} - K_{s1} H \lambda_{1(1)} - K_{s2} H \lambda_{2(1)} &= 0 \\ \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i \{ r_i^4 - [\alpha^2 \kappa^2 - (\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] r_i^2 - \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] - \mu_\psi^2 \mu_\theta^2 \delta^2 \} \} e^{r_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \right. \\ \left. \left\{ \begin{aligned} H\lambda'_{(1)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^2 [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] e^{r_i} = 0 \\ H\lambda'_{(2)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^2 [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)] e^{r_i} = 0 \end{aligned} \right\} \right\} \quad (795)$$

Definiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{1i} = q_i^2 + [(\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\phi^2 + \eta_\theta^2)]q_i + (\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2)(\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \\ Z_{2i} = q_i^2 - [\alpha^2\kappa^2 - (\mu_\psi^2 + \mu_\theta^2)\delta^2]q_i - \delta^2\{\alpha^2[(\kappa^2 - 1)\mu_\theta^2 + \mu_\psi^2] - \mu_\psi^2\mu_\theta^2\delta^2\}; i = 1, 2, 3 \\ O_i = r_i^2 + (\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = q_i + (\delta^2\mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \\ E_i = r_i^2 + (\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) = q_i + (\delta^2\mu_\psi^2 - \eta_\psi^2) \end{array} \right\} \quad (796)$$

El sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde, se escribe en forma de matriz:

$$\left[\begin{array}{cccccc} Z_{11} & -Z_{11} & Z_{12} & -Z_{12} & Z_{13} & -Z_{13} \\ \sqrt{q_1}O_1 & -\sqrt{q_1}O_1 & \sqrt{q_2}O_2 & -\sqrt{q_2}O_2 & \sqrt{q_3}O_3 & -\sqrt{q_3}O_3 \\ \sqrt{q_1}E_1 & -\sqrt{q_1}E_1 & \sqrt{q_2}E_2 & -\sqrt{q_2}E_2 & \sqrt{q_3}E_3 & -\sqrt{q_3}E_3 \\ \sqrt{q_1}Z_{21}e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1}Z_{21}e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2}Z_{22}e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2}Z_{22}e^{-\sqrt{q_2}} & \sqrt{q_3}Z_{23}e^{\sqrt{q_3}} & -\sqrt{q_3}Z_{23}e^{-\sqrt{q_3}} \\ q_1O_1e^{\sqrt{q_1}} & q_1O_1e^{-\sqrt{q_1}} & q_2O_2e^{\sqrt{q_2}} & q_2O_2e^{-\sqrt{q_2}} & q_3O_3e^{\sqrt{q_3}} & q_3O_3e^{-\sqrt{q_3}} \\ q_1E_1e^{\sqrt{q_1}} & q_1E_1e^{-\sqrt{q_1}} & q_2E_2e^{\sqrt{q_2}} & q_2E_2e^{-\sqrt{q_2}} & q_3E_3e^{\sqrt{q_3}} & q_3E_3e^{-\sqrt{q_3}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (797)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Mediante algunas manipulaciones simples del determinante en la ecuación, se puede escribir como:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{q_1}O_1/Z_{11} & 0 & \sqrt{q_2}O_2/Z_{12} & 0 & \sqrt{q_3}O_3/Z_{13} & 0 \\ \sqrt{q_1}E_1/Z_{11} & 0 & \sqrt{q_2}E_2/Z_{12} & 0 & \sqrt{q_3}E_3/Z_{13} & 0 \\ \sqrt{q_1}C_1Z_{21}/Z_{11} & \sqrt{q_1}S_1Z_{21} & \sqrt{q_2}C_2Z_{22}/Z_{12} & \sqrt{q_2}S_2Z_{22} & \sqrt{q_3}C_3Z_{23}/Z_{13} & \sqrt{q_3}S_3Z_{23} \\ q_1C_1O_1/Z_{11} & q_1S_1O_1 & q_2C_2O_2/Z_{12} & q_2S_2O_2 & q_3C_3O_3/Z_{13} & q_3S_3O_3 \\ q_1C_1E_1/Z_{11} & q_1S_1E_1 & q_2C_2E_2/Z_{12} & q_2S_2E_2 & q_3C_3E_3/Z_{13} & q_3S_3E_3 \end{array} \right| = 0 \quad (798)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_1}z} - e^{-\sqrt{q_1}z}] = \begin{cases} \sinh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \\ \sin(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \end{cases} \\ c_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_1}z} + e^{-\sqrt{q_1}z}] = \begin{cases} \cosh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \\ \cos(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \end{cases} \\ s_i = s_i(1); c_i = c_i(1) \end{array} \right\} \quad (799)$$

Una reducción adicional en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \frac{O_2}{Z_{12}} - \frac{O_1 E_2}{Z_{12} E_1} & \frac{O_3}{Z_{13}} - \frac{O_1 E_3}{Z_{13} E_1} \\ \frac{E_2}{Z_{12}} - \frac{E_1 O_2}{Z_{12} O_1} & \frac{E_3}{Z_{13}} - \frac{E_1 O_3}{Z_{13} O_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (800)$$

La determinante se puede escribir en su forma más simple:

$$\left(\frac{O_2}{Z_{12}} - \frac{O_1 E_2}{Z_{12} E_1}\right)\left(\frac{E_3}{Z_{13}} - \frac{E_1 O_3}{Z_{13} O_1}\right) - \left(\frac{E_2}{Z_{12}} - \frac{E_1 O_2}{Z_{12} O_1}\right)\left(\frac{O_3}{Z_{13}} - \frac{O_1 E_3}{Z_{13} E_1}\right) = 0 \quad (801)$$

Reescribiendo la determinante como $F(\delta^2)$:

$$F(\delta^2) = \left(\frac{O_2}{Z_{12}} - \frac{O_1 E_2}{Z_{12} E_1}\right)\left(\frac{E_3}{Z_{13}} - \frac{E_1 O_3}{Z_{13} O_1}\right) - \left(\frac{E_2}{Z_{12}} - \frac{E_1 O_2}{Z_{12} O_1}\right)\left(\frac{O_3}{Z_{13}} - \frac{O_1 E_3}{Z_{13} E_1}\right) = 0 \quad (802)$$

Resolviendo esta ecuación característica se obtienen soluciones para δ por métodos numéricos y consecuentemente se obtienen los periodos de vibración. Es importante mencionar que por lo general q_3 tiende a un valor numérico grande, por lo que es necesario tener cuidado para evitar problemas numéricos.

$$w = \frac{\delta}{H} \sqrt{\frac{K_{s2}}{\gamma_u}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_{s1} + K_{s2}}} \quad (803)$$

4.2.7.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \psi_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (804)$$

Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ \psi_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (805)$$

Reescribiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = T_{wi}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ \psi_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (806)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (807)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{array} \right\} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = t \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (808)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (809)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - K_{s1}\psi_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln(0)} = 0 \\ M_{rn(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (810)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (811)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_{11}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (812)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.8 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2)

4.2.8.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo GSB2 de tres campos son:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x,t)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}]^2 + K_{b2} \psi'_{(x,t)}{}^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]^2 dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{813}$$

Donde:

$$\{ \gamma_u = \rho(A_1 + A_2); \gamma_\psi = \rho I_1; \gamma_\theta = \rho I_2 \} \tag{814}$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB2 de tres campos se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 \right] dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x,t)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}]^2 + K_{b2} \psi'_{(x,t)}{}^2 \right. \\
 &\quad \left. + K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}]^2 \right\} dx
 \end{aligned} \tag{815}$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{U} &= \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)} \delta \dot{\psi}_{(x,t)} + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} \delta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta'_{(x,t)} \delta \theta'_{(x,t)} \right. \\
 &\quad - K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \delta \theta_{(x,t)} + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \delta \psi_{(x,t)} - K_{b2} \psi'_{(x,t)} \delta \psi'_{(x,t)} \\
 &\quad \left. - K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \delta \psi_{(x,t)} + K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \delta u'_{(x,t)} \right\} dx
 \end{aligned} \tag{816}$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] \right\} \delta u_{(x,t)} \Big|_0^H + \left[\gamma_\psi \dot{\psi}_{(x,t)} - K_{b2} \psi'_{(x,t)} \right] \delta \psi_{(x,t)} \Big|_0^H \\
& + \left[\gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta'_{(x,t)} \right] \delta \theta_{(x,t)} \Big|_0^H - \int_0^H \left\{ \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_{s2} [\psi'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}] \right\} \delta u_{(x,t)} \\
& - \int_0^H \left\{ \gamma_\psi \ddot{\psi}_{(x,t)} - K_{b2} \psi''_{(x,t)} + K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] - K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \right\} \delta \psi_{(x,t)} \\
& - \int_0^H \left\{ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta''_{(x,t)} + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] \right\} \delta \theta_{(x,t)}
\end{aligned} \tag{817}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_{s2} [\psi'_{(x,t)} - u''_{(x,t)}] = 0 \\ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b1} \theta''_{(x,t)} + K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] = 0 \\ \gamma_\psi \ddot{\psi}_{(x,t)} - K_{b2} \psi''_{(x,t)} + K_{s2} [\psi_{(x,t)} - u'_{(x,t)}] - K_{s1} [\theta_{(x,t)} - \psi_{(x,t)}] = 0 \end{array} \right\} \tag{818}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{(H)} - u'_{(H)} = 0 \\ \theta'_{(H)} = 0 \\ \psi'_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \tag{819}$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \\ \theta_{(x,t)} = \lambda_{1(x)} q_{(t)} \\ \psi_{(x,t)} = \lambda_{2(x)} q_{(t)} \end{array} \right\} \tag{820}$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left\{ \frac{K_{s2} [\lambda'_{2(x)} - \phi''_{(x)}]}{\gamma_u \phi_{(x)}} \right\} = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left\{ \frac{-K_{b1} \lambda''_{1(x)} + K_{s1} [\lambda_{1(x)} - \lambda_{2(x)}]}{\gamma_\theta \lambda_{1(x)}} \right\} = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-K_{b2} \lambda''_{2(x)} - K_{s2} \phi'_{(x)} + (K_{s1} + K_{s2}) \lambda_{2(x)} - K_{s1} \lambda_{1(x)}}{\gamma_\psi \lambda_{2(x)}} \right] = 0 \end{array} \right\} \tag{821}$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}(t) + w^2 q(t) = 0 \\ K_{s2}[\lambda'_{2(x)} - \phi''(x)] - w^2 \gamma_u \phi(x) = 0 \\ -K_{b1} \lambda''_{1(x)} + K_{s1}[\lambda_{1(x)} - \lambda_{2(x)}] - w^2 \gamma_\theta \lambda_{1(x)} = 0 \\ -K_{b2} \lambda''_{2(x)} - K_{s2} \phi'(x) + (K_{s1} + K_{s2}) \lambda_{2(x)} - K_{s1} \lambda_{1(x)} - w^2 \gamma_\psi \lambda_{2(x)} = 0 \end{array} \right. \quad (822)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{s2}D^2 + w^2\gamma_u & 0 & -K_{s2}D \\ 0 & K_{b1}D^2 + [w^2\gamma_\theta - K_{s1}] & K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{s1} & K_{b2}D^2 + [w^2\gamma_\psi - (K_{s1} + K_{s2})] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(x) \\ \lambda_{1(x)} \\ \lambda_{2(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (823)$$

Es decir;

$$\begin{aligned} \phi^{(6)}(x) - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + K_{s2}(K_{b1}\gamma_\psi + K_{b2}\gamma_\theta)}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} w^2 \right] \phi^{(4)}(x) \\ - w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}(\gamma_\psi + \gamma_\theta) + (K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1})\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \right. \\ \left. - \frac{K_{b1}\gamma_u\gamma_\psi + K_{b2}\gamma_u\gamma_\theta + K_{s2}\gamma_\psi\gamma_\theta}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} w^2 \right\} \phi''(x) \\ + \frac{\gamma_u w^2 [\gamma_\psi\gamma_\theta w^4 - [(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta + K_{s1}\gamma_\psi] w^2 + K_{s1}K_{s2}]}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \phi(z) = 0 \end{aligned} \quad (824)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned}
\phi_{(z)}^{''''''} - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + K_{s2}(K_{b1}\gamma_\psi + K_{b2}\gamma_\theta)}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}^{''''} \\
- w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}(\gamma_\psi + \gamma_\theta) + (K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1})\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \right. \\
\left. - \frac{K_{b1}\gamma_u\gamma_\psi + K_{b2}\gamma_u\gamma_\theta + K_{s2}\gamma_\psi\gamma_\theta}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} w^2 \right\} H^4 \phi_{(z)}^{''} \\
+ \frac{\gamma_u w^2 \{ \gamma_\psi\gamma_\theta w^4 - [(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta + K_{s1}\gamma_\psi] w^2 + K_{s1}K_{s2} \} H^6}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \phi_{(z)} = 0
\end{aligned} \tag{825}$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\phi_{(z)}^{''''''} - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] \phi_{(z)}^{''''} \\
- \delta^2 \{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\psi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} \phi_{(z)}^{''} \\
+ \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \phi_{(z)} = 0
\end{aligned} \tag{826}$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^2}{K_{s2}} w^2} \\ \mu_\psi = \sqrt{\frac{K_{s2} \gamma_\psi}{K_{b2} \gamma_u}}, \mu_\theta = \sqrt{\frac{K_{s2} \gamma_\theta}{K_{b1} \gamma_u}}, \eta_\psi = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}}, \eta_\theta = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}} \end{array} \right\} \tag{827}$$

Cuando se ignora las inercias rotacionales resulta:

$$\begin{aligned}
\phi_{(z)}^{''''''} - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{1}{K_{s2}} \gamma_u w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}^{''''} - \left(\frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \right) \gamma_u w^2 H^4 \phi_{(z)}^{''} \\
+ \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} \gamma_u w^2 H^6 \phi_{(z)} = 0
\end{aligned} \tag{828}$$

O su equivalente:

$$\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}} \phi_{(z)}^{''''''} - \left[(K_{b1} + K_{b2}) - \frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}K_{s2}} \gamma_u w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}^{''''} - \left[\frac{K_{b2}}{K_{s2}} + K_{b1} \left(\frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{s2}} \right) \right] \gamma_u w^2 H^4 \phi_{(z)}^{''} + \gamma_u w^2 H^6 \phi_{(z)} = 0 \tag{829}$$

Esta ecuación diferencial es idéntica a la ecuación diferencial propuesta por Chesnais en su tesis doctoral.

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
P_{(r)} &= r^6 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] r^4 \\
&\quad - \delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} r^2 \\
&\quad + \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0
\end{aligned} \tag{830}$$

Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \tag{831}$$

Reescribimos el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
P_{(r)} &= q^3 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] q^2 \\
&\quad - \delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} q \\
&\quad + \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0
\end{aligned} \tag{832}$$

Esta ecuación tendrá tres raíces reales y desiguales en q, si:

$$\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} < 0 \tag{833}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{3} \left[3\delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2]^2 \right] \\
b &= -\frac{1}{27} \left\{ 2 [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2]^3 \right. \\
&\quad + 9 [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] \delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\varphi^2 + \alpha^2) \right. \\
&\quad \left. \left. - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} - 27 \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \right\}
\end{aligned} \tag{834}$$

Se presentan dos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales positivas y una raíz real negativa.
- Caso 2: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva y dos raíces reales negativas.

Definimos q_i de tal manera que:

$$q_1 < q_2 < q_3 \quad (835)$$

De tal forma que $q_1 < 0$, $q_3 > 0$ y que $q_2 > 0$.

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$q_i = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi i}{3}\right) + \frac{\pi_1 + \pi_1\pi_2 - \delta^2\pi_3}{3}; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{3b}{2a} \sqrt{-\frac{3}{a}}\right) \quad (836)$$

• Frecuencia y periodos de vibración

Normalizando por la variable $z = x/H$ las dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s2}[H\lambda'_{2(z)} - \phi''_{(z)}] - H^2w^2\gamma_u\phi_{(z)} = 0 \\ -K_{b1}\lambda'_{1(z)} + H^2K_{s1}[\lambda_{1(z)} - \lambda_{2(z)}] - H^2w^2\gamma_\theta\lambda_{1(z)} = 0 \\ -K_{b2}H\lambda''_{2(z)} - H^2K_{s2}\phi'_{(z)} + H^2(K_{s1} + K_{s2})H\lambda_{2(z)} - H^2K_{s1}H\lambda_{1(z)} - H^2w^2\gamma_\psi H\lambda_{2(z)} = 0 \end{array} \right\} \quad (837)$$

La solución será de la forma:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} \phi_{(z)} \\ H\lambda_{1(z)} \\ H\lambda_{2(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} e^{rz} \quad (838)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación, se obtienen dos ecuaciones homogéneas que escritas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} K_{s2}r^2 + H^2w^2\gamma_u & 0 & -K_{s2}r \\ 0 & K_{b1}r^2 + H^2[w^2\gamma_\theta - K_{s1}] & H^2K_{s1} \\ H^2K_{s2}r & H^2K_{s1} & K_{b2}r^2 + [w^2\gamma_\psi - H^2(K_{s1} + K_{s2})] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (839)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned}
P_{(r)} = & r^6 - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] r^4 \\
& - \delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\phi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} r^2 \\
& + \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0
\end{aligned} \tag{840}$$

Para todas las raíces, la ecuación implica:

$$\begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{cases} = \left\{ \begin{array}{l} K_{s2} K_{b1} r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] \\ -H^2 K_{s1} K_{s2} (r_i^2 + \delta^2) \\ K_{b1} K_{s2} \{r_i^4 + [(1 + \mu_\theta^2) \delta^2 - \eta_\theta^2] r_i^2 + \delta^2 (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)\} \end{array} \right\} C \tag{841}$$

Donde $i=1, 2, 3, \dots, 6$ y C es una constante arbitraria. Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; i = 1, 2, 3 \tag{842}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned}
q^3 - & [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2] q^2 \\
& - \delta^2 \left\{ \alpha^2 [(\kappa^2 - 1) \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2] + (\eta_\theta^2 + \eta_\phi^2 + \alpha^2) - (\mu_\psi^2 \mu_\theta^2 + \mu_\psi^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \right\} q \\
& + \delta^2 [\delta^2 \mu_\psi^2 - (\alpha^2 + \eta_\psi^2)] (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = 0
\end{aligned} \tag{843}$$

Se demostró que las raíces son siempre reales para los intervalos dados en la ecuación.

Reescribiendo la solución completa:

$$W_{(z)} = \sum_{i=1}^6 C_i \left[\begin{array}{l} K_{s2} K_{b1} r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] \\ -H^2 K_{s1} K_{s2} (r_i^2 + \delta^2) \\ K_{b1} K_{s2} \{r_i^4 + [(1 + \mu_\theta^2) \delta^2 - \eta_\theta^2] r_i^2 + \delta^2 (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)\} \end{array} \right] e^{r_i z} \tag{844}$$

Sustituyendo esta ecuación completa en las condiciones de borde, se obtienen:

- En la base ($z=0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] = 0 \\ H\lambda_{1(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i (r_i^2 + \delta^2) = 0 \\ H\lambda_{2(0)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i \{r_i^4 + [(1 + \mu_\theta^2)\delta^2 - \eta_\theta^2]r_i^2 + \delta^2(\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)\} = 0 \end{array} \right. \quad (845)$$

- En la parte superior (z=1):

$$\left\{ \begin{array}{l} H\lambda_{2(1)} - \Phi'_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i [r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)] e^{r_i} = 0 \\ H\lambda'_{(1)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i (r_i^2 + \delta^2) = 0 \\ H\lambda'_{(2)} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i \{r_i^4 + [(1 + \mu_\theta^2)\delta^2 - \eta_\theta^2]r_i^2 + \delta^2(\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2)\} e^{r_i} = 0 \end{array} \right. \quad (846)$$

Definiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_i = r_i^2 + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = q_i + (\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \\ O_i = r_i^2 + \delta^2 = q_i + \delta^2 \\ E_i = r_i^4 + [(1 + \mu_\theta^2)\delta^2 - \eta_\theta^2]r_i^2 + \delta^2(\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) = q_i^2 + [(1 + \mu_\theta^2)\delta^2 - \eta_\theta^2]q_i + \delta^2(\delta^2 \mu_\theta^2 - \eta_\theta^2) \end{array} \right. \quad (847)$$

El sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde, se escribe en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{q_1}Z_1 & -\sqrt{q_1}Z_1 & \sqrt{q_2}Z_2 & -\sqrt{q_2}Z_2 & \sqrt{q_3}Z_3 & -\sqrt{q_3}Z_3 \\ O_1 & O_1 & O_2 & O_2 & O_3 & O_3 \\ E_1 & E_1 & E_2 & E_2 & E_3 & E_3 \\ Z_1 e^{\sqrt{q_1}} & Z_1 e^{-\sqrt{q_1}} & Z_2 e^{\sqrt{q_2}} & Z_2 e^{-\sqrt{q_2}} & Z_3 e^{\sqrt{q_3}} & Z_3 e^{-\sqrt{q_3}} \\ \sqrt{q_1}O_1 & -\sqrt{q_1}O_1 & \sqrt{q_2}O_2 & -\sqrt{q_2}O_2 & \sqrt{q_3}O_3 & -\sqrt{q_3}O_3 \\ \sqrt{q_1}E_1 & -\sqrt{q_1}E_1 & \sqrt{q_2}E_2 & -\sqrt{q_2}E_2 & \sqrt{q_3}E_3 & -\sqrt{q_3}E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (848)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Mediante algunas manipulaciones simples del determinante en la ecuación, se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & O_1/Z_1 & 0 & O_2/Z_2 & 0 & O_3/Z_3 \\ 0 & E_1/Z_1 & 0 & E_2/Z_2 & 0 & E_3/Z_3 \\ S_1 & C_1 & S_2 & C_2 & S_3 & C_3 \\ O_1/Z_1 & 0 & O_2/Z_2 & 0 & O_3/Z_3 & 0 \\ E_1/Z_1 & 0 & E_2/Z_2 & 0 & E_3/Z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (849)$$

Donde:

$$s_i(z) = \frac{1}{2\sqrt{q_i}} [e^{\sqrt{q_i}z} - e^{-\sqrt{q_i}z}] = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{|q_i|}} \sinh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{|q_i|}} \sin(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \right) \end{cases}$$

$$c_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_i}z} + e^{-\sqrt{q_i}z}] = \begin{cases} \left(\cosh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \right) \\ \left(\cos(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \right) \end{cases}$$

$$s_i = s_i(1) ; c_i = c_i(1) \quad (850)$$

Una reducción adicional en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \frac{O_2}{Z_2} - \frac{O_1}{Z_1} & \frac{O_3}{Z_3} - \frac{O_1}{Z_1} \\ \frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_1}{Z_1} & \frac{E_3}{Z_3} - \frac{E_1}{Z_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (851)$$

La determinante se puede escribir en su forma más simple:

$$\left(\frac{O_2}{Z_2} - \frac{O_1}{Z_1} \right) \left(\frac{E_3}{Z_3} - \frac{E_1}{Z_1} \right) - \left(\frac{O_3}{Z_3} - \frac{O_1}{Z_1} \right) \left(\frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_1}{Z_1} \right) = 0 \quad (852)$$

Reescribiendo la determinante como $F(\delta^2)$:

$$F(\delta^2) = \left(\frac{O_2}{Z_2} - \frac{O_1}{Z_1} \right) \left(\frac{E_3}{Z_3} - \frac{E_1}{Z_1} \right) - \left(\frac{O_3}{Z_3} - \frac{O_1}{Z_1} \right) \left(\frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_1}{Z_1} \right) = 0 \quad (853)$$

Resolviendo esta ecuación característica se obtienen soluciones para δ por métodos numéricos y consecuentemente se obtienen los periodos de vibración. Es importante mencionar que por lo general q_3 tiende a un valor numérico grande, por lo que es necesario tener cuidado para evitar problemas numéricos.

$$w = \frac{\delta}{H} \sqrt{\frac{K_{s2}}{\gamma_u}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_{s2}}} \quad (854)$$

4.2.8.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \left\{ T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ \psi_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ \psi_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (855)$$

Reescribiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ \psi_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = T_{wi}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ \psi_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (856)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (857)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (858)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (859)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{Bmatrix} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \psi_{(0)} - u'_{(0)} = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ M_{ln}(0) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (860)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (861)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.9 Viga sándwich generalizada modificada de dos campos (MGSB)

4.2.9.1 Caso 1

La ecuación diferencial según la viga TB resulta:

$$\phi_{(z)}'''' + \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] \phi_{(z)}'' + \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right] \phi_{(z)} = 0 \quad (862)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \mu = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\rho I}{\rho A}}, \delta = \sqrt{\frac{\rho A H^4}{K_b}} w^2 \right\} \quad (863)$$

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$q_{1,2} = \frac{- \left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right] \pm \sqrt{\left[\delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \right]^2 - 4 \left[\delta^2 \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^2 - 1 \right) \right]}}{2} \quad (864)$$

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva una raíz real negativa.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2^* - q_1^* = \delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \\ q_2^* q_1^* = \delta^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^4 \end{array} \right\} \rightarrow (q_2^* - q_1^*) \left\{ \left[-\frac{\alpha^2 \mu^2}{(1 + \alpha^2 \mu^2)^2} \right] (q_2^* - q_1^*) + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right\} - q_2^* q_1^* = 0 \quad (865)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1^* \\ q_2 = -q_2^* \end{array} \right\} \quad (866)$$

- Caso 2: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales negativas.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_2^* + q_1^* = \delta^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \mu^2 \right) \\ q_2^* q_1^* = -\delta^2 + \frac{\mu^2}{\alpha^2} \delta^4 \end{array} \right\} \rightarrow (q_1^* + q_2^*) \left\{ \left[\frac{\alpha^2 \mu^2}{(1 + \alpha^2 \mu^2)^2} \right] (q_1^* + q_2^*) - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 \mu^2} \right\} - q_1^* q_2^* = 0 \quad (867)$$

Donde:

$$\begin{cases} q_1 = -q_1^* \\ q_2 = -q_2^* \end{cases} \quad (868)$$

4.2.9.2 Caso 2

La relación entre las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga, según la viga TB resulta:

$$\begin{cases} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{cases} = T_{wi}(0) \begin{cases} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{cases} \quad (869)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (870)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{cases} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{cases} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{cases} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{cases} = t \begin{cases} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{cases} \quad (871)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (872)$$

Reemplazando:

$$\begin{cases} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{cases} \quad (873)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (874)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.10 Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB)

4.2.10.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo MCTB de dos campos:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{s1} u'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [\theta(x) - u'(x)]^2 \right\} dx,$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}(x,t)^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}(x,t)^2 \right] dx \quad (875)$$

Donde:

$$\{\gamma_u = \rho(A_1 + A_2); \gamma_\theta = \rho(I_1 + I_2)\} \quad (876)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga MCTB de dos campos se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}(x,t)^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}(x,t)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{s1} u'(x)^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \quad (877)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}(x,t) \delta \dot{u}(x,t) + \gamma_\theta \dot{\theta}(x,t) \delta \dot{\theta}(x,t) - K_{s1} u'(x,t) \delta u'(x,t) - K_{b2} \theta'(x,t) \delta \theta'(x,t) \right. \\ \left. - K_{s2} [u'(x,t) - \theta(x,t)] \delta u'(x,t) + K_{s2} [u'(x,t) - \theta(x,t)] \delta \theta(x,t) \right\} dx \quad (878)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta U = \left\{ [\gamma_u \dot{u}(x,t) - (K_{s1} + K_{s2}) u'(x,t) + K_{s2} \theta(x,t)] \delta u(x,t) \right\}_0^H + [\gamma_\theta \dot{\theta}(x,t) - K_{b2} \theta'(x,t)] \delta \theta(x,t)_0^H \\ - \int_0^H \left\{ \gamma_u \ddot{u}(x,t) - (K_{s1} + K_{s2}) u''(x,t) + K_{s2} \theta'(x,t) \right\} \delta u(x,t) \\ - \int_0^H \left\{ \gamma_\theta \ddot{\theta}(x,t) - K_{b2} \theta''(x,t) - K_{s2} [u'(x,t) - \theta(x,t)] \right\} \delta \theta(x,t) \quad (879)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u''_{(x,t)} + K_{s2}\theta'_{(x,t)} = 0 \\ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta''_{(x,t)} - K_{s2}[u'_{(x,t)} - \theta_{(x,t)}] = 0 \end{cases} \quad (880)$$

Y condiciones de borde:

$$\begin{cases} (K_{s1} + K_{s2})u'_{(H)} - K_{s2}\theta_{(H)} = 0 \\ \theta'_{(H)} = 0 \end{cases} \quad (881)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\begin{cases} u_{(x,t)} = \phi_{(x)}q_{(t)} \\ \theta_{(x,t)} = \lambda_{(x)}q_{(t)} \end{cases} \quad (882)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-(K_{s1} + K_{s2})\phi''_{(x)} + K_{s2}\lambda'_{(x)}}{\gamma_u \phi_{(x)}} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-K_{b2}\lambda''_{(x)} - K_{s2}\phi'_{(x)} + K_{s2}\lambda_{(x)}}{\gamma_\theta \lambda_{(x)}} \right] = 0 \end{cases} \quad (883)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})\phi''_{(x)} - K_{s2}\lambda'_{(x)} + w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \\ K_{b2}\lambda''_{(x)} + K_{s2}\phi'_{(x)} - K_{s2}\lambda_{(x)} + w^2 \gamma_\theta \lambda_{(x)} = 0 \end{cases} \quad (884)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de variación de parámetro para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} (K_{s1} + K_{s2})D^2 + w^2\gamma_u & -K_{s2}D \\ K_{s2}D & K_{b2}D^2 + (w^2\gamma_\theta - K_{s2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(x) \\ \lambda(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (885)$$

Es decir;

$$\phi_{(x)}'''' - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b2}\gamma_u + \gamma_\theta(K_{s1} + K_{s2})}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] \phi_{(x)}'' + \frac{\gamma_u w^2 (w^2\gamma_\theta - K_{s2})}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \phi_{(z)} = 0 \quad (886)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\phi_{(z)}'''' - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b2}\gamma_u + (K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}'' + \frac{\gamma_u w^2 (w^2\gamma_\theta - K_{s2}) H^4}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \phi_{(z)} = 0 \quad (887)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\phi_{(z)}'''' - [\alpha^2 \kappa^2 - (1 + \mu)\delta^2] \phi_{(z)}'' - \delta^2 [\alpha^2 (\kappa^2 + 1) - \mu^2 \delta^2] \phi_{(z)} = 0 \quad (888)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s2}^2}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{s2}}}, \mu = \sqrt{\frac{K_{s1} + K_{s2}}{K_{b2}}} \cdot \frac{\gamma_\theta}{\gamma_u}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^2}{K_{s1} + K_{s2}}} w^2 \right\} \quad (889)$$

La ecuación diferencial obtenida puede resolverse fácilmente con los procedimientos presentados en los subcapítulos anteriores.

4.2.10.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = \left(T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (890)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (891)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (892)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (893)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (894)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ K_{b2} \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2}) u'_{(0)} - K_{s2} \theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (895)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (896)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,5} \\ t_{4,3} & t_{4,5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (897)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.11 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB)

4.2.11.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo GSB de tres campos son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 + K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}]^2 \right\} dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)}{}^2 \right] dx \quad (898)$$

Donde:

$$\left\{ \gamma_u = \rho(A_1 + A_2), \gamma_\psi = \rho(I_1 + I_2), \gamma_w = \rho \frac{A_2}{A_1} (A_1 + A_2) \right\} \quad (899)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB de tres campos se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)}{}^2 \right] dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 + K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (900)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} \delta \dot{\theta}_{(x,t)} + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)} \delta \dot{w}_{(x,t)} - K_{b1} w'_{(x)} \delta w'_{(x)} \right.$$

$$- K_{b2} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} - K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] [\delta u'_{(x)} - \delta \theta_{(x)}]$$

$$\left. - K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}] [\delta u'_{(x)} + m\delta \theta_{(x)} - n\delta w_{(x)}] \right\} dx \quad (901)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u'_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} + nK_{s1}w_{(x)}] \delta u_{(x)_0}^H \\
& + [\gamma_\theta \dot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta'_{(x)}] \delta \theta_{(x)_0}^H + [\gamma_w \dot{w}_{(x,t)} - K_{b1}w'_{(x)}] \delta w_{(x)_0}^H \\
& - \int_0^H \{ \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u''_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'_{(x)} + nK_{s1}w'_{(x)} \} \delta u_{(x)} \\
& - \int_0^H \{ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(x)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(x)} \\
& - mnK_{s1}w_{(x)} \} \delta \theta_{(x)} \\
& - \int_0^H \{ \gamma_w \ddot{w}_{(x,t)} - K_{b1}w''_{(x)} - nK_{s1}u'_{(x)} - mnK_{s1}\theta_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} \} \delta w_{(x)} \quad (902)
\end{aligned}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} - (K_{s1} + K_{s2})u''_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'_{(x)} + nK_{s1}w'_{(x)} = 0 \\ \gamma_\theta \ddot{\theta}_{(x,t)} - K_{b2}\theta''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(x)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(x)} - mnK_{s1}w_{(x)} = 0 \\ \gamma_w \ddot{w}_{(x,t)} - K_{b1}w''_{(x)} - nK_{s1}u'_{(x)} - mnK_{s1}\theta_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (903)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_{s1} + K_{s2})u'_{(H)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(H)} - nK_{s1}w_{(H)} = 0 \\ \theta'_{(H)} = 0 \\ w'_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \quad (904)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x,t)} = \phi_{(x)}q_{(t)} \\ \theta_{(x,t)} = \lambda_{1(x)}q_{(t)} \\ w_{(x,t)} = \lambda_{2(x)}q_{(t)} \end{array} \right\} \quad (905)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} + \left[\frac{-(K_{s1} + K_{s2})\phi''(x) + (K_{s2} - mK_{s1})\lambda'_1(x) + nK_{s1}\lambda'_2(x)}{\gamma_u \phi(x)} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} + \left[\frac{-K_{b2}\lambda''_1(x) - (K_{s2} - mK_{s1})\phi'(x) + (K_{s2} + m^2K_{s1})\lambda_1(x) - mnK_{s1}\lambda_2(x)}{\gamma_\theta \lambda_1(x)} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} + \left[\frac{-K_{b1}\lambda''_2(x) - nK_{s1}\phi'(x) - mnK_{s1}\lambda_1(x) + n^2K_{s1}\lambda_2(x)}{\gamma_w \lambda_2(x)} \right] = 0 \end{array} \right\} \quad (906)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}(t) + w^2 q(t) = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})\phi''(x) - (K_{s2} - mK_{s1})\lambda'_1(x) - nK_{s1}\lambda'_2(x) + w^2 \gamma_u \phi(x) = 0 \\ K_{b2}\lambda''_1(x) + (K_{s2} - mK_{s1})\phi'(x) - (K_{s2} + m^2K_{s1})\lambda_1(x) + mnK_{s1}\lambda_2(x) + w^2 \gamma_\theta \lambda_1(x) = 0 \\ K_{b1}\lambda''_2(x) + nK_{s1}\phi'(x) + mnK_{s1}\lambda_1(x) - n^2K_{s1}\lambda_2(x) + w^2 \gamma_w \lambda_2(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (907)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} (K_{s1} + K_{s2})D^2 + w^2 \gamma_u & -(K_{s2} - mK_{s1})D & -nK_{s1}D \\ (K_{s2} - mK_{s1})D & K_{b2}D^2 + [w^2 \gamma_\theta - (K_{s2} + m^2K_{s1})] & mnK_{s1} \\ nK_{s1}D & mnK_{s1} & K_{b1}D^2 + [w^2 \gamma_w - n^2K_{s1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(x) \\ \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (908)$$

Es decir;

$$\begin{aligned} \phi''''''(x) - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}[K_{b2}n^2 + K_{b1}(m+1)^2]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_w)(K_{s1} + K_{s2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] \phi''''(x) \\ - w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}[\gamma_\theta n^2 + \gamma_w(m+1)^2] + [K_{s1}K_{b2}n^2 + (K_{s2} + m^2K_{s1})K_{b1}]\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right. \\ \left. - \frac{(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta \gamma_w + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_w)\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right\} \phi''(x) \\ + \frac{\gamma_u w^2 \{(w^2 \gamma_w - n^2 K_{s1})[w^2 \gamma_\theta - (K_{s2} + m^2 K_{s1})] - m^2 n^2 K_{s1}^2\}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \phi(x) = 0 \end{aligned} \quad (909)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}^{(6)} - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}[K_{b2}n^2 + K_{b1}(m+1)^2]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} - \frac{K_{b1}K_{b2}\gamma_u + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_w)(K_{s1} + K_{s2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}^{(4)} \\ - w^2 \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}[\gamma_\theta n^2 + \gamma_w(m+1)^2] + [K_{s1}K_{b2}n^2 + (K_{s2} + m^2K_{s1})K_{b1}]\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right. \\ \left. - \frac{(K_{s1} + K_{s2})\gamma_\theta\gamma_w + (K_{b1}\gamma_\theta + K_{b2}\gamma_w)\gamma_u}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} w^2 \right\} H^4 \phi_{(z)}'' \\ + \frac{\gamma_u w^2 \{ (w^2\gamma_w - n^2K_{s1})[w^2\gamma_\theta - (K_{s2} + m^2K_{s1})] - m^2n^2K_{s1}^2 \}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^6 \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (910)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}^{(6)} - [(\alpha\kappa)^2 - (1 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2] \phi_{(z)}^{(4)} \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 \{ [\kappa^2 - (m+1)^2] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \} + (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2) \} \\ - (\mu_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 \} \phi_{(z)}'' \\ + \delta^2 \{ \delta^4 (\mu_w^2\mu_\theta^2) - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2) \} \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (911)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}} \\ \mu_w = \sqrt{\frac{K_{s1} + K_{s2}}{K_{b1}} \frac{\gamma_w}{\gamma_u}}, \mu_\theta = \sqrt{\frac{K_{s1} + K_{s2}}{K_{b2}} \frac{\gamma_\theta}{\gamma_u}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^2}{K_{s1} + K_{s2}}} w^2 \\ \eta_w = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b1}}}, \eta_\theta = H \sqrt{\frac{K_{s2}}{K_{b2}}}, \eta_\phi = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}} \end{aligned} \quad (912)$$

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_{(r)} = r^6 - [(\alpha\kappa)^2 - (1 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2] r^4 \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 \{ [\kappa^2 - (m+1)^2] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \} + (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2) \} \\ - (\mu_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 \} r^2 \\ + \delta^2 \{ \delta^4 (\mu_w^2\mu_\theta^2) - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2) \} = 0 \end{aligned} \quad (913)$$

Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{array} ; i = 1, 2, 3 \right\} \quad (914)$$

Reescribimos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} P_{(r)} = q^3 - [(\alpha\kappa)^2 - (1 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2]q^2 \\ - \delta^2 \{ \alpha^2 \{ [\kappa^2 - (m+1)^2] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \} + (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2 + n^2 \eta_w^2) \} \\ - (\mu_w^2 \mu_\theta^2 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} q \\ + \delta^2 \{ \delta^4 (\mu_w^2 \mu_\theta^2) - [n^2 \eta_w^2 \mu_\theta^2 + \mu_w^2 (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2) \} = 0 \end{aligned} \quad (915)$$

Esta ecuación tendrá tres raíces reales y desiguales en q, si:

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0 \quad (916)$$

Donde:

$$\begin{aligned} p = \frac{3c - b^2}{3}, q = \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27} \\ b = -[(\alpha\kappa)^2 - (1 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2] \\ c = -\delta^2 \{ \alpha^2 \{ [\kappa^2 - (m+1)^2] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \} + (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2 + n^2 \eta_w^2) \} - (\mu_w^2 \mu_\theta^2 + \mu_w^2 + \mu_\theta^2) \delta^2 \} \\ d = \delta^2 \{ \delta^4 (\mu_w^2 \mu_\theta^2) - [n^2 \eta_w^2 \mu_\theta^2 + \mu_w^2 (\eta_\theta^2 + m^2 \eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2 \eta_w^2 \eta_\theta^2) \} \end{aligned} \quad (917)$$

Se presentan dos casos:

- Caso 1: Cuando el polinomio tiene dos raíces reales positivas y una raíz real negativa.
- Caso 2: Cuando el polinomio tiene una raíz real positiva y dos raíces reales negativas.

Definimos q_i de tal manera que:

$$q_1 < q_2 < q_3 \quad (918)$$

Las raíces de la ecuación se calculan como:

$$\begin{aligned} q_i = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\emptyset}{3} + \frac{2\pi i}{3}\right) + \frac{b}{3a} ; i = 1, 2, 3 \\ \emptyset = \arccos\left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}}\right) \end{aligned} \quad (919)$$

- **Frecuencia y periodos de vibración**

Normalizando por la variable $z = x/H$ las tres ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned}
& (K_{s1} + K_{s2})\Phi''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})H\lambda'_{1(x)} - nK_{s1}H\lambda'_{2(x)} + H^2w^2\gamma_u\Phi_{(x)} = 0 \\
& K_{b2}H\lambda''_{1(x)} + H^2(K_{s2} - mK_{s1})\Phi'_{(x)} - H^2(K_{s2} + m^2K_{s1})H\lambda_{1(x)} + H^2mnK_{s1}H\lambda_{2(x)} + H^2w^2\gamma_\theta H\lambda_{1(x)} = 0 \\
& K_{b1}H\lambda''_{2(x)} + H^2nK_{s1}\Phi'_{(x)} + H^2mnK_{s1}H\lambda_{1(x)} - H^2n^2K_{s1}H\lambda_{2(x)} + H^2w^2\gamma_w H\lambda_{2(x)} = 0
\end{aligned} \tag{920}$$

La solución será de la forma:

$$W_{(z)} = \begin{Bmatrix} \Phi_{(z)} \\ H\lambda_{1(z)} \\ H\lambda_{2(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} e^{rz} \tag{921}$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación, se obtienen tres ecuaciones homogéneas que escritas en forma matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} (K_{s1} + K_{s2})r^2 + H^2w^2\gamma_u & -(K_{s2} - mK_{s1})r & -nK_{s1}r \\ H^2(K_{s2} - mK_{s1})r & K_{b2}r^2 + H^2[w^2\gamma_\theta - (K_{s2} + m^2K_{s1})] & H^2mnK_{s1} \\ H^2nK_{s1}r & H^2mnK_{s1} & K_{b1}r^2 + H^2(w^2\gamma_w - n^2K_{s1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{922}$$

Para todas las raíces, la ecuación implica:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i^4 + [(\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2)]r_i^2 + \{(\mu_w^2\mu_\theta^2)\delta^4 - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)]\delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2)\} \\ r_i \left\{ r_i^2 + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] \right\} \\ r_i \{ r_i^2 + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2] \} \end{Bmatrix} C \tag{923}$$

Donde $i = 1, 2, 3 \dots, 6$ y C es una constante arbitraria. Cambiamos de variable y denotamos:

$$q_i = r_i^2 \rightarrow \begin{cases} r_{2i-1} = \sqrt{q_i} \\ r_{2i} = -\sqrt{q_i} \end{cases} ; \quad i = 1, 2, 3 \tag{924}$$

Reescribiendo la solución completa:

$$W_{(z)} = \sum_{i=1}^6 C_i \begin{bmatrix} r_i^4 + [(\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2)]r_i^2 + \{(\mu_w^2\mu_\theta^2)\delta^4 - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)]\delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2)\} \\ r_i \left\{ r_i^2 + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] \right\} \\ r_i \{ r_i^2 + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2] \} \end{bmatrix} e^{r_i z} \tag{925}$$

Sustituyendo esta ecuación completa en las condiciones de borde, se obtienen:

- En la base ($z = 0$):

$$\begin{aligned}\emptyset_{(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i \left\{ r_i^4 + [(\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2)] r_i^2 + \left\{ (\mu_w^2\mu_\theta^2)\delta^4 - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2) \right\} \right\} = 0 \\ H\lambda_{1(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i \left\{ r_i^2 + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] \right\} = 0 \\ H\lambda_{2(0)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i \left\{ r_i^2 + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2] \right\} = 0\end{aligned}\tag{926}$$

- En la parte superior ($z = 1$):

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned} &(K_{s1} + K_{s2})\emptyset'_{(1)} - (K_{s2} - mK_{s1})H\lambda_{1(1)} - nK_{s1}H\lambda_{2(1)} = 0 \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i \left\{ r_i^4 - [(\alpha\kappa)^2 - (\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2] r_i^2 - \delta^2 \left\{ \alpha^2 \left[\kappa^2 - (m+1)^2 \right] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \right\} - \mu_w^2 \mu_\theta^2 \delta^2 \right\} e^{r_i} = 0 \end{aligned} \right\} \\ H\lambda'_{(1)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^2 \left\{ r_i^2 + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] \right\} e^{r_i} = 0 \\ H\lambda'_{(2)} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^6 C_i r_i^2 \left\{ r_i^2 + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2] \right\} e^{r_i} = 0\end{aligned}\tag{927}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned}Z_{1i} &= q_i^2 + [(\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2 - (\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2 + n^2\eta_w^2)] q_i + \left\{ \delta^4(\mu_w^2\mu_\theta^2) - [n^2\eta_w^2\mu_\theta^2 + \mu_w^2(\eta_\theta^2 + m^2\eta_\phi^2)] \delta^2 + (n^2\eta_w^2\eta_\theta^2) \right\} \\ Z_{2i} &= q_i^2 - [(\alpha\kappa)^2 - (\mu_w^2 + \mu_\theta^2)\delta^2] q_i - \delta^2 \left\{ \alpha^2 \left[\kappa^2 - (m+1)^2 \right] \mu_\theta^2 + (m+1)^2 \mu_w^2 \right\} - \mu_w^2 \mu_\theta^2 \delta^2 \\ O_i &= r_i^2 + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] = q_i + \left[\delta^2\mu_w^2 - \frac{n^2\eta_w^2\eta_\theta^2}{\eta_\theta^2 - m\eta_\phi^2} \right] \\ E_i &= r_i^2 + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2] = q_i + [\delta^2\mu_\theta^2 - (m+1)\eta_\theta^2]\end{aligned}\tag{928}$$

Donde $i = 1, 2, 3$. El sistema algebraico lineal resultante al desarrollar las condiciones de borde, se escribe en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{11} & Z_{12} & -Z_{12} & Z_{13} & -Z_{13} \\ \sqrt{q_1}O_1 & -\sqrt{q_1}O_1 & \sqrt{q_2}O_2 & -\sqrt{q_2}O_2 & \sqrt{q_3}O_3 & -\sqrt{q_3}O_3 \\ \sqrt{q_1}E_1 & -\sqrt{q_1}E_1 & \sqrt{q_2}E_2 & -\sqrt{q_2}E_2 & \sqrt{q_3}E_3 & -\sqrt{q_3}E_3 \\ \sqrt{q_1}Z_{21}e^{\sqrt{q_1}} & -\sqrt{q_1}Z_{21}e^{-\sqrt{q_1}} & \sqrt{q_2}Z_{22}e^{\sqrt{q_2}} & -\sqrt{q_2}Z_{22}e^{-\sqrt{q_2}} & \sqrt{q_3}Z_{23}e^{\sqrt{q_3}} & -\sqrt{q_3}Z_{23}e^{-\sqrt{q_3}} \\ q_1O_1e^{\sqrt{q_1}} & q_1O_1e^{-\sqrt{q_1}} & q_2O_2e^{\sqrt{q_2}} & q_2O_2e^{-\sqrt{q_2}} & q_3O_3e^{\sqrt{q_3}} & q_3O_3e^{-\sqrt{q_3}} \\ q_1E_1e^{\sqrt{q_1}} & q_1E_1e^{-\sqrt{q_1}} & q_2E_2e^{\sqrt{q_2}} & q_2E_2e^{-\sqrt{q_2}} & q_3E_3e^{\sqrt{q_3}} & q_3E_3e^{-\sqrt{q_3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{929}$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular).

Mediante algunas manipulaciones simples del determinante en la ecuación, se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{q_1}O_1/Z_{11} & 0 & \sqrt{q_2}O_2/Z_{12} & 0 & \sqrt{q_3}O_3/Z_{13} & 0 \\ \sqrt{q_1}E_1/Z_{11} & 0 & \sqrt{q_2}E_2/Z_{12} & 0 & \sqrt{q_3}E_3/Z_{13} & 0 \\ \sqrt{q_1}C_1Z_{21}/Z_{11} & \sqrt{q_1}S_1Z_{21} & \sqrt{q_2}C_2Z_{22}/Z_{12} & \sqrt{q_2}S_2Z_{22} & \sqrt{q_3}C_3Z_{23}/Z_{13} & \sqrt{q_3}S_3Z_{23} \\ q_1C_1O_1/Z_{11} & q_1S_1O_1 & q_2C_2O_2/Z_{12} & q_2S_2O_2 & q_3C_3O_3/Z_{13} & q_3S_3O_3 \\ q_1C_1E_1/Z_{11} & q_1S_1E_1 & q_2C_2E_2/Z_{12} & q_2S_2E_2 & q_3C_3E_3/Z_{13} & q_3S_3E_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (930)$$

Donde:

$$s_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_i}z} - e^{-\sqrt{q_i}z}] = \begin{cases} s_i(z) = \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \\ \sin(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \end{array} \right\} \\ c_i(z) = \frac{1}{2} [e^{\sqrt{q_i}z} + e^{-\sqrt{q_i}z}] = \begin{cases} c_i(z) = \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\sqrt{|q_i|}z); q_i > 0 \\ \cos(\sqrt{|q_i|}z); q_i < 0 \end{array} \right\} \end{cases} \end{cases} \quad (931)$$

$$s_i = s_i(1) ; c_i = c_i(1)$$

Una reducción adicional en la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \frac{O_2}{Z_{12}} - \frac{O_1 E_2}{Z_{12} E_1} & \frac{O_3}{Z_{13}} - \frac{O_1 E_3}{Z_{13} E_1} \\ \frac{E_2}{Z_{12}} - \frac{O_2 E_1}{O_1 Z_{12}} & \frac{E_3}{Z_{13}} - \frac{O_3 E_1}{O_1 Z_{13}} \end{vmatrix} = 0 \quad (932)$$

La determinante se puede escribir en su forma más simple:

$$P_{(\delta)} = O_2 E_3 \left(1 - \frac{O_1 E_2}{O_2 E_1}\right) \left(1 - \frac{O_3 E_1}{O_1 E_3}\right) - O_3 E_2 \left(1 - \frac{O_1 E_3}{O_3 E_1}\right) \left(1 - \frac{O_2 E_1}{O_1 E_2}\right) = 0 \quad (933)$$

Resolviendo esta ecuación característica se obtienen soluciones para δ por métodos numéricos y consecuentemente se obtienen los periodos de vibración. Es importante mencionar que por lo general q_3 tiende a un valor numérico grande, por lo que es necesario tener cuidado para evitar problemas numéricos.

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi H}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma_u}{K_{s1} + K_{s2}}} \quad (934)$$

4.2.11.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{1i+1}(0) \\ M_{2i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \left\{ T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ w_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{1i}(0) \\ M_{2i}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{1i+1}(0) \\ M_{2i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ w_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{1i}(0) \\ M_{2i}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (935)$$

Reescribiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ \theta_{i+1}(0) \\ M_{1i+1}(0) \\ M_{2i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = T_{wi}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ w_i(0) \\ \theta_i(0) \\ M_{1i}(0) \\ M_{2i}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\} \quad (936)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (937)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_i) \\ w_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_{11}(h_i) \\ M_{21}(h_i) \\ V_1(h_i) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_i) \\ w_1(h_i) \\ \theta_1(h_i) \\ M_{11}(h_i) \\ M_{21}(h_i) \\ V_1(h_i) \end{Bmatrix} \quad (938)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (939)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ w_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2})u'_{(0)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ w_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{1n}(0) = 0 \\ M_{2n}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (940)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (941)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.12 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)

4.2.12.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo GSB de tres campos son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} u''_{(x)}{}^2 + K_{s1} [(m+1)u'_{(x)} - nw_{(x)}]^2 \right\} dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)}{}^2] dx \quad (942)$$

Donde:

$$\left\{ \gamma_u = \rho(A_1 + A_2), \gamma_w = \rho \frac{A_2}{A_1} (A_1 + A_2) \right\} \quad (943)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB de tres campos se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)}{}^2 + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)}{}^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} u''_{(x)}{}^2 + K_{s1} [(m+1)u'_{(x)} - nw_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (944)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H \left\{ \gamma_u \dot{u}_{(x,t)} \delta \dot{u}_{(x,t)} + \gamma_w \dot{w}_{(x,t)} \delta \dot{w}_{(x,t)} - K_{b1} w'_{(x)} \delta w'_{(x)} - K_{b2} u''_{(x)} \delta u''_{(x)} - K_{s1} [(m+1)u'_{(x)} - nw_{(x)}] [(m+1)\delta u'_{(x)} - n\delta w_{(x)}] \right\} dx \quad (945)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\delta U = \left\{ [\gamma_u \dot{u}_{(x,t)} + K_{b2} u''_{(x)} - (m+1)^2 K_{s1} u'_{(x)} + n(m+1)K_{s1} w_{(x)}] \delta u_{(x)} \right\}_0^H - K_{b2} u''_{(x)} \delta u'_{(x)} \Big|_0^H$$

$$+ [\gamma_w \dot{w}_{(x,t)} - K_{b1} w'_{(x)}] \delta w_{(x)} \Big|_0^H$$

$$- \int_0^H \left\{ \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_{b2} u'''_{(x)} - (m+1)^2 K_{s1} u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1} w'_{(x)} \right\} \delta u_{(x)}$$

$$- \int_0^H \left\{ \gamma_w \ddot{w}_{(x,t)} - K_{b1} w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1} u'_{(x)} + n^2 K_{s1} w_{(x)} \right\} \delta w_{(x)}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_u \ddot{u}_{(x,t)} + K_{b2} u''''_{(x)} - (m+1)^2 K_{s1} u''_{(x)} + n(m+1) K_{s1} w'_{(x)} = 0 \\ \gamma_w \ddot{w}_{(x,t)} - K_{b1} w''_{(x)} - n(m+1) K_{s1} u'_{(x)} + n^2 K_{s1} w_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (946)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b2} u''''_{(H)} - (m+1)^2 K_{s1} u'_{(H)} + n(m+1) K_{s1} w_{(H)} = 0 \\ u''_{(H)} = 0 \\ w'_{(H)} = 0 \end{array} \right\} \quad (947)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(x,t)} = \phi_{(x)} q_{(t)} \\ w_{(x,t)} = \lambda_{(x)} q_{(t)} \end{array} \right\} \quad (948)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q_{(t)}$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{K_{b2} \phi''''_{(x)} - (m+1)^2 K_{s1} \phi''_{(x)} + n(m+1) K_{s1} \lambda'_{(x)}}{\gamma_u \phi_{(x)}} \right] = 0 \\ \frac{\ddot{q}_{(t)}}{q_{(t)}} + \left[\frac{-K_{b1} \lambda''_{(x)} - n(m+1) K_{s1} \phi'_{(x)} + n^2 K_{s1} \lambda_{(x)}}{\gamma_w \lambda_{(x)}} \right] = 0 \end{array} \right\} \quad (949)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{(t)} + w^2 q_{(t)} = 0 \\ -K_{b2} \phi''''_{(x)} + (m+1)^2 K_{s1} \phi''_{(x)} - n(m+1) K_{s1} \lambda'_{(x)} + w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \\ K_{b1} \lambda''_{(x)} + n(m+1) K_{s1} \phi'_{(x)} - n^2 K_{s1} \lambda_{(x)} + w^2 \gamma_w \lambda_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (950)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -K_{b2}D^4 + (m+1)^2K_{s1}D^2 + w^2\gamma_u & -n(m+1)K_{s1}D \\ n(m+1)K_{s1}D & K_{b1}D^2 + [w^2\gamma_w - n^2K_{s1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{(x)} \\ \lambda_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (951)$$

Es decir;

$$\begin{aligned} \phi_{(x)}'''' - \left[\frac{K_{s1}[K_{b2}n^2 + K_{b1}(m+1)^2]}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{\gamma_w}{K_{b1}}w^2 \right] \phi_{(x)}'''' - w^2 \left[\frac{\gamma_u}{K_{b2}} + \frac{(m+1)^2K_{s1}\gamma_w}{K_{b1}K_{b2}} \right] \phi_{(x)}'' \\ + \frac{\gamma_u w^2 (w^2\gamma_w - n^2K_{s1})}{K_{b1}K_{b2}} \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (952)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\begin{aligned} \phi_{(z)}'''' - \left[\frac{K_{s1}[K_{b2}n^2 + K_{b1}(m+1)^2]}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{\gamma_w}{K_{b1}}w^2 \right] H^2 \phi_{(z)}'''' \\ - w^2 \left[\frac{\gamma_u}{K_{b2}} + \frac{(m+1)^2K_{s1}\gamma_w}{K_{b1}K_{b2}} \right] H^4 \phi_{(z)}'' + \frac{\gamma_u w^2 (w^2\gamma_w - n^2K_{s1})H^6}{K_{b1}K_{b2}} \phi_{(z)} = 0 \end{aligned} \quad (953)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\phi_{(z)}'''' - [\alpha^2\kappa^2 - \mu^2\delta^2]\phi_{(z)}'''' - \delta^2[1 + (m+1)^2\mu^2\alpha^2]\phi_{(z)}'' + \delta^2\{\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] - \mu^2\delta^2\}\phi_{(z)} = 0 \quad (954)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \mu = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{K_{b2}\gamma_w}{K_{b1}\gamma_u}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^4}{K_{b2}} w^4} \right\} \quad (955)$$

La ecuación diferencial obtenida puede resolverse fácilmente con los procedimientos presentados en los subcapítulos anteriores.

4.2.12.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j -ésimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \left\{ T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ w_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ w_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\}$$

(956)

Reescribiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ w_{i+1}(0) \\ M_{li+1}(0) \\ M_{ri+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{array} \right\} = T_{wi}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ w_i(0) \\ M_{li}(0) \\ M_{ri}(0) \\ V_i(0) \end{array} \right\}$$

(957)

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0)$$

(958)

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{ln}(0) \\ M_{rn}(0) \\ V_n(0) \end{array} \right\} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = t \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\}$$

(959)

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (960)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ -K_{b2}u'''_{(0)} + (m+1)^2K_{s1}u'_{(0)} - n(m+1)K_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{ln}(0) = 0 \\ M_{rn}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (961)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (962)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_{l1}(h_1) \\ M_{r1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (963)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.2.13 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB)

4.2.13.1 Caso 1

La energía potencial y la energía cinética del modelo GSB de tres campos son:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b u''(x)^2 + (m+1)^2 K_s u'(x)^2\} dx, T = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}(x,t)^2] dx \quad (964)$$

Donde:

$$\{\gamma_u = \rho(A_1 + A_2)\} \quad (965)$$

En consecuencia, la energía potencial total de la viga GSB de tres campos se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H [\gamma_u \dot{u}(x,t)^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b u''(x)^2 + (m+1)^2 K_s u'(x)^2\} dx \quad (966)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H \{\gamma_u \dot{u}(x,t) \delta \dot{u}(x,t) - K_b u''(x) \delta u''(x) - (m+1)^2 K_s u'(x) \delta u'(x)\} dx \quad (967)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta U = & [\gamma_u \dot{u}(x,t) + K_b u''(x) - (m+1)^2 K_s u'(x)] \delta u(x)_0^H - K_b u''(x) \delta u'(x)_0^H \\ & - \int_0^H [\gamma_u \ddot{u}(x,t) + K_b u'''(x) - (m+1)^2 K_s u''(x)] \delta u(x) dx \end{aligned} \quad (968)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\gamma_u \ddot{u}(x,t) + K_b u'''(x) - (m+1)^2 K_s u''(x) = 0 \quad (969)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b u'''(H) - (m+1)^2 K_s u''(H) = 0 \\ u''(H) = 0 \end{array} \right\} \quad (970)$$

La ecuación diferencial parcial se puede resolver mediante la separación de variables, aplicando una solución del siguiente tipo:

$$u_{(x,t)} = \phi_{(x)}q(t) \quad (971)$$

Donde $\phi_{(x)}$ define la variación del desplazamiento a lo largo de la longitud de la viga, mientras $q(t)$ lo hace con el tiempo. Reemplazando y recolectando términos similares, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} + \left[\frac{K_b \phi_{(x)}'''' - (m+1)^2 K_s \phi_{(x)}''}{\gamma_u \phi_{(x)}} \right] = 0 \quad (972)$$

Debido a que las coordenadas de tiempo y altura son variables independientes, cada uno de los términos debe ser igual a una constante con signos opuestos, para garantizar que el resultado neto sea cero. En consecuencia, se puede dividir en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}(t) + w^2 q(t) = 0 \\ K_b \phi_{(x)}'''' - (m+1)^2 K_s \phi_{(x)}'' - w^2 \gamma_u \phi_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (973)$$

La primera ecuación es la misma que rige el comportamiento de un sistema SDOF con frecuencia de vibración w .

Utilizando el método de operadores diferenciales para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{cc} -K_{b2} D^4 + (m+1)^2 K_{s1} D^2 + w^2 \gamma_u & -n(m+1) K_{s1} D \\ n(m+1) K_{s1} D & K_{b1} D^2 + [w^2 \gamma_w - n^2 K_{s1}] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_{(x)} \\ \lambda_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (974)$$

Es decir;

$$\phi_{(x)}'''' - \left[\frac{(m+1)^2 K_s}{K_b} \right] \phi_{(x)}'' - \frac{\gamma_u w^2}{K_b} \phi_{(x)} = 0 \quad (975)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de sexto orden. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\phi_{(z)}'''' - \frac{(m+1)^2 K_s H^2}{K_b} \phi_{(z)}'' - \frac{\gamma_u w^2 H^4}{K_b} \phi_{(z)} = 0 \quad (976)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\phi_{(z)}'''' - \alpha^2 \phi_{(z)}'' - \delta^2 \phi_{(z)} = 0 \quad (977)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \delta = \sqrt{\frac{\gamma_u H^4}{K_{b2}}} w^2 \right\} \quad (978)$$

La ecuación diferencial obtenida puede resolverse fácilmente con los procedimientos presentados en los subcapítulos anteriores.

4.2.13.2 Caso 2

La relación entre fuerzas y desplazamientos entre dos pisos consecutivos, se obtiene teniendo en cuenta la matriz de transferencia y el vector de fuerzas externas puntuales. Para el piso j-ésimo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (979)$$

Reescribiendo:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1}(0) \\ u'_{i+1}(0) \\ M_{i+1}(0) \\ V_{i+1}(0) \end{Bmatrix} = T_{wi}(0) \begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} \quad (980)$$

Donde:

$$T_{wi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i w^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T_i(0) \quad (981)$$

Expresando la ecuación para el n-ésimo piso entre símbolos de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (982)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_{wk}(0) \quad (983)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ (K_b u''_{(0)} - K_s u'_{(0)} = 0) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (984)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (985)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo la determinante se encuentran las frecuencias angulares de la viga.

4.3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS ESTRUCTURALES INDIVIDUALES

El objetivo de esta sección es desarrollar una metodología para el cálculo de la carga crítica de las vigas de reemplazo.

El análisis de estabilidad de edificios altos por métodos convencionales resulta en un procedimiento muy engorroso y complicado. Tal como lo menciona Zalka (2020), el análisis de estabilidad presenta un desafío matemático mayor que el análisis dinámico y aún mayor que el análisis estático. Es debido a estas complicaciones que las investigaciones en el campo de la estabilidad de edificios altos son muy limitados y por lo general se analizan casos especiales ignorando ciertas características que no tienen una influencia importante en el análisis. Para superar este problema se consideran dos casos de análisis con el objetivo de cubrir a la mayor cantidad posible de edificios.

- **Caso 1:** Se considera un análisis continuo porque el método utilizado se basa únicamente en el método continuo y se asume una carga vertical uniformemente distribuida en la altura del elemento.

Para tener en cuenta que la carga vertical se aplica a nivel de los pisos y que no se distribuye en la altura del edificio, Zalka (2020) utilizando el teorema de la suma de Dunkerley propone considerar un factor de corrección en el análisis de estabilidad.

$$r_s = \frac{n}{n + 1.588} \quad (986)$$

Donde n es el número de pisos del edificio. Es cierto que este efecto es despreciable en edificios altos, pero para los edificios medianos y bajos el no considerar este coeficiente de corrección no es conservador debido a que el centroide de la carga total vertical se desplaza hacia abajo resultando en valores de carga crítica mayores que la carga real.

La principal desventaja es que solo es aplicable a estructuras en donde la sección transversal es uniforme en altura y la carga lateral es continua y su principal ventaja es que se obtienen soluciones continuas de forma cerrada que permiten realizar análisis paramétricos.

- **Caso 2:** Se considera un análisis discreto porque los métodos utilizados son el método continuo y el método de matriz de transferencia, y se asume una carga vertical puntual arbitraria aplicada a nivel de los pisos.

La principal desventaja es que no se obtienen soluciones continuas cerradas que permitan realizar análisis paramétricos y su principal ventaja es que permite analizar estructuras cuya sección transversal no es continua en altura y/o para estructuras donde las cargas se aplican a nivel de los pisos, sea su sección transversal uniforme o no; es decir se considera un caso de análisis general porque incluso sirve como verificación del caso 1.

Se utilizarán los siguientes supuestos:

- a) El material es elástico y lineal.
- b) Los pisos son considerados como diafragmas rígidos y se desprecia su rigidez perpendicular a su plano.
- c) Las cargas verticales se aplican estáticamente y no cambian su dirección durante el pandeo.
- d) Las deformaciones se considera pequeñas.
- e) Las estructuras tienen un mínimo de cuatro pisos.

Mikhlin (1964) propone que la solución aproximada del problema de valores propios generalmente se reduce a la integración de una ecuación diferencial de la forma:

$$Lw - \lambda Mw = 0 \quad (987)$$

Donde w es el desplazamiento que satisface la ecuación diferencial y las condiciones de borde, L y M son operadores diferenciales, y λ es el parámetro numérico desconocido a calcular.

En la mayoría de los casos prácticos, no es posible suponer una función que proporcione una aproximación lo suficientemente cercana a la deflexión exacta. Entonces, la aproximación del límite superior obtenida del cociente de Rayleigh no es muy cercana. Es posible lograr una mejora sustancial en la precisión si consideramos una combinación lineal de varias funciones superpuestas y luego aplicamos el método de Rayleigh-Ritz minimizando el cociente de Rayleigh con respecto a los coeficientes desconocidos de esta combinación lineal.

Según el teorema de Ritz, el límite de la aproximación $u_{N(z)} = \sum_{k=1}^N q_k \phi_{k(z)}$ para $N \rightarrow \infty$ es la solución exacta $u_{(z)}$ si el sistema de las funciones elegidas $\phi_{k(z)}$ satisface las siguientes condiciones:

- a) Las funciones $\phi_{k(z)}$ son linealmente independientes.
- b) Las funciones $\phi_{k(z)}$ forman un sistema completo de funciones.
- c) Las funciones $\phi_{k(z)}$ satisfacen las condiciones de borde.

Como función de desplazamiento aproximada, se utilizará una serie de potencias, cuyo centro es igual a cero:

$$\phi_{(z)} = \sum_{k=0}^N C_k z^k \quad (988)$$

Donde C_k son coeficientes constantes, que representan los parámetros de la función aproximada.

$$\phi_{(z)} = \sum_{k=0}^N C_k z^k = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + C_5 z^5 + \dots \quad (989)$$

4.3.1 Viga de flexión de un campo (EBB)

4.3.1.1 Caso 1

La energía potencial del modelo EBB de un campo es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''_{(x)}{}^2 dx \quad (990)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa es:

$$W = - \int_0^H f_{(x)} dl \quad (991)$$

Donde $f_{(x)}$ es la carga axial generalizada distribuida a lo largo de la altura y dl es el acortamiento axial de la viga.

Teniendo en cuenta que los desplazamientos son pequeños, el acortamiento axial es:

$$dl = ds - dx = \left(\sqrt{dx^2 + du^2} \right) - dx = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx \quad (992)$$

Reemplazando:

$$W = - \int_0^H f_{(x)} dl = - \int_0^H f_{(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2} - 1 \right) dx \quad (993)$$

Expandiendo esta función por la serie de Maclaurin:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \quad (994)$$

Finalmente el trabajo resulta:

$$W = - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (995)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H K_b u''(x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (996)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta \mathcal{U} = \int_0^H [K_b u''(x) \delta u''(x) - f(x) u'(x) \delta u'(x)] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \quad (997)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & [K_b u''(x) \delta u'(x)]_0^H - \{ [K_b u'''(x) + f(x) u'(x)] \delta u(x) \}_0^H \\ & + \int_0^H [K_b u''''(x) + f(x) u''(x) + f'(x) u'(x)] \delta u(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (998)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$K_b u''''(x) + f(x) u''(x) + f'(x) u'(x) = 0 \quad (999)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(0) = 0 \\ K_b u'''(0) + f(0) u'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1000)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$K_b u'''(x) + f(x) u'(x) = 0 \quad (1001)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden, donde la carga crítica resulta del valor propio mas pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u'''(z) + f(z) \left[\frac{H^3}{K_b} u'(z) \right] = 0 \quad (1002)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u'''_{(z)} + \lambda \alpha_{(z)} u'_{(z)} = 0 \quad (1003)$$

Donde:

$$\lambda = \frac{qH^3}{K_b}, f_{(z)} = q\alpha_{(z)} \quad (1004)$$

Expresando las condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1005)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^3}{dz^3} \right] u_{(z)} - \lambda \left[-\alpha_{(z)} \frac{d}{dz} \right] u_{(z)} = 0 \quad (1006)$$

Donde:

$$L = \frac{d^3}{dz^3}, M = -\alpha_{(z)} \left(\frac{d}{dz} \right) \quad (1007)$$

Multiplicando la ecuación por $u'_{(z)}$ e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 u'_{(z)} u'''_{(z)} dz + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} u'^2_{(z)} dz = 0 \quad (1008)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\int_0^1 u''^2_{(z)} dz - \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} u'^2_{(z)} dz = 0 \quad (1009)$$

Despejando el parámetro γ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 u''^2(z) dz}{\int_0^1 \alpha(z) u'^2(z) dz} \quad (1010)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $u(z)$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha(z)$:

$$\alpha(z) = z \rightarrow f(z) = qz \quad (1011)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 u''^2(z) dz}{\int_0^1 zu'^2(z) dz} \quad (1012)$$

- 1° Iteración:

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4 \quad y \quad \phi_2^1 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1013)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u(z) = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A\left(1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4\right) + B\left(1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5\right) \quad (1014)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$\mathcal{U} = \int_0^1 u''^2(z) dz - \lambda \int_0^1 zu'^2(z) dz \quad (1015)$$

Desarrollando las integrales y agrupando términos comunes:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= (3.2A^2 + 3.5714B^2 + 6.6667AB) - \lambda(0.4A^2 + 0.4167B^2 + 0.8148AB) \\ \mathcal{U} &= (3.2 - 0.4\lambda)A^2 + (3.5714 - 0.4167\lambda)B^2 + (3.3333 - 0.4074\lambda)AB \end{aligned} \quad (1016)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial A} = 0 \rightarrow (6.4 - 0.8\lambda)A + (6.6667 - 0.8148\lambda)B = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial B} = 0 \rightarrow (6.6667 - 0.8148\lambda)A + (7.1429 - 0.8333\lambda)B = 0 \end{array} \right\} \quad (1017)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 6.4 - 0.8\lambda & 6.6667 - 0.8148\lambda \\ 6.6667 - 0.8148\lambda & 7.1429 - 0.8333\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1018)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero. Operando la determinante:

$$0.00274348\lambda^2 + -0.18342152\lambda + 1.26984127 = 0 \quad (1019)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 7.843180189 \\ \lambda = 59.013962668 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_1 = 7.843180189 \rightarrow q_{cr}H = \lambda_1 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.843180189 \frac{K_b}{H^2} \quad (1020)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga. Para la mayoría de los casos prácticos la carga crítica resultante es lo suficientemente exacta; con el objetivo de obtener una mejor aproximación a la carga crítica exacta es necesario repetir el procedimiento anterior con dos nuevos polinomios de mayor grado.

- 2° Iteración:

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1021)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos cuatro veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga:

$$u_{(z)} = -\lambda \iiint_0^z \alpha_{(z)} u'_{(z)} dz + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1022)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$u_{(z)} = -\lambda \left(\frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{48}z^5 + \frac{1}{2016}z^9 \right) + C_2z^2 + C_1z + C_0 \quad (1023)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio a utilizar en la segunda iteración.

$$\phi_2^2 = 1.0212 - 1.4006z + 0.4085z^4 - 0.0292z^8 \quad (1024)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 \quad (1025)$$

Resolviendo similarmente a la iteración 1:

$$\lambda_2 = 7.838442004 \rightarrow q_{cr}H = \lambda_2 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.838442004 \frac{K_b}{H^2} \quad (1026)$$

- 3° Iteración:

$$\begin{aligned} \phi_1^3 &= 1.0212 - 1.4006z + 0.4085z^4 - 0.0292z^8 \\ \phi_2^3 &= 1.0248 - 1.4231z + 0.4574z^4 - 0.0610z^7 + 0.0018z^{11} \\ u_{(z)} &= A\phi_1^3 + B\phi_2^3 \\ \lambda_3 &= 7.837349280 \rightarrow q_{cr}H = \lambda_3 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.837349280 \frac{K_b}{H^2} \end{aligned} \quad (1027)$$

- 4° Iteración:

$$\begin{aligned} \phi_1^4 &= 1.0248 - 1.4231z + 0.4574z^4 - 0.0610z^7 + 0.0018z^{11} \\ \phi_2^4 &= 1.0253 - 1.4263z + 0.4647z^4 - 0.0683z^7 + 0.0046z^{10} - 0.0001z^{14} \\ u_{(z)} &= A\phi_1^4 + B\phi_2^4 \\ \lambda_4 &= 7.837347443 \rightarrow q_{cr}H = \lambda_4 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.837347443 \frac{K_b}{H^2} \end{aligned} \quad (1028)$$

- 5° Iteración:

$$\begin{aligned} \phi_1^5 &= 1.0253 - 1.4263z + 0.4647z^4 - 0.0683z^7 + 0.0046z^{10} - 0.0001z^{14} \\ \phi_2^5 &= 1.0254 - 1.4268z + 0.4658z^4 - 0.0694z^7 + 0.0052z^{10} - 0.0002z^{13} + 0.000002z^{17} \\ u_{(z)} &= A\phi_1^5 + B\phi_2^5 \\ \lambda_5 &= 7.837347435 \rightarrow q_{cr}H = \lambda_5 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.837347435 \frac{K_b}{H^2} \end{aligned} \quad (1029)$$

Numéricamente se observa que con una tercera iteración la aproximación puede considerarse exacta.

$$\lambda = 7.837 \rightarrow q_{cr}H = \lambda \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = 7.837 \frac{K_b}{H^2} \quad (1030)$$

Este valor encontrado es idéntico al valor exacto dado por Timoshenko y Gere utilizando funciones Bessel; por lo que, puede considerarse práctico para los propósitos de ingeniería.

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1031)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u_{(z)}''' + \frac{\lambda}{H} u_{(z)}' = 0 \quad (1032)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cos(\sqrt{\lambda/H} z) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda/H} z) \quad (1033)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\sqrt{\lambda/H}) & \sin(\sqrt{\lambda/H}) \\ 0 & -\sin(\sqrt{\lambda/H}) & \cos(\sqrt{\lambda/H}) \\ 0 & \cos(\sqrt{\lambda/H}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1034)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir:

$$\cos(\sqrt{\lambda/H}) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda/H} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1035)$$

Resolviendo se encuentra que la carga crítica:

$$q_{cr} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_b}{4H^2} \quad (1036)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 K_b}{4 H^2} \quad (1037)$$

4.3.1.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$K_b u_{(x)}'''' + f_{(x)} u_{(x)}'' = 0 \quad (1038)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$D^2(D^2 + r^2) = 0 \quad (1039)$$

Donde:

$$\xi = \frac{q}{K_b} \quad (1040)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cos(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sin(\sqrt{\xi} z) \\ u'_{(z)} = C_1 - C_2 \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z) \end{array} \right\} \quad (1041)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{(z)} = K_b u'_{(z)} = -[\xi K_b \cos(\sqrt{\xi} z)] C_2 - [\xi K_b \sin(\sqrt{\xi} z)] C_3 \\ V_{(z)} = K_b u''_{(z)} + q u'_{(z)} = (q) C_1 + [(\xi K_b - q) \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi} z)] C_2 - [(\xi K_b - q) \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z)] C_3 \end{array} \right\} \quad (1042)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (1043)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi}z) & \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 1 & -\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 0 & -\xi K_b \cos(\sqrt{\xi}z) & -\xi K_b \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & q & (\xi K_b - q)\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) & -[(\xi K_b - q)\sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z)]_i \end{bmatrix} \quad (1044)$$

Evaluando en la base del piso i-ésimo; es decir para $z_i = h_i$:

$$\begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} = K_i(h_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (1045)$$

Reemplazando el vector de coeficientes:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) K_i^{-1}(h_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} = T_i(z_i) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (1046)$$

Donde:

$$T_i(z) = K_i(z) K_i^{-1}(h_i) \quad (1047)$$

Si evaluamos las fuerzas y desplazamientos en la parte superior del i-ésimo piso, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_i(0) \\ u'_i(0) \\ M_i(0) \\ V_i(0) \end{Bmatrix} = T_i(0) \begin{Bmatrix} u_i(h_i) \\ u'_i(h_i) \\ M_i(h_i) \\ V_i(h_i) \end{Bmatrix} \quad (1048)$$

Esta ecuación muestra la relación de fuerzas y desplazamientos entre la parte superior e inferior del piso i-ésimo.

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga:

Para el primer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u'_1(0) \\ M_1(0) \\ V_1(0) \end{Bmatrix} = T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1049)$$

Para el segundo piso:

$$\begin{Bmatrix} u_2(0) \\ u'_2(0) \\ M_2(0) \\ V_2(0) \end{Bmatrix} = T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1050)$$

Para el tercer piso:

$$\begin{Bmatrix} u_3(0) \\ u'_3(0) \\ M_3(0) \\ V_3(0) \end{Bmatrix} = T_3(0)T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1051)$$

Para el n-ésimo piso (parte superior de la viga):

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = T_n(0) \dots T_2(0)T_1(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1052)$$

Expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1053)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1054)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ K_b u''_{(0)} = 0 \\ K_b u''_{(0)} + f_{(0)} u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1055)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1056)$$

Despejando el momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1057)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.2 Viga de corte de un campo (SB)

4.3.2.1 Caso 1

La energía potencial del modelo SB de un campo es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H K_s u'(x)^2 dx \quad (1058)$$

Donde:

$$\left\{ K_s = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_b = \frac{12EI_v}{lh}, K_c = \frac{\pi^2 EI_c}{h^2} \right\} \quad (1059)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa es:

$$W = - \int_0^H f(x) dl = - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1060)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} K_s u'(x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1061)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H [K_s u'(x) \delta u'(x) - f(x) u'(x) \delta u'(x)] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \quad (1062)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta U = & [K_s u'(x) \delta u(x)]_0^H - [f(x) u'(x) \delta u(x)]_0^H - \int_0^H [K_s u''(x) - f(x) u''(x) - f'(x) u'(x)] \delta u(x) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (1063)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_s u''_{(x)} - f_{(x)} u''_{(x)} - f'_{(x)} u'_{(x)} = 0 \quad (1064)$$

Y condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1065)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$[K_s - f_{(x)}] u'_{(x)} = 0 \quad (1066)$$

Igualando a cero:

$$K_s - f_{(x)} = 0 \quad (1067)$$

Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$K_s - H f_{(z)} = 0 \quad (1068)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1069)$$

Resolviendo en $z=1$, se obtiene:

$$K_s - qH = 0 \rightarrow q_{\text{critico}} H = K_s \quad (1070)$$

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1071)$$

Resolviendo se encuentra que la carga crítica:

$$K_s - q = 0 \rightarrow q_{\text{critico}} = K_s \quad (1072)$$

4.3.2.2 Caso 2

Según la ecuación diferencial de segundo orden:

$$K_s u''_{(x)} - f(x) u''_{(x)} = 0 \quad (1073)$$

Utilizando el método de operadores diferenciales:

$$D^2[K_s - f(x)] = 0 \rightarrow q_{\text{critico}} = K_s \quad (1074)$$

4.3.3 Viga Timoshenko de dos campos (TB)

4.3.3.1 Caso 1

La energía potencial del modelo TB de dos campos es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'_{(x)}{}^2 + K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2\} dx \quad (1075)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f_{(x)} dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1076)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_b \theta'_{(x)}{}^2 + K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1077)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^H [K_b \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} + K_s (\theta_{(x)} - u'_{(x)}) (\delta \theta_{(x)} - \delta u'_{(x)}) - f_{(x)} u'_{(x)} \delta u'_{(x)}] dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1078)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta U = [K_b \theta'_{(x)} \delta \theta_{(x)}]_0^H - \left\{ K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + f_{(x)} u'_{(x)} \right\} \delta u_{(x)} \Big|_0^H \\ - \int_0^H \{K_b \theta''_{(x)} - K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]\} \delta \theta_{(x)} dx \\ + \int_0^H \{K_s [\theta'_{(x)} - u''_{(x)}] + f_{(x)} u''_{(x)} + f'_{(x)} u'_{(x)}\} \delta u_{(x)} dx \\ - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1079)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b \theta''_{(x)} - K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] = 0 \\ K_s [\theta'_{(x)} - u''_{(x)}] + f_{(x)} u''_{(x)} + f'_{(x)} u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1080)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(0)} = 0 \\ K_s [\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + f_{(0)} u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1081)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + f_{(x)} u'_{(x)} = 0 \quad (1082)$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b \theta''_{(x)} - K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] = 0 \\ K_s [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + f_{(x)} u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1083)$$

De la ecuación despejamos el valor de $u'_{(x)}$:

$$u'_{(x)} = \frac{K_s \theta_{(x)} - K_b \theta''_{(x)}}{K_s} \quad (1084)$$

Reemplazando las ecuaciones en la ecuación:

$$K_b \theta''_{(x)} - f_{(x)} \left[\frac{K_b}{K_s} \theta''_{(x)} - \theta_{(x)} \right] = 0 \quad (1085)$$

Reordenando:

$$\theta''_{(x)} - f_{(x)} \left[\frac{1}{K_s} \theta''_{(x)} - \frac{1}{K_b} \theta_{(x)} \right] = 0 \quad (1086)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$\theta''_{(z)} - f_{(z)} \left[\frac{1}{K_s} \theta''_{(z)} - \frac{H^2}{K_b} \theta_{(z)} \right] = 0 \quad (1087)$$

Definimos dos parámetros adicionales:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s}{K_b}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_b} \right\} \quad (1088)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\theta''_{(z)} - \lambda \alpha_{(z)} \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''_{(z)} - \theta_{(z)} \right] = 0 \quad (1089)$$

Donde:

$$f_{(z)} = q \alpha_{(z)} \quad (1090)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $\theta_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \theta''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1091)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} \right] \theta_{(z)} - \lambda \left\{ \alpha_{(z)} \left[\frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right] \right\} \theta_{(z)} = 0 \quad (1092)$$

Multiplicando la ecuación por $\left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''_{(z)} - \theta_{(z)} \right]$ e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2_{(z)} - \theta_{(z)} \theta''_{(z)} \right] dz - \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''_{(z)} - \theta_{(z)} \right]^2 dz = 0 \quad (1093)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2_{(z)} + \theta'^2_{(z)} \right] dz - \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''_{(z)} - \theta_{(z)} \right]^2 dz = 0 \quad (1094)$$

Despejando el parámetro γ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2(z) + \theta'^2(z) \right] dz}{\int_0^1 \alpha(z) \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''(z) - \theta(z) \right]^2 dz} \quad (1095)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $\theta(z)$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha(z)$ resulta:

$$\alpha(z) = z \rightarrow f(z) = qz \quad (1096)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2(z) + \theta'^2(z) \right] dz}{\int_0^1 z \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''(z) - \theta(z) \right]^2 dz} \quad (1097)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - z^4, \phi_2^1 = 1 - z^5 \quad (1098)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta(z) = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A(1 - z^4) + B(1 - z^5) \quad (1099)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$\mathcal{U} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2(z) + \theta'^2(z) \right] dz - \lambda \int_0^1 z \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''(z) - \theta(z) \right]^2 dz$$

Desarrollando las integrales y uniendo términos comunes:

$$\mathcal{U} = A^2(a_1 - \lambda a_2) + B^2(b_1 - \lambda b_2) + AB[(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \quad (1100)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2.2857 + 28.8 \frac{1}{\alpha^2}, a_2 = 0.2667 + 3 \frac{1}{\alpha^2} + 24 \frac{1}{\alpha^4} \\ b_1 = 2.7778 + 57.1429 \frac{1}{\alpha^2}, b_2 = 0.2976 + 4 \frac{1}{\alpha^2} + 50 \frac{1}{\alpha^4} \\ (ab)_1 = 5 + 80 \frac{1}{\alpha^2}, (ab)_2 = 0.5628 + 6.8889 \frac{1}{\alpha^2} + 68.5714 \frac{1}{\alpha^4} \end{array} \right\} \quad (1101)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \rightarrow 2(a_1 - \lambda a_2)A + [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]B = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \rightarrow [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]A + 2(b_1 - \lambda b_2)B = 0 \end{array} \right\} \quad (1102)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1103)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero. Operando la determinante:

$$[4a_2b_2 - (ab)_2^2]\lambda^2 + [2(ab)_1(ab)_2 - 4(a_1b_2 + a_2b_1)]\lambda + [4a_1b_1 - (ab)_1^2] = 0 \quad (1104)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\left\{ \lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \rightarrow q_{cr}H = \lambda \frac{K_{b2}}{H^2} \right\} \quad (1105)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga TB. Para la mayoría de los casos prácticos la carga crítica resultante es lo suficientemente exacta; con el objetivo de obtener una mejor aproximación a la carga crítica exacta es necesario repetir el procedimiento anterior con dos nuevos polinomios de mayor grado.

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - z^5 \quad (1106)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos cuatro veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga SWB:

$$\theta_{(z)} = \frac{1}{\alpha^2} \lambda \iint_0^z \alpha_{(z)} \theta''_{(z)} dz - \lambda \iint_0^z \alpha_{(z)} \theta_{(z)} dz + C_1 z + C_0 \quad (1107)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$\theta_{(z)} = \frac{1}{\alpha^2} \lambda \iint_0^z z \theta''_{(z)} dz - \lambda \iint_0^z z \theta_{(z)} dz + C_1 z + C_0 \quad (1108)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio a utilizar en la segunda iteración.

$$\phi_2^2 = \frac{1}{\alpha^2} \lambda \iint_0^z z \theta''_{(z)} dz - \lambda \iint_0^z z \theta_{(z)} dz + C_1 z + C_0 \quad (1109)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 = A\phi_2^1 + B\phi_2^2 \quad (1110)$$

Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado. Numéricamente se observa que con una cuarta iteración la aproximación puede considerarse exacta.

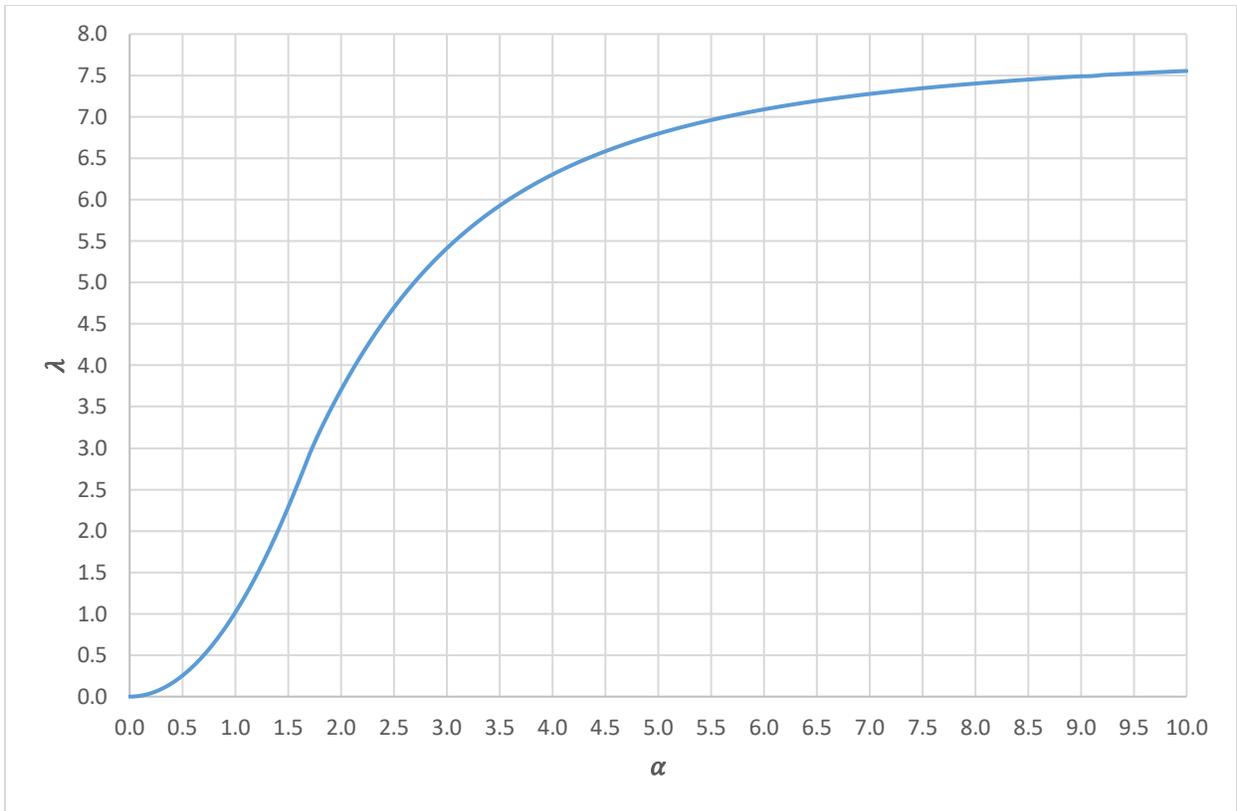


Figura 97. Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 10$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

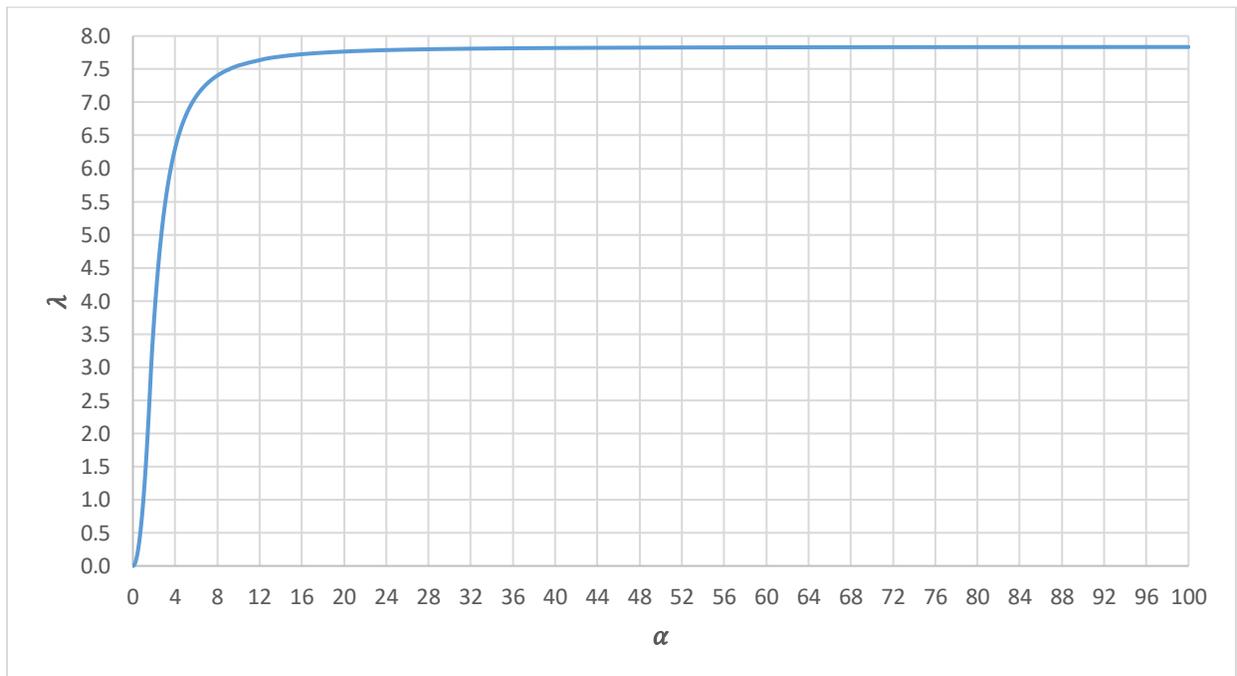


Figura 98. Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 100$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

Tabla.4 *Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 100$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.*

α	δ	α	δ	α	δ	α	δ
0.00	0.00000	1.95	3.5845	4.90	6.7587	8.80	7.4754
0.05	0.00254	2.00	3.7024	5.00	6.7968	8.90	7.4832
0.10	0.01017	2.05	3.8166	5.10	6.8331	9.00	7.4907
0.15	0.02289	2.10	3.9274	5.20	6.8675	9.10	7.4925
0.20	0.04069	2.15	4.0352	5.30	6.9003	9.20	7.5051
0.25	0.06357	2.20	4.1390	5.40	6.9315	9.30	7.5120
0.30	0.09155	2.25	4.2395	5.50	6.9612	9.40	7.5187
0.35	0.12461	2.30	4.3369	5.60	6.9895	9.50	7.5251
0.40	0.16276	2.35	4.4312	5.70	7.0165	9.60	7.5314
0.45	0.20600	2.40	4.5225	5.80	7.0423	9.70	7.5375
0.50	0.25433	2.45	4.6108	5.90	7.0669	9.80	7.5434
0.55	0.30775	2.50	4.6963	6.00	7.0904	9.90	7.5491
0.60	0.36626	2.55	4.7790	6.10	7.1129	10.00	7.5547
0.65	0.42986	2.60	4.8589	6.20	7.1344	12.50	7.6546
0.70	0.49857	2.65	4.9363	6.30	7.1549	15.00	7.7097
0.75	0.57236	2.70	5.0112	6.40	7.1747	17.50	7.7432
0.80	0.65126	2.75	5.0836	6.50	7.1937	20.00	7.7651
0.85	0.73525	2.80	5.1537	6.60	7.2118	22.50	7.7802
0.90	0.82435	2.85	5.2214	6.70	7.2291	25.00	7.7910
0.95	0.91855	2.90	5.2870	6.80	7.2458	27.50	7.7990
1.00	1.01784	3.00	5.4118	6.90	7.2619	30.00	7.8051
1.05	1.12224	3.10	5.5286	7.00	7.2773	32.50	7.8099
1.10	1.23173	3.20	5.6381	7.10	7.2917	35.00	7.8136
1.15	1.34630	3.30	5.7408	7.20	7.3063	37.50	7.8167
1.20	1.46595	3.40	5.8370	7.30	7.3199	40.00	7.8192
1.25	1.59065	3.50	5.9273	7.40	7.3331	42.50	7.8213
1.30	1.72038	3.60	6.0122	7.50	7.3458	45.00	7.8230
1.35	1.85507	3.70	6.0919	7.60	7.3580	47.50	7.8245
1.40	1.99467	3.80	6.1669	7.70	7.3698	50.00	7.8257
1.45	2.1390	3.90	6.2374	7.80	7.3812	52.50	7.8268
1.50	2.28800	4.00	6.3039	7.90	7.3921	55.00	7.8277
1.55	2.44121	4.10	6.3666	8.00	7.4027	57.50	7.8286
1.60	2.59809	4.20	6.4257	8.10	7.4129	60.00	7.8293
1.65	2.75783	4.30	6.4816	8.20	7.4228	65.00	7.8305
1.70	2.92053	4.40	6.5343	8.30	7.4323	70.00	7.8314
1.75	3.06883	4.50	6.5842	8.40	7.4415	80.00	7.8328
1.80	3.20672	4.60	6.6314	8.50	7.4504	90.00	7.8338
1.85	3.33738	4.70	6.6761	8.60	7.4590	100.00	7.8344
1.90	3.46299	4.80	6.7185	8.70	7.4673	∞	7.8373

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1111)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\theta''_{(z)} + \left(\frac{\frac{\lambda}{H}}{1 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\lambda}{H}} \right) \theta_{(z)} = 0 \quad (1112)$$

La expresión de $\theta_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$\theta_{(z)} = C_1 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_2 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1113)$$

Donde:

$$\beta = \frac{\frac{\lambda}{H}}{1 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\lambda}{H}} \quad (1114)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\beta} \\ \cos \sqrt{\beta} & \sin \sqrt{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1115)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos \sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1116)$$

Es decir:

$$\frac{\frac{\lambda}{H}}{1 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\lambda}{H}} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1117)$$

Después de algunas manipulaciones simples:

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{1}{\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} + \frac{1}{\alpha^2}} \quad (1118)$$

Reemplazando por sus rigideces características:

$$q_{cr} = \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n-1)^2\pi^2 K_b} + \frac{1}{K_s}} \quad (1119)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = \left\{ \left[(2n-1)^2 \frac{\pi^2 K_b}{4H^2} \right]^{-1} + K_s^{-1} \right\}^{-1} \quad (1120)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \left[\left(\frac{\pi^2 K_b}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} = [q_{cr, flexión\ global}^{-1} + q_{cr, corte}^{-1}]^{-1} \quad (1121)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.3.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{cases} K_b \theta''_{(x)} + K_s [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ K_s [u''_{(x)} - \theta'_{(x)}] - f_{(x)} u''_{(x)} = 0 \end{cases} \quad (1122)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\begin{bmatrix} K_s D & K_b D^2 - K_s \\ (K_s - q) D^2 & -K_s D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1123)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cos(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sin(\sqrt{\xi} z) \\ \theta_{(z)} = C_4 + C_5 \cos(\sqrt{\xi} z) + C_6 \sin(\sqrt{\xi} z) \end{cases} \quad (1124)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{qK_s}{(K_s - q)K_b}, \alpha^* = \sqrt{\frac{K_s}{K_b}} \right\} \quad (1125)$$

Expresando los coeficientes de la función $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\theta_{(z)} = C_1 - \left[\frac{K_s \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi} z)}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \right] C_2 + \left[\frac{\sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z)}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \right] C_3 \quad (1126)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{(z)} = K_b \theta'_{(z)} &= - \left[\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \cos(\sqrt{\xi} z) \right] C_2 - \left[\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \sin(\sqrt{\xi} z) \right] C_3 \\ V_{(z)} = (q - K_s) u'_{(x)} + K_s \theta_{(x)} &= (q) C_1 + \left[\left(\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q \right) r \sin(\sqrt{\xi} z) \right] C_2 - \left[\left(\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q \right) \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z) \right] C_3 \end{aligned} \right\} \quad (1127)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (1128)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi}z) & \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 1 & -\frac{K_s\sqrt{\xi}\sin(\sqrt{\xi}z)}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} & -\frac{K_b\xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1}\sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 0 & -\frac{K_b\xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1}\cos(\sqrt{\xi}z) & -\frac{K_b\xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1}\sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & q & \left(\frac{K_b\xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q\right)\sqrt{\xi}\sin(\sqrt{\xi}z) & -\left(\frac{K_b\xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q\right)\sqrt{\xi}\cos(\sqrt{\xi}z) \end{bmatrix}_i \quad (1129)$$

• **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1130)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1131)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ K_b\theta'_{(0)} = 0 \\ (q - K_s)u'_{(0)} + K_s\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1132)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1133)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1134)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.4 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento traslacional

4.3.4.1 Caso 1

La energía potencial del modelo CTB de un campo es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b2} u''(x)^2 + K_{s1} u'(x)^2] dx \quad (1135)$$

Donde:

$$\left\{ K_b = \sum_{i=1}^n r E I_i, K_s = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_c = \sum_{i=1}^n \frac{\pi^2 E I_i}{h^2}, K_b = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{12 E I_b}{l h}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \right\} \quad (1136)$$

E es el módulo de elasticidad del material, I_i es el momento de inercia de la columna o muro de corte, I_b es el momento de inercia de la viga, h es la altura de piso, l es la longitud a ejes de la columna o muro de corte, K_b es la rigidez a la flexión y K_s es la rigidez al corte respectivamente.

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f(x) dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1137)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b2} u''(x)^2 + K_{s1} u'(x)^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1138)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H [K_{b2} u''(x) \delta u''(x) + K_{s1} u'(x) \delta u'(x) - f(x) u'(x) \delta u'(x)] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \quad (1139)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta U = & [K_{b2}u''_{(x)}\delta u'_{(x)}]_0^H + \{[K_{s1}u'_{(x)} - K_{b2}u'''_{(x)} - f_{(x)}u'_{(x)}]\delta u_{(x)}\}_0^H \\
& + \int_0^H [K_{b2}u''''_{(x)} - K_{s1}u''_{(x)} + f'_{(x)}u'_{(x)} + f_{(x)}u''_{(x)}]\delta u_{(x)}dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)}u'^2_{(x)}\delta f_{(x)}dx
\end{aligned} \tag{1140}$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_{b2}u''''_{(x)} - K_{s1}u''_{(x)} + f'_{(x)}u'_{(x)} + f_{(x)}u''_{(x)} = 0 \tag{1141}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ [f_{(0)} - K_{s1}]u'_{(0)} + K_{b2}u'''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1142}$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$u'''_{(x)} - \frac{K_{s1}}{K_{b2}}u'_{(x)} + \frac{f_{(x)}}{K_{b2}}u'_{(x)} = 0 \tag{1143}$$

Se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u'''_{(z)} - \frac{K_{s1}}{K_{b2}}H^2u'_{(z)} + \frac{f_{(z)}}{K_{b2}}H^3u'_{(z)} = 0 \tag{1144}$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u'''_{(z)} - \alpha^2u'_{(z)} + \lambda\alpha_{(z)}u'_{(z)} = 0 \tag{1145}$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \right\} \tag{1146}$$

Condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1147)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^3}{dz^3} - \alpha^2 \frac{d}{dz} \right] u_{(z)} - \lambda \left[-\alpha_{(z)} \frac{d}{dz} \right] u_{(z)} = 0 \quad (1148)$$

Multiplicando la ecuación por $[u'_{(z)}]$ e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 [u'_{(z)} u'''_{(z)} - \alpha^2 u'_{(z)} u'_{(z)}] dz + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [u'_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1149)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\int_0^1 [-u''_{(z)} u'_{(z)} - \alpha^2 u'_{(z)} u'_{(z)}] dz + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [u'_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1150)$$

Despejando el parámetro λ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [u''_{(z)} u'_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)} u'_{(z)}] dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [u'_{(z)}]^2 dz} \quad (1151)$$

Donde λ es cociente de Rayleigh.

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1152)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [u''_{(z)} u'_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)} u'_{(z)}] dz}{\int_0^1 z u'_{(z)} u'_{(z)} dz} \quad (1153)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4, \phi_2^1 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1154)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u_{(z)} = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A\left(1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4\right) + B\left(1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5\right) \quad (1155)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$U = \int_0^1 [u''_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)}] dz - \lambda \int_0^1 z [u'_{(z)}]^2 dz \quad (1156)$$

Desarrollando las integrales y agrupando términos comunes:

$$U = A^2[(3.2 + 1.1429\alpha^2) - 0.4\lambda] + B^2[(3.5714 + 1.1111\alpha^2) - 0.4167\lambda] + AB[(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda] \quad (1157)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \rightarrow [(6.4 + 2.2858\alpha^2) - 0.8\lambda]A + [(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda]B = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \rightarrow [(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda]A + [(7.1428 + 2.2222\alpha^2) - 0.8334\lambda]B = 0 \end{array} \right\} \quad (1158)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (6.4 + 2.2858\alpha^2) - 0.8\lambda & (6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda \\ (6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda & (7.1428 + 2.2222\alpha^2) - 0.8334\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1159)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero. Operando la determinante:

$$\lambda^2 - (66.8571 + 5.7857\alpha^2)\lambda + (6.1473\alpha^4 + 200.0205\alpha^2 + 462.4561) = 0 \quad (1160)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = (33.4286 + 2.8929\alpha^2) - \sqrt{2.2213\alpha^4 - 6.6123\alpha^2 + 655.0133} \\ q_{cr}H = \lambda_1 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = \lambda_1 \frac{K_b}{H^2} \end{array} \right\} \quad (1161)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga.

- 2° Iteración:

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1162)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos tres veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga:

$$u_{(z)} = \iint_0^z \alpha^2 u_{(z)} dz - \lambda \iiint_0^z \alpha_{(z)} u'_{(z)} dz dz + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1163)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$u_{(z)} = \iint_0^z \alpha^2 u_{(z)} dz - \lambda \iiint_0^z z u'_{(z)} dz dz + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1164)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio ϕ_2^2 a utilizar en la segunda iteración.

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 \quad (1165)$$

Resolviendo similarmente a la iteración 1 se obtiene el nuevo valor propio λ_2 . Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado. Numéricamente se observa que con una tercera iteración la aproximación puede considerarse exacta.

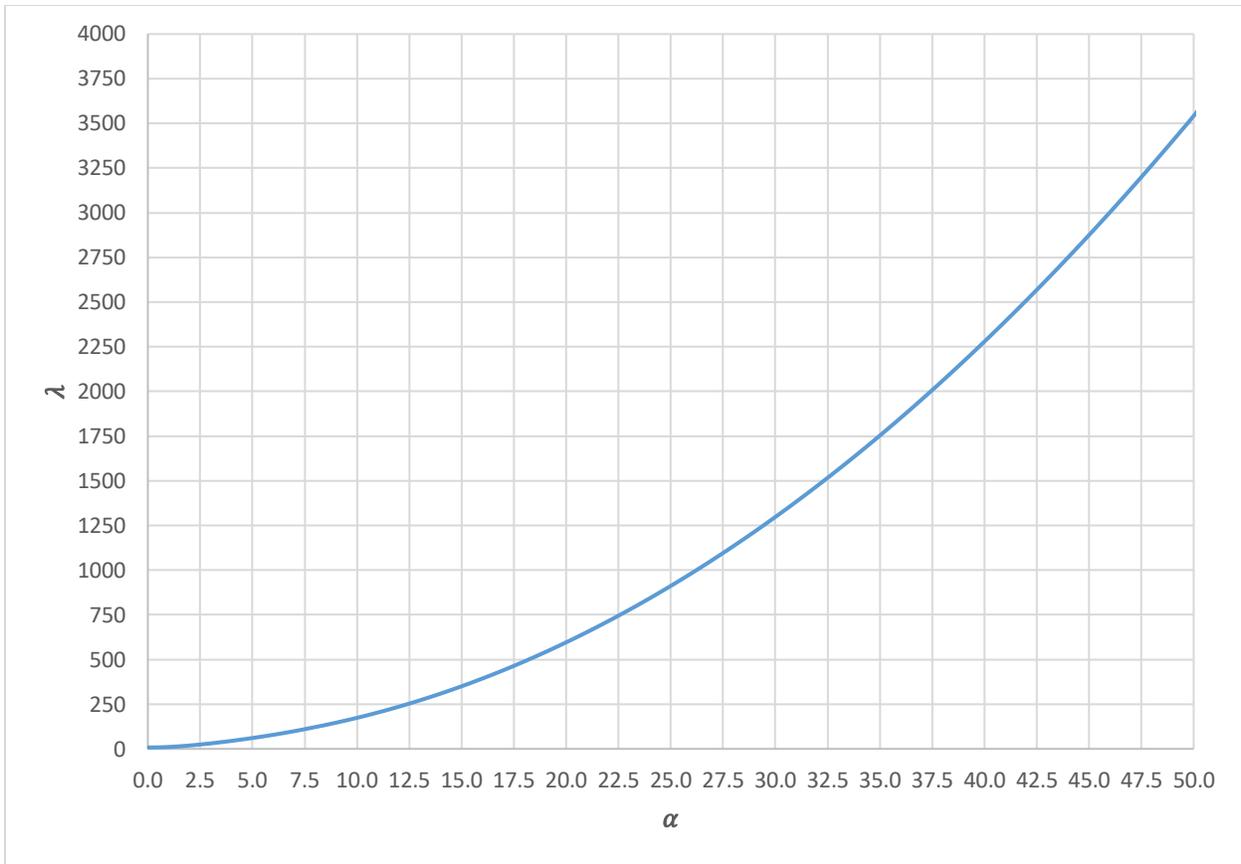


Figura 99. Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 50$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

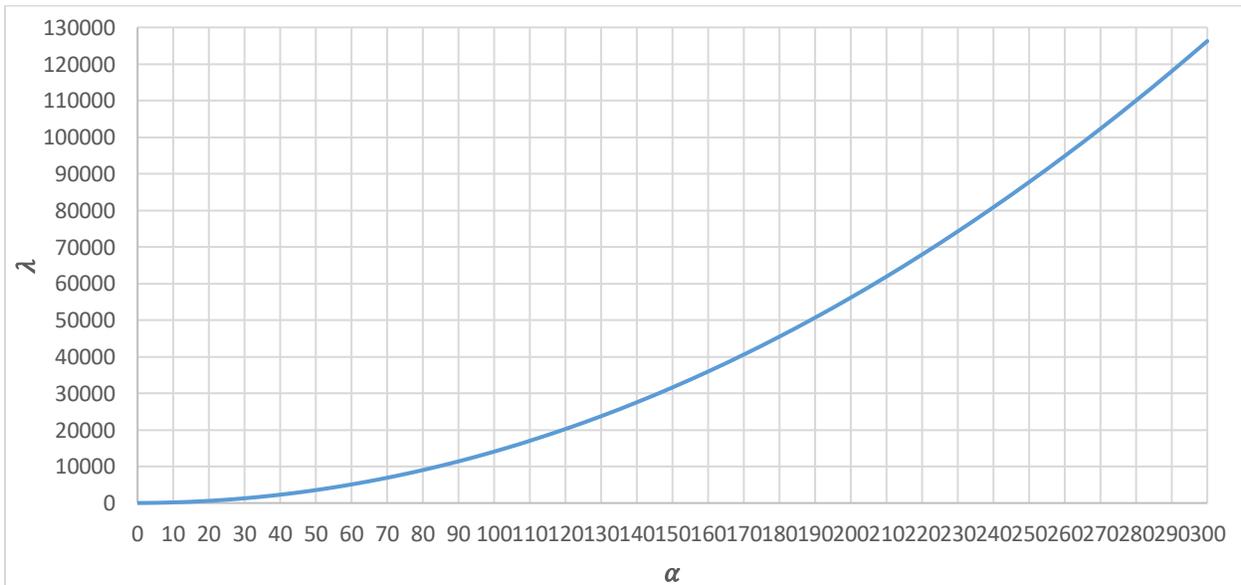


Figura 100. Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

Tabla.5 Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 15.5$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

α	δ	α	δ	α	δ	α	δ
0.00	7.837	3.90	43.195	7.80	117.373	11.70	226.025
0.10	7.867	4.00	44.695	7.90	119.664	11.80	229.348
0.20	7.957	4.10	46.214	8.00	121.980	11.90	232.699
0.30	8.107	4.20	47.753	8.10	124.321	12.00	236.076
0.40	8.316	4.30	49.310	8.20	126.687	12.10	239.481
0.50	8.583	4.40	50.887	8.30	129.079	12.20	242.914
0.60	8.909	4.50	52.483	8.40	131.207	12.30	246.374
0.70	9.291	4.60	54.099	8.50	133.938	12.40	249.861
0.80	9.730	4.70	55.733	8.60	136.406	12.50	253.376
0.90	10.224	4.80	57.387	8.70	138.899	12.60	256.919
1.00	10.772	4.90	59.061	8.80	141.419	12.70	260.489
1.10	11.372	5.00	60.755	8.90	143.964	12.80	264.086
1.20	12.023	5.10	62.468	9.00	146.535	12.90	267.711
1.30	12.724	5.20	64.202	9.10	149.133	13.00	271.364
1.40	13.472	5.30	65.955	9.20	151.757	13.10	275.044
1.50	14.267	5.40	67.729	9.30	154.406	13.20	278.752
1.60	15.106	5.50	69.523	9.40	157.083	13.30	282.487
1.70	15.988	5.60	71.337	9.50	159.785	13.40	286.250
1.80	16.911	5.70	73.173	9.60	162.514	13.50	290.041
1.90	17.873	5.80	75.032	9.70	165.270	13.60	293.859
2.00	18.873	5.90	76.918	9.80	168.052	13.70	297.705
2.10	19.908	6.00	78.815	9.90	170.861	13.80	301.579
2.20	20.978	6.10	80.734	10.00	173.696	13.90	305.480
2.30	22.080	6.20	82.675	10.10	176.558	14.00	309.409
2.40	23.214	6.30	84.638	10.20	179.447	14.10	313.366
2.50	24.377	6.40	86.624	10.30	182.363	14.20	317.351
2.60	25.568	6.50	88.633	10.40	185.306	14.30	321.363
2.70	26.786	6.60	90.667	10.50	188.276	14.40	325.403
2.80	28.030	6.70	92.725	10.60	191.272	14.50	329.471
2.90	29.300	6.80	94.810	10.70	194.296	14.60	333.566
3.00	30.593	6.90	96.922	10.80	197.347	14.70	337.689
3.10	31.909	7.00	99.063	10.90	200.424	14.80	341.840
3.20	33.247	7.10	101.233	11.00	203.529	14.90	346.019
3.30	34.607	7.20	103.435	11.10	206.661	15.00	350.225
3.40	35.988	7.30	105.672	11.20	209.821	15.10	354.460
3.50	37.389	7.40	107.945	11.30	213.007	15.20	358.722
3.60	38.811	7.50	110.257	11.40	216.221	15.30	363.012
3.70	40.253	7.60	112.612	11.50	219.462	15.40	367.329
3.80	41.714	7.70	115.014	11.60	222.730	15.50	371.675

Tabla.6 *Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.*

α	δ	α	δ	α	δ	α	δ
15.6	376.048	19.50	568.355	28.50	1174.521	46.5	3068.003
15.7	380.449	19.60	573.844	28.75	1194.599	47.0	3133.569
15.8	384.878	19.70	579.362	29.00	1214.851	47.5	3199.837
15.9	389.335	19.80	584.907	29.25	1235.279	48.0	3266.807
16.0	393.820	19.90	590.481	29.5	1255.882	48.5	3334.477
16.1	398.332	20.00	596.082	29.75	1276.660	49.0	3402.848
16.2	402.873	20.25	610.207	30.0	1297.613	49.5	3471.921
16.3	407.441	20.50	624.508	30.5	1340.045	50.0	3541.695
16.4	412.037	20.75	638.983	31.0	1383.178	55.0	4277.999
16.5	416.661	21.00	653.633	31.5	1427.012	60.0	5084.421
16.6	421.313	21.25	668.458	32.0	1471.547	65.0	5960.964
16.7	425.992	21.50	683.458	32.5	1516.782	70.0	6907.628
16.8	430.700	21.75	698.633	33.0	1562.719	75.0	7924.413
16.9	435.435	22.00	713.983	33.5	1609.357	80.0	9011.319
17.0	440.199	22.25	729.508	34.0	1656.695	85.0	10168.348
17.1	444.990	22.50	745.208	34.5	1704.735	90.0	11395.499
17.2	449.809	22.75	761.082	35.0	1753.475	95.0	12692.772
17.3	454.656	23.00	777.132	35.5	1802.917	100	14060.167
17.4	459.531	23.25	793.357	36.0	1853.059	105	15497.684
17.5	464.434	23.50	809.757	36.5	1903.903	110	17005.324
17.6	469.365	23.75	826.331	37.0	1955.447	120	20230.972
17.7	474.323	24.00	843.081	37.5	2007.693	130	23737.109
17.8	479.310	24.25	860.006	38.0	2060.640	140	27523.737
17.9	484.324	24.50	877.106	38.5	2114.287	150	31590.856
18.0	489.367	24.75	894.381	39.0	2168.636	160	35938.465
18.1	494.437	25.00	911.831	39.5	2223.686	170	40566.565
18.2	499.535	25.25	929.456	40.0	2279.437	180	45475.155
18.3	504.661	25.50	947.257	40.5	2335.889	190	50664.236
18.4	509.816	25.75	965.232	41.0	2393.043	200	56133.808
18.5	514.998	26.00	983.383	41.5	2450.897	210	61883.871
18.6	520.208	26.25	1001.708	42.0	2509.452	220	67914.424
18.7	525.445	26.50	1020.209	42.5	2568.709	230	74225.468
18.8	530.711	26.75	1038.885	43.0	2628.667	240	80817.003
18.9	536.005	27.00	1057.736	43.5	2689.325	250	87689.029
19.0	541.327	27.25	1076.763	44.0	2750.685	260	94841.546
19.1	546.677	27.50	1095.964	44.5	2812.747	270	102274.553
19.2	552.054	27.75	1115.341	45.0	2875.509	280	109988.051
19.3	557.460	28.00	1134.892	45.5	2938.972	290	117982.040
19.4	562.893	28.25	1154.619	46.0	3003.137	300	126256.520

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1166)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u_{(z)}''' + (\lambda/H - \alpha^2)u_{(z)}' = 0 \quad (1167)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}z) + C_2 \text{Sen}(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}z) \quad (1168)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & \sin(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) \\ 0 & -\sin(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) \\ 0 & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1169)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir:

$$\cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda/H - \alpha^2} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1170)$$

Resolviendo se encuentra que la carga crítica resulta:

$$q_{cr} = K_s + (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_b}{4 H^2} \quad (1171)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = K_s + \frac{\pi^2 K_b}{4 H^2} = q_{cr,flexión} + q_{cr,corte} \quad (1172)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.4.2 Caso 2

- Cálculo de la matriz de transferencia

Según las ecuaciones diferenciales de cuarto grado:

$$K_{b2}u''''_{(x)} + (q - K_{s1})u''_{(x)} = 0 \quad (1173)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$D^2(D^2 + r^2) = 0 \quad (1174)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cos(\sqrt{\xi}z) + C_3 \sin(\sqrt{\xi}z) \\ u'_{(z)} = C_1 - C_2\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) + C_3\sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z) \end{cases} \quad (1175)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{q - K_{s1}}{K_{b2}}, a^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}} \right\} \quad (1176)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_{b2}u''_{(x)} = -[\xi K_{b2} \cos(\sqrt{\xi}z)]C_2 - [\xi K_{b2} \sin(\sqrt{\xi}z)]C_3 \\ V_{(z)} = K_{b2}u'''_{(x)} + (q - K_{s1})u'_{(x)} = (q - K_{s1})C_1 \end{cases} \quad (1177)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (1178)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi}z) & \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 1 & -\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 0 & -\xi K_{b2} \cos(\sqrt{\xi}z) & -\xi K_{b2} \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & q - K_{s1} & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (1179)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1180)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1181)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\begin{Bmatrix} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ K_{b2} u''_{(0)} = 0 \\ K_{b2} u'''_{(0)} + (q - K_{s1}) u'_{(0)} = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (1182)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1183)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.5 Acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte de un campo (CTB) - comportamiento torsional

Al igual que el análisis del desplazamiento torsional se puede derivar en base a la analogía que existe entre los esfuerzos de estructuras de paredes delgadas en flexión y torsión, el análisis de estabilidad torsional de un núcleo estructural también puede extenderse utilizando esta analogía. El modelo a utilizar es un voladizo equivalente de sección transversal abierta de paredes delgadas que tiene una rigidez de Saint Venant efectiva (GJ_e) y una rigidez a la deformación (EI_w).

4.3.5.1 Caso 1

Al analizar el equilibrio de una sección elemental del núcleo estructural, su ecuación diferencial resulta:

$$EI_w \varphi'''' - GJ^* \varphi'' + m'_{(x)} \varphi'_{(x)} + m_{(x)} \varphi''_{(x)} = 0 \quad (1184)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} J^* = J + \bar{J} \\ J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m h_i v_i^3 \text{ (Sec. abierta)}, J = \frac{4A_0^2}{\sum_{i=1}^m \frac{h_i}{v_i}} \text{ (Sec. cerrada)}, \\ \bar{J} = \frac{4A_0^2}{l^3 sG + \frac{1.2lS}{12EI_b} + \frac{1.2lS}{A_b}}, A_b = t_b d, I_b = \frac{t_b d^3}{12} \end{array} \right. \quad (1185)$$

Condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(1)} = 0 \\ \varphi'_{(1)} = 0 \\ \varphi''_{(0)} = 0 \\ (f_{(0)} - GJ^*) \varphi'_{(0)} + EI_w \varphi'''_{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (1186)$$

La ecuación diferencial es idéntica a la ecuación presentada para el caso del análisis de estabilidad de una viga CTB, con la diferencia en que solo cambia la nomenclatura de sus rigideces; además, se tienen las mismas condiciones de contorno, por lo que la solución dada en la sección anterior es completamente válida para el análisis torsional puro de un núcleo estructural. Para resolverlo es necesario utilizar las rigideces equivalentes:

$$\begin{cases} K_b \rightarrow EI_w \\ K_s \rightarrow GJ \\ \rho A \rightarrow \rho I \end{cases} \quad (1187)$$

4.3.5.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales de cuarto grado:

$$EI_w \varphi'''' - GJ^* \varphi'' + m_{(x)} \varphi''_{(x)} = 0 \quad (1188)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$D^2(D^2 + r^2) = 0 \quad (1189)$$

La expresión para $\varphi_{(z)}$ y $\varphi'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} \varphi_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cos(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sin(\sqrt{\xi} z) \\ \varphi'_{(z)} = C_1 - C_2 r \sin(\sqrt{\xi} z) + C_3 r \cos(\sqrt{\xi} z) \end{cases} \quad (1190)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{m - GJ^*}{EI_w}, \alpha^* = \sqrt{\frac{GJ^*}{EI_w}} \right\} \quad (1191)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = EI_w \varphi''_{(x)} = -[\xi EI_w \cos(\sqrt{\xi} z)] C_2 - [\xi EI_w \sin(\sqrt{\xi} z)] C_3 \\ V_{(z)} = EI_w \varphi'''_{(x)} + (m - GJ^*) \varphi'_{(x)} = (q - GJ^*) C_1 \end{cases} \quad (1192)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i(z_i) \\ \varphi'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (1193)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi}z) & \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 1 & -\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 0 & -\xi EI_w \cos(\sqrt{\xi}z) & -\xi EI_w \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & q - GJ^* & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (1194)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = \mathbf{t} \begin{Bmatrix} \varphi_1(h_1) \\ \varphi'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1195)$$

Donde:

$$\mathbf{t} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1196)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(1)} = 0 \\ \varphi'_{(1)} = 0 \\ EI_w \varphi''_{(0)} = 0 \\ EI_w \varphi'''_{(0)} + (q - GJ^*) \varphi'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(h_1) = 0 \\ \varphi'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1197)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n(0) \\ \varphi_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1198)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1199)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.6 Viga sándwich de dos campos (SWB)

4.3.6.1 Caso 1

La energía potencial del modelo SWB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{b2} u''_{(x)}{}^2 dx \quad (1200)$$

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{w,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^w r EI_{wi}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_w^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_v [(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3} h \left(1 + 12 \frac{\rho EI_b}{l^{*2} GA_b} \right)}, K_w = \sum_{i=1}^w \frac{\pi^2 EI_w}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (1201)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c r EI_{c,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{lh}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{\pi^2 EI_{c,i}}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (1202)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f_{(x)} dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1203)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2} u''_{(x)}{}^2 \right\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1204)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta u = \int_0^H \{ & K_{b1} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] \delta \theta_{(x)} - K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] \delta u'_{(x)} + K_{b2} u''_{(x)} \delta u''_{(x)} \\ & - f_{(x)} u'_{(x)} \delta u'_{(x)} \} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'^2_{(x)} \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1205)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta u = & [K_{b1} \theta'_{(x)} \delta \theta_{(x)}]_0^H + [K_{b2} u''_{(x)} \delta u'_{(x)}]_0^H - \left\{ [K_{b2} u'''_{(x)} + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + f_{(x)} u'_{(x)}] \delta u_{(x)} \right\}_0^H \\ & + \int_0^H \{ K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1} \theta''_{(x)} \} \delta \theta_{(x)} dx \\ & + \int_0^H \{ K_{b2} u''''_{(x)} + [f_{(x)} - K_{s1}] u''_{(x)} + K_{s1} \theta'_{(x)} + f'_{(x)} u'_{(x)} \} \delta u_{(x)} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'^2_{(x)} \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1206)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1} \theta''_{(x)} = 0 \\ K_{b2} u''''_{(x)} + [f_{(x)} - K_{s1}] u''_{(x)} + K_{s1} \theta'_{(x)} + f'_{(x)} u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1207)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{b2} u''''_{(0)} + K_{s1} [\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + f_{(0)} u'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1208)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$K_{b2} u''''_{(x)} - K_{s1} u''_{(x)} + K_{s1} \theta'_{(x)} + f_{(x)} u'_{(x)} = 0 \quad (1209)$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1} \theta''_{(x)} = 0 \\ K_{b2} u''''_{(x)} - K_{s1} u''_{(x)} + K_{s1} \theta'_{(x)} + f_{(x)} u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1210)$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -K_{s1}D & K_{s1} - K_{b1}D^2 \\ K_{b2}D^3 - (K_{s1} + f(x))D & K_{s1}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1211)$$

El determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular):

$$\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}}u''''(x) - (K_{b1} + K_{b2})u'''(x) + f(x) \left[\frac{K_{b1}}{K_{s1}}u'''(x) - u'(x) \right] = 0 \quad (1212)$$

Reordenando:

$$u''''(x) - K_{s1} \left(\frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{b2}} \right) u'''(x) + f(x) \left[\frac{1}{K_{b2}} u'''(x) - \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} u'(x) \right] = 0 \quad (1213)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de quinto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u''''(z) - K_{s1} \left(\frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{b2}} \right) H^2 u'''(z) + f(z) \left[\frac{H^2}{K_{b2}} u'''(z) - \frac{K_{s1}H^4}{K_{b1}K_{b2}} u'(z) \right] = 0 \quad (1214)$$

Donde:

$$f(z) = q\alpha(z) \quad (1215)$$

Definimos:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \right\} \quad (1216)$$

Reescribiendo:

$$u''''(z) - (\alpha\kappa)^2 u'''(z) + \lambda\alpha(z) [u'''(z) - \alpha^2(\kappa^2 - 1)u'(z)] = 0 \quad (1217)$$

Sin embargo, la función de rotación es de un grado menor:

$$\theta''''(z) - (\alpha\kappa)^2 \theta''(z) + \lambda\alpha(z) [\theta''(z) - \alpha^2(\kappa^2 - 1)\theta(z)] = 0 \quad (1218)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $\theta(z)$:

$$\begin{cases} \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \theta''_{(1)} = 0 \\ \theta'''_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1219)$$

Hegedűs y Kollár (1984) derivaron una ecuación diferencial similar con las mismas condiciones de borde.

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^4}{dz^4} - (\alpha\kappa)^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] \theta_{(z)} - \lambda \left\{ -\alpha_{(z)} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2(\kappa^2 - 1) \right] \right\} \theta_{(z)} = 0 \quad (1220)$$

Multiplicando la ecuación por $[\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1)\theta_{(z)}]$ e integrando de 0 a 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\theta''_{(z)} \theta''''_{(z)} - (\alpha\kappa)^2 \theta''^2_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1) \theta_{(z)} \theta''''_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 - 1) (\alpha\kappa)^2 \theta_{(z)} \theta''_{(z)}] dz \\ + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1) \theta_{(z)}]^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (1221)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 [\theta''''^2_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 - 1) \theta''^2_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 - 1) (\alpha\kappa)^2 \theta'^2_{(z)}] dz \\ + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1) \theta_{(z)}]^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (1222)$$

Despejando el parámetro γ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [\theta''''^2_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 - 1) \theta''^2_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 - 1) (\alpha\kappa)^2 \theta'^2_{(z)}] dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1) \theta_{(z)}]^2 dz} \quad (1223)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $\theta_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1224)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [\theta''''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 - 1)\theta''_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 - 1)(\alpha\kappa)^2\theta'_{(z)}] dz}{\int_0^1 z[\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1)\theta_{(z)}]^2 dz} \quad (1225)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - \frac{6}{5}z^2 + \frac{1}{5}z^4, \phi_2^1 = 1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5 \quad (1226)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta_{(z)} = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A\left(1 - \frac{6}{5}z^2 + \frac{1}{5}z^4\right) + B\left(1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5\right) \quad (1227)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$U = \int_0^1 [\theta''''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 - 1)\theta''_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 - 1)(\alpha\kappa)^2\theta'_{(z)}] dz - \lambda \int_0^1 z[\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 - 1)\theta_{(z)}]^2 dz \quad (1228)$$

Desarrollando las integrales y uniendo términos comunes:

$$U = A^2(a_1 - \lambda a_2) + B^2(b_1 - \lambda b_2) + AB[(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \quad (1229)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 7.68 + 3.072[\alpha^2(2\kappa^2 - 1)] + 1.2434[\alpha^2(\kappa^2 - 1)(\alpha\kappa)^2] \\ a_2 = 0.96 + 0.1507[\alpha^2(\kappa^2 - 1)]^2 - 1.3166[\alpha^2(\kappa^2 - 1)] \\ b_1 = 8.8889 + 3.1746[\alpha^2(2\kappa^2 - 1)] + 1.2689[\alpha^2(\kappa^2 - 1)(\alpha\kappa)^2] \\ b_2 = 1.1111 + 0.1555[\alpha^2(\kappa^2 - 1)]^2 - 1.5089[\alpha^2(\kappa^2 - 1)] \\ (ab)_1 = 16 + 6.2222[\alpha^2(2\kappa^2 - 1)] + 2.5111[\alpha^2(\kappa^2 - 1)(\alpha\kappa)^2] \\ (ab)_2 = 2.0571 + 0.3062[\alpha^2(\kappa^2 - 1)]^2 - 3.1030[\alpha^2(\kappa^2 - 1)] \end{array} \right\} \quad (1230)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \rightarrow 2(a_1 - \lambda a_2)A + [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]B \\ \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \rightarrow [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]A + 2(b_1 - \lambda b_2)B \end{array} \right\} \quad (1231)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1232)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero; es decir:

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (1233)$$

Operando la determinante, se tiene:

$$[4a_2b_2 - (ab)_2^2]\lambda^2 + [2(ab)_1(ab)_2 - 4(a_1b_2 + a_2b_1)]\lambda + [4a_1b_1 - (ab)_1^2] = 0 \quad (1234)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \rightarrow q_{cr}H = \lambda \frac{K_{b2}}{H^2} \quad (1235)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga SWB. Para la mayoría de los casos prácticos la carga crítica resultante es lo suficientemente exacta; con el objetivo de obtener una mejor aproximación a la carga crítica exacta es necesario repetir el procedimiento anterior con dos nuevos polinomios de mayor grado.

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5 \quad (1236)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos cuatro veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga SWB:

$$\theta_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint \theta_{(z)} dz - \lambda \iiint \alpha_{(z)} \theta''_{(z)} dz + \lambda \alpha^2 (\kappa^2 - 1) \iiint \alpha_{(z)} \theta_{(z)} dz + C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1237)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$\theta_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint \theta_{(z)} dz - \lambda \iiint z \theta''_{(z)} dz + \lambda \alpha^2 (\kappa^2 - 1) \iiint z \theta_{(z)} dz + C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1238)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio a utilizar en la segunda iteración.

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 = A\phi_1^1 + B\phi_2^2 \quad (1239)$$

Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado. Numéricamente se observa que con una cuarta iteración la aproximación puede considerarse exacta.

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1240)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\theta_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 \theta_{(z)}'' + \frac{\lambda}{H} [\theta_{(z)}'' - \alpha^2 (\kappa^2 - 1) \theta_{(z)}] = 0 \quad (1241)$$

La expresión de $\theta_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$\theta_{(z)} = C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1242)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{-\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right]^2 + 4\frac{\lambda}{H}\alpha^2(\kappa^2 - 1)}}{2} \\ \beta = \frac{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right]^2 + 4\frac{\lambda}{H}\alpha^2(\kappa^2 - 1)}}{2} \end{array} \right\} \quad (1243)$$

Tabla.7 *Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.0000 \leq \kappa \leq 1.0010$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.*

$\alpha \backslash \kappa$	1.0000	1.0001	1.0002	1.0003	1.0004	1.0005	1.00075	1.001
0.00	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837
0.25	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025
0.50	8.583	8.583	8.583	8.583	8.583	8.583	8.583	8.583
0.75	9.504	9.504	9.504	9.504	9.504	9.504	9.503	9.503
1.0	10.772	10.772	10.771	10.771	10.771	10.771	10.770	10.770
2.5	24.377	24.370	24.363	24.356	24.349	24.342	24.325	24.308
5.0	60.763	60.706	60.649	60.593	60.536	60.480	60.339	60.199
7.5	110.356	110.184	110.011	109.839	109.667	109.494	109.063	108.633
10	180.103	179.710	179.315	178.918	178.517	178.114	177.096	175.908
15	375.170	372.847	370.536	368.238	365.954	363.682	358.062	352.530
20	645.789	638.861	631.998	625.201	618.474	611.818	595.498	579.650
25	993.453	977.024	960.837	944.903	929.231	913.829	876.547	841.067
30	1418.270	1384.802	1352.054	1320.066	1288.872	1258.498	1186.249	1119.331
35	1920.277	1859.052	1799.654	1742.207	1686.797	1633.482	1509.471	1398.434
40	2499.489	2396.104	2296.840	2202.001	2111.775	2026.232	1832.554	1665.809
45	3155.914	2991.815	2836.189	2689.694	2552.612	2424.909	2144.534	1913.202
50	3889.557	3641.615	3409.868	3195.521	2998.794	2819.166	2437.723	2136.428
60	5588.502	5083.452	4628.145	4224.991	3871.677	3563.355	2952.339	2508.135
70	7596.334	6678.947	5889.347	5226.932	4676.364	4218.316	3367.608	2791.331
80	9913.056	8382.991	7138.713	6157.556	5385.894	4772.494	3695.166	3005.458
90	12538.671	10150.636	8333.911	6993.577	5994.334	5231.631	3952.173	3168.370
100	15473.180	11939.666	9446.823	7728.042	6508.082	5608.691	4154.620	3293.825
110	18716.583	13712.812	10462.460	8364.508	6938.873	5917.955	4315.436	3391.129
120	22268.880	15439.279	11376.149	8911.991	7299.585	6172.402	4444.229	3468.208
130	26130.072	17095.467	12190.267	9381.527	7602.212	6382.901	4548.098	3530.191
140	30300.158	18664.880	12911.369	9784.197	7857.111	6558.206	4633.366	3580.663
150	34779.140	20137.434	13548.049	10130.167	8072.896	6704.513	4704.066	3622.238
160	39567.016	21508.394	14109.526	10428.331	8256.589	6827.771	4763.239	3656.847
170	44663.788	22777.179	14604.806	10686.262	8412.684	6932.745	4813.197	3685.935
180	50069.455	23946.227	15042.236	10910.313	8547.089	7022.746	4855.716	3710.600
190	55784.017	25020.007	15429.316	11105.138	8663.585	7100.401	4892.174	3731.681
200	61807.473	26004.228	15772.654	11274.990	8765.098	7167.805	4923.651	3749.832
220	74781.073	27729.609	16350.315	11556.851	8932.253	7278.266	4974.902	3779.289
240	88990.253	29174.101	16810.104	11778.956	9062.854	7364.123	5014.457	3801.942
260	104435.013	30385.836	17181.134	11956.612	9166.629	7432.069	5045.589	3819.722
280	121115.354	31406.366	17485.079	12100.663	9250.332	7486.698	5070.512	3833.924
300	139031.276	32270.223	17736.669	12218.916	9318.754	7531.238	5090.761	3845.444

Tabla.8 Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.0020 \leq \kappa \leq 1.0090$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

$\alpha \backslash \kappa$	1.0020	1.0030	1.0040	1.0050	1.0060	1.0070	1.00800	1.009
0.00	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837
0.25	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025	8.025
0.50	8.583	8.583	8.583	8.582	8.582	8.582	8.582	8.582
0.75	9.502	9.502	9.501	9.500	9.499	9.499	9.498	9.497
1.0	10.767	10.765	10.763	10.760	10.758	10.756	10.754	10.751
2.5	24.239	24.171	24.104	24.037	23.970	23.904	23.839	23.773
5.0	59.642	59.091	58.547	58.010	57.479	56.956	56.439	55.929
7.5	106.912	105.199	103.498	101.813	100.149	98.507	96.892	95.305
10	170.792	167.394	161.063	156.460	152.035	147.786	143.712	139.808
15	331.323	311.656	293.595	276.961	261.805	247.974	235.353	223.826
20	521.202	470.650	427.370	390.397	358.728	331.463	307.840	287.234
25	717.227	619.617	542.848	481.808	432.524	392.098	358.441	330.039
30	901.314	746.529	634.334	550.391	485.639	434.348	392.799	358.499
35	1063.505	849.154	704.230	600.774	523.570	463.886	416.406	377.738
40	1200.903	930.252	757.193	637.918	551.001	484.852	432.951	391.162
45	1314.864	993.976	797.555	665.649	571.079	500.132	444.966	400.854
50	1408.542	1408.542	828.665	686.591	586.216	511.576	453.917	408.044
60	1548.741	1116.161	871.951	715.593	606.981	527.166	466.047	417.747
70	1644.792	1163.229	899.916	734.088	620.107	536.959	473.629	423.790
80	1711.917	1195.568	918.873	746.521	628.882	543.479	478.663	427.792
90	1760.522	1218.605	932.253	755.249	635.018	548.026	482.166	430.572
100	1796.693	1235.532	942.021	761.595	639.468	551.318	484.698	432.580
110	1824.243	1248.305	949.357	766.348	642.794	553.774	486.586	434.076
120	1845.659	1258.165	954.999	769.995	645.343	555.655	488.030	435.219
130	1862.610	1265.925	959.429	772.853	647.339	557.126	489.159	436.113
140	1876.240	1272.139	962.967	775.134	648.929	558.298	490.058	436.824
150	1887.353	1277.188	965.837	776.981	650.217	559.246	490.785	437.399
160	1896.528	1281.344	968.196	778.499	651.274	560.024	491.381	437.870
170	1904.186	1284.805	970.158	779.760	652.152	560.671	491.877	438.262
180	1910.643	1287.717	971.808	780.820	652.890	561.213	492.292	438.590
190	1916.134	1290.190	973.207	781.719	653.515	561.673	492.645	438.869
200	1920.843	1292.308	974.405	782.487	654.049	562.066	492.946	439.107
220	1928.446	1295.721	976.334	783.724	654.910	562.698	493.430	439.489
240	1934.261	1298.327	977.805	784.668	655.565	563.180	493.799	439.781
260	1938.807	1300.361	978.952	785.403	656.076	563.556	494.086	440.008
280	1942.425	1301.978	979.864	785.987	656.482	563.854	494.314	440.188
300	1945.352	1303.286	980.601	786.459	656.810	564.094	494.499	440.333

Tabla.9 Eigenvalor en función del parámetro $\alpha \leq 300$ y $1.01 \leq \kappa \leq 1.25$ para el caso de una carga axial uniformemente distribuida.

$\alpha \backslash \kappa$	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25
0.00	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837	7.837
0.25	8.025	8.024	8.024	8.024	8.024	8.024	8.023	8.023	8.022
0.50	8.582	8.580	8.579	8.577	8.576	8.568	8.560	8.552	8.544
0.75	9.497	9.489	9.482	9.474	9.467	9.429	9.392	9.355	9.318
1.0	10.749	10.726	10.704	10.681	10.659	10.549	10.443	10.341	10.243
2.5	23.709	23.085	22.501	21.954	21.440	19.286	17.652	16.376	15.355
5.0	55.426	50.781	46.791	43.371	40.431	30.522	24.975	21.473	19.074
7.5	93.748	79.980	69.294	61.107	54.687	36.520	28.176	23.426	20.371
10	136.070	106.509	87.118	73.751	64.051	39.667	29.696	24.303	20.933
15	213.283	144.020	108.748	87.647	73.698	42.469	30.974	25.016	21.380
20	269.138	164.906	119.357	94.042	77.952	43.591	31.467	25.286	21.547
25	305.781	176.628	125.025	97.355	80.115	44.139	31.704	25.415	21.627
30	329.726	183.686	128.336	99.260	81.347	44.444	31.835	25.486	21.671
35	345.695	188.203	130.417	100.447	82.109	44.631	31.916	25.530	21.697
40	356.801	191.246	131.803	101.232	82.612	44.754	31.968	25.558	21.715
45	364.781	193.385	132.770	101.778	82.961	44.838	32.004	25.577	21.726
50	370.682	194.942	133.471	102.173	83.213	44.899	32.030	25.591	21.735
60	378.619	197.004	134.393	102.691	83.543	44.979	32.064	25.609	21.746
70	383.546	198.267	134.956	103.006	83.743	45.027	32.084	25.620	21.753
80	386.803	199.095	135.323	103.212	83.874	45.058	32.097	25.628	21.757
90	389.063	199.666	135.576	103.353	83.964	45.079	32.107	25.632	21.760
100	390.694	200.076	135.758	103.454	84.028	45.095	32.113	25.636	21.762
110	391.908	200.381	135.892	103.530	84.076	45.106	32.118	25.639	21.764
120	392.835	200.613	135.995	103.587	84.112	45.115	32.122	25.641	21.765
130	393.560	200.794	136.075	103.631	84.141	45.122	32.124	25.642	21.766
140	394.136	200.938	136.138	103.667	84.163	45.127	32.127	25.643	21.767
150	394.602	201.054	136.190	103.695	84.181	45.131	32.129	25.644	21.768
160	394.984	201.149	136.232	103.719	84.196	45.135	32.130	25.645	21.768
170	395.302	201.228	136.266	103.738	84.208	45.138	32.131	25.646	21.768
180	395.568	201.294	136.295	103.754	84.219	45.140	32.132	25.646	21.769
190	395.793	201.350	136.320	103.768	84.227	45.142	32.133	25.647	21.769
200	395.986	201.398	136.341	103.780	84.235	45.144	32.134	25.647	21.769
220	396.296	201.475	136.375	103.799	84.247	45.147	32.135	25.648	21.770
240	396.532	201.533	136.401	103.813	84.256	45.149	32.136	25.648	21.770
260	396.715	201.579	136.421	103.824	84.263	45.151	32.137	25.649	21.770
280	396.861	201.615	136.437	103.833	84.269	45.152	32.137	25.649	21.770
300	396.979	201.644	136.450	103.840	84.273	45.153	32.138	25.649	21.771

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\xi} & \sinh \sqrt{\xi} & \cos \sqrt{\beta} & \sin \sqrt{\beta} \\ 0 & \xi^{1/2} & 0 & \beta^{1/2} \\ \xi \cosh \sqrt{\xi} & \xi \sinh \sqrt{\xi} & -\beta \cos \sqrt{\beta} & -\beta \sin \sqrt{\beta} \\ 0 & \xi^{3/2} & 0 & -\beta^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1244)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos \sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1245)$$

Es decir:

$$\frac{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2 \right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2 \right]^2 + 4 \frac{\lambda}{H} \alpha^2 (\kappa^2 - 1)}}{2} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1246)$$

Después de algunas manipulaciones simples:

$$\frac{\lambda}{H} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{\frac{4(\kappa^2 - 1)}{(2n - 1)^2 \pi^2} + \frac{1}{\alpha^2}} \quad (1247)$$

Reemplazando por sus rigideces características:

$$q_{cr} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}}} \quad (1248)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s1}^{-1} \right\}^{-1} \quad (1249)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} = q_{cr, flexi3n local} + [q_{cr, flexi3n global}^{-1} + q_{cr, corte}^{-1}]^{-1} \quad (1250)$$

Dado que la carga cr3tica resultante es independiente de alguna funci3n de aproximaci3n, puede considerarse exacta e id3ntica a la que se obtendr3a aplicando el teorema de F3ppl.

4.3.6.2 Caso 2

- C3lculo de la matriz de transferencia

Seg3n las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s1}[\theta(x) - u'(x)] - K_{b1}\theta''(x) = 0 \\ K_{b2}u'''(x) + (q - K_{s1})u'(x) + K_{s1}\theta(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (1251)$$

Utilizando el m3todo de operador diferencial:

$$\left[\begin{array}{cc} -K_{s1}D & -K_{b1}D^2 + K_{s1} \\ K_{b2}D^3 - (K_{s1} - q)D & K_{s1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1252)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D \left\{ D^4 - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{q}{K_{b2}} \right] D^2 - \left(\frac{K_{s1}q}{K_{b1}K_{b2}} \right) \right\} = 0 \quad (1253)$$

Reescribiendo:

$$D \{ D^4 - [(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] D^2 - [\alpha^{*2}(\kappa^2 - 1)\lambda] \} = 0 \quad (1254)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{q}{K_{b2}} \right\} \quad (1255)$$

La expresi3n para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ \theta_{(z)} = C_6 + C_7 z + C_8 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_9 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_{10} \cos(\sqrt{\beta} z) + C_{11} \sin(\sqrt{\beta} z) \end{cases} \quad (1256)$$

Donde:

$$\begin{cases} \xi = \frac{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] + \sqrt{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda]^2 + 4\alpha^{*2}(\kappa^2 - 1)\lambda}}{2} \\ \beta = \frac{-[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] + \sqrt{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda]^2 + 4\alpha^{*2}(\kappa^2 - 1)\lambda}}{2} \end{cases} \quad (1257)$$

Expresando los coeficientes de $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ \theta_{(z)} = C_1 + C_2 [R_\xi \sinh(\sqrt{\xi} z)] + C_3 [R_\xi \cosh(\sqrt{\xi} z)] + C_4 [-R_\beta \sin(\sqrt{\beta} z)] + C_5 [R_\beta \cos(\sqrt{\beta} z)] \end{cases} \quad (1258)$$

Donde:

$$\begin{cases} \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{1 + \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{q}{K_{b2}} \\ R_\xi = \frac{K_{s1} \sqrt{\xi}}{K_{s1} - \xi K_{b1}}, R_\beta = \frac{K_{s1} \sqrt{\beta}}{K_{s1} - \beta K_{b1}} \end{cases} \quad (1259)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} M_{1(z)} = K_{b1} \theta'_{(z)} &= C_2 [K_{b1} R_\xi \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi} z)] + C_3 [K_{b1} R_\xi \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi} z)] \\ &+ C_4 [-K_{b1} R_\beta \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta} z)] + C_5 [-K_{b1} R_\beta \sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta} z)] \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} M_{r(z)} = K_{b2} u''_{(x)} &= C_2 [K_{b2} \xi \cosh(\sqrt{\xi} z)] + C_3 [K_{b2} \xi \sinh(\sqrt{\xi} z)] \\ &+ C_4 [-K_{b2} \beta \cos(\sqrt{\beta} z)] + C_5 [-K_{b2} \beta \sin(\sqrt{\beta} z)] \end{aligned} \right\} \\ \left\{ \begin{aligned} V_{(z)} = K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] + K_{b2} u'''_{(x)} + q u'_{(x)} &= q C_1 + C_2 [P_\xi \sinh(\sqrt{\xi} z)] \\ &+ C_3 [P_\xi \cosh(\sqrt{\xi} z)] + C_4 [P_\beta \sin(\sqrt{\beta} z)] + C_5 [-P_\beta \cos(\sqrt{\beta} z)] \end{aligned} \right\} \end{cases} \quad (1260)$$

Donde:

$$\begin{cases} P_\xi = \left(\frac{K_{b1}K_{s1}}{K_{s1} - \xi K_{b1}} + K_{b2} \right) \xi \sqrt{\xi} \\ P_\beta = \left(-\frac{K_{b1}K_{s1}}{K_{s1} - \beta K_{b1}} + K_{b2} \right) \beta \sqrt{\beta} \end{cases} \quad (1261)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{l,i}(z_i) \\ M_{r,i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} \quad (1262)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & \cosh(\sqrt{\xi}z) & \sinh(\sqrt{\xi}z) & \cos(\sqrt{\beta}z) & \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) & \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & R_\xi \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_\xi \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_\beta \sin(\sqrt{\beta}z) & R_\beta \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & K_{b1}R_\xi \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & K_{b1}R_\xi \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -K_{b1}R_\beta \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) & -K_{b1}R_\beta \sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & K_{b2}\xi \cosh(\sqrt{\xi}z) & K_{b2}\xi \sinh(\sqrt{\xi}z) & -K_{b2}\beta \cos(\sqrt{\beta}z) & -K_{b2}\beta \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & q & (P_\xi + q\sqrt{\xi}) \sinh(\sqrt{\xi}z) & (P_\xi + q\sqrt{\xi}) \cosh(\sqrt{\xi}z) & (P_\beta - q\sqrt{\beta}) \sin(\sqrt{\beta}z) & -(P_\beta - q\sqrt{\beta}) \cos(\sqrt{\beta}z) \end{bmatrix}_i \quad (1263)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{l,n}(0) \\ M_{r,n}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l,1}(h_1) \\ M_{r,1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} = \mathbf{t} \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{l,1}(h_1) \\ M_{r,1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (1264)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1265)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{s1}[\theta_{(0)} - u'_{(0)}] + K_{b2}u'''_{(0)} + qu'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{l,n}(0) = 0 \\ M_{r,n}(0) = 0 \\ V_{n(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1266)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{1,1}(h_1) \\ M_{r,1}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1267)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ M_2(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1268)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.7 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB1)

4.3.7.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GSB1 de tres campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'^2 + K_{s1} [u'_{(x)} - \psi_{(x)}]^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (1269)$$

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{w,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^w rEI_{w,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_w^{-1})^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_{b,i} [(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3} h \left(1 + 12 \frac{kEI_{b,i}}{l^{*2} GA_{b,i}} \right)}, K_w = \sum_{i=1}^w \frac{\pi^2 EI_w}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (1270)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_{s2} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i}, K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_b}{lh}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{\pi^2 EI_c}{h^2}, r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (1271)$$

- Dual (Pórtico + muro de corte):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i} + \sum_{i=1}^w rEI_{w,i}, K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_{s2} = \sum_{i=1}^w GA_{w,i}; K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_b}{lh}; K_c = \sum_{i=1}^c \frac{\pi^2 EI_c}{h^2}; r = \frac{K_c}{K_c + K_b} \end{array} \right\} \quad (1272)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f(x)dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1273)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'(x)^2 + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \end{aligned} \quad (1274)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'(x) \delta \psi'(x) + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)] [\delta u'(x) - \delta \psi(x)] + K_{b2} \theta'(x) \delta \theta'(x) \right. \\ & \left. + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)] [\delta u'(x) - \delta \theta(x)] - f(x) u'(x) \delta u'(x) \right\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (1275)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & [K_{b1} \psi'(x) \delta \psi(x)]_0^H + \{ [K_{s1} + K_{s2} - f(x)] u'(x) - K_{s1} \psi(x) - K_{s2} \theta(x) \} \delta u(x)_0^H \\ & + [K_{b2} \theta'(x) \delta \theta(x)]_0^H - \int_0^H \{ K_{b1} \psi''(x) + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)] \} \delta \psi(x) \\ & - \int_0^H \{ [K_{s1} + K_{s2} - f(x)] u''(x) - K_{s1} \psi'(x) - K_{s2} \theta'(x) - f'(x) u'(x) \} \delta u(x) \\ & - \int_0^H \{ K_{b2} \theta''(x) + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)] \} \delta \theta(x) - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (1276)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} \psi''(x) + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)] = 0 \\ K_{b2} \theta''(x) + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)] = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f(x)] u''(x) - K_{s1} \psi'(x) - K_{s2} \theta'(x) - f'(x) u'(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (1277)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'(0) = 0 \\ \psi'(0) = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f(0)] u'(0) - K_{s1} \psi(0) - K_{s2} \theta(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1278)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x=0$:

$$[K_{s1} + K_{s2} - f(x)]u'(x) - K_{s1}\psi(x) - K_{s2}\theta(x) = 0 \quad (1279)$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(0)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f(x)]u'(x) - K_{s1}\psi(x) - K_{s2}\theta(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (1280)$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{s1}D & 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{b2}D^2 - K_{s2} & 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f(x)]D & -K_{s2} & -K_{s1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ \theta(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero:

$$\begin{aligned} u''''(x) - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right] u'''(x) \\ + f(x) \left\{ - \left(\frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} \right) u''''(x) + \left[\frac{K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right] u'''(x) \right. \\ \left. - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} \right] u'(x) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1281)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z=x/H$:

$$\begin{aligned} u''''(z) - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 \right] u'''(z) \\ + f(z) \left\{ - \left(\frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} \right) u''''(z) + \left[\frac{K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 \right] u'''(z) \right. \\ \left. - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^4 \right] u'(z) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1282)$$

Donde:

$$f(z) = q\alpha(z) \quad (1283)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u_{(z)}'''' - a_0 u_{(z)}''' + q \alpha_{(z)} [-a_1 u_{(z)}'''' + a_2 u_{(z)}''' - a_3 u_{(z)}'] = 0 \quad (1284)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{K_{s1} K_{s2} (K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1} K_{b2} (K_{s1} + K_{s2})} H^2, a_1 = \frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} \\ a_2 = \frac{K_{b1} K_{s2} + K_{s1} K_{b2}}{K_{b1} K_{b2} (K_{s1} + K_{s2})} H^2, a_3 = \frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b1} K_{b2} (K_{s1} + K_{s2})} H^4 \end{array} \right\} \quad (1285)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(1)} = 0 \\ u''''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1286)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^5}{dz^5} - a_0 \frac{d^3}{dz^3} \right] u_{(z)} - q \left[\alpha_{(z)} \left(a_1 \frac{d^5}{dz^5} - a_2 \frac{d^3}{dz^3} + a_3 \frac{d}{dz} \right) \right] u_{(z)} = 0 \quad (1287)$$

Multiplicando la ecuación por $\left(a_1 \frac{d^5 u}{dz^5} - a_2 \frac{d^3 u}{dz^3} + a_3 \frac{du}{dz} \right)$, integrando de 0 a 1 y despejando:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{ a_1 u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_1 + a_2) u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_2 + a_3) u''''^2_{(z)} + a_0 a_3 u''^2_{(z)} \} dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [a_1 u''''''_{(z)} - a_2 u'''_{(z)} + a_3 u'_{(z)}]^2 dz} \quad (1288)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $u_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1289)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{a_1 u''''(z)^2 + (a_0 a_1 + a_2) u''''(z)^2 + (a_0 a_2 + a_3) u''''(z)^2 + a_0 a_3 u''(z)^2\} dz}{\int_0^1 z [a_1 u''''(z) - a_2 u''(z) + a_3 u'(z)]^2 dz} \quad (1290)$$

• **Carga puntual en x=0 (z=0)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en x=0 (z=0), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1291)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u''''(z) - a_0 u''(z) + q[-a_1 u''''(z) + a_2 u''(z) - a_3 u'(z)] = 0 \quad (1292)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1293)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \\ \beta = \frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \end{array} \right\} \quad (1294)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cosh(\sqrt{\xi}) & \sinh(\sqrt{\xi}) & \cos(\sqrt{\beta}) & \sin(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^{1/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{1/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & -\beta^{1/2} \sin(\sqrt{\beta}) & \beta^{1/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \xi^{3/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{3/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & \beta^{3/2} \sin(\sqrt{\beta}) & -\beta^{3/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^2 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1295)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos\sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1296)$$

Es decir:

$$\frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1297)$$

Resolviendo:

$$q_{cr} = \frac{\frac{(2n - 1)^4 \pi^4}{4} + a_0(2n - 1)^2 \pi^2}{4a_0 + a_2(2n - 1)^2 \pi^2 + a_1 \frac{(2n - 1)^4 \pi^4}{4}} \quad (1298)$$

Reemplazando los coeficientes y después de algunas manipulaciones simples:

$$q_{cr} = \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}}} + \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b2}} + \frac{1}{K_{s2}}} \quad (1299)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s1}^{-1} \right\}^{-1} + \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s2}^{-1} \right\}^{-1} \quad (1300)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} + \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} \quad (1301)$$

Es decir;

$$q_{cr} = [q_{cr,flexi\grave{o}n\ global}^{-1} + q_{cr,corte\ global}^{-1}]^{-1} + [q_{cr,flexi\grave{o}n\ local}^{-1} + q_{cr,corte\ local}^{-1}]^{-1} \quad (1302)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.7.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1}\psi''_{(x)} + K_{s1}[u'_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2}\theta''_{(x)} + K_{s2}[u'_{(x)} - \theta_{(x)}] = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u''_{(x)} - K_{s1}\psi'_{(x)} - K_{s2}\theta'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1303)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\left[\begin{array}{ccc} K_{s1}D & 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{b2}D^2 - K_{s2} & 0 \\ (K_{s1} + K_{s2} - q)D^2 & -K_{s2}D & -K_{s1}D \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \\ \psi_{(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1304)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D^2 \left\{ D^4 - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2}) - q(K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \right] D^2 - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \right] \right\} = 0 \quad (1305)$$

Reescribiendo:

$$D^2(D^4 - r_1D^2 - r_2) = 0 \quad (1306)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2}) - q(K_{b1}K_{s2} + K_{s1}K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \\ r_2 = \frac{K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \end{array} \right\} \quad (1307)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \\ \psi_{(z)} = C_5 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_6 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_7 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_8 \sin(\sqrt{\beta}z) \\ \theta_{(z)} = C_9 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_{10} \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_{11} \cos(\sqrt{\beta}z) + C_{12} \sin(\sqrt{\beta}z) \end{array} \right\} \quad (1308)$$

Donde:

$$\begin{cases} \xi = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \\ \beta = \frac{-r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \end{cases} \quad (1309)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \\ \psi_{(z)} = [R_{\psi 1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_1 + [R_{\psi 1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 - [R_{\psi 2} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_3 + [R_{\psi 2} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 \\ \theta_{(z)} = [R_{\theta 1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_1 + [R_{\theta 1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 - [R_{\theta 2} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_3 + [R_{\theta 2} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 \end{cases} \quad (1310)$$

Donde:

$$\left\{ R_{\psi 1} = \frac{K_{s1}\sqrt{\xi}}{K_{s1} - \xi K_{b1}}, R_{\psi 2} = \frac{K_{s1}\sqrt{\xi}}{K_{s1} - \beta K_{b1}}, R_{\theta 1} = \frac{K_{s2}\sqrt{\beta}}{K_{s2} - \beta K_{b2}}, R_{\theta 2} = \frac{K_{s2}\sqrt{\beta}}{K_{s2} - \beta K_{b2}} \right\} \quad (1311)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ M_{1(z)} = K_{b1}\psi'_{(x)} = [R_{\psi 1}\sqrt{\xi}K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_1 + [R_{\psi 1}\sqrt{\xi}K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_2 \right. \\ \left. - [R_{\psi 2}\sqrt{\beta}K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_3 - [R_{\psi 2}\sqrt{\beta}K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_4 \right\} \\ \left\{ M_{2(z)} = K_{b2}\theta'_{(x)} = [R_{\theta 1}\sqrt{\xi}K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_1 + [R_{\theta 1}\sqrt{\xi}K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_2 \right. \\ \left. - [R_{\theta 2}\sqrt{\beta}K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_3 - [R_{\theta 2}\sqrt{\beta}K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_4 \right\} \\ \left\{ V_{(z)} = (K_{s1} + K_{s2} - q)u'_{(x)} - K_{s1}\psi_{(x)} - K_{s2}\theta_{(x)} = R_1 \sinh(\sqrt{\xi}z)C_1 + R_1 \cosh(\sqrt{\xi}z)C_2 \right. \\ \left. - R_2 \sin(\sqrt{\beta}z)C_3 + R_2 \cos(\sqrt{\beta}z)C_4 \right\} \end{array} \right\} \quad (1312)$$

Donde:

$$\begin{cases} R_1 = (K_{s1} + K_{s2} - q)\sqrt{\xi} - K_{s1}R_{\psi 1} - K_{s2}R_{\theta 1} \\ R_2 = (K_{s1} + K_{s2} - q)\sqrt{\beta} - K_{s1}R_{\psi 2} - K_{s2}R_{\theta 2} \end{cases} \quad (1313)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_i(z_i) \\ \psi_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{1i}(z_i) \\ M_{2i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{pmatrix} = K_i(z_i) \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} \quad (1314)$$

Donde:

$K_i(z_i)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z & \cosh(\sqrt{\xi}z) & \sinh(\sqrt{\xi}z) & \cos(\sqrt{\beta}z) & \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & R_{\psi_1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_{\psi_1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_{\psi_2} \sin(\sqrt{\beta}z) & R_{\psi_2} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & R_{\theta_1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_{\theta_1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_{\theta_2} \sin(\sqrt{\beta}z) & R_{\theta_2} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & R_{\psi_1} \sqrt{\xi} K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & R_{\psi_1} \sqrt{\xi} K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -R_{\psi_2} \sqrt{\beta} K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) & -R_{\psi_2} \sqrt{\beta} K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} \sqrt{\xi} K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & R_{\theta_1} \sqrt{\xi} K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -R_{\theta_2} \sqrt{\beta} K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) & -R_{\theta_2} \sqrt{\beta} K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & -q & R_1 \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_2 \sin(\sqrt{\beta}z) & R_2 \cos(\sqrt{\beta}z) \end{bmatrix} \quad (1315)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (1316)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1317)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2} - q)u'_{(0)} - K_{s1}\psi_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{1n(0)} = 0 \\ M_{2n(0)} = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1318)$$

Reemplazando:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ \psi_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1319)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} M_1(h_1) \\ M_2(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1320)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.8 Viga sándwich generalizada de tres campos (GSB2)

4.3.8.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GSB2 de tres campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'(x)^2 + K_{s1} [\theta(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \psi'(x)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s2} [\psi(x) - u'(x)]^2 dx \quad (1321)$$

- Muro de corte acoplado:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^w EA_{wi} c_i^2, K_{b2} = r \sum_{i=1}^w EI_{wi} \\ K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^w \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{\pi^2 EI_w} + \frac{1}{GA'_w} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (1322)$$

- Pórtico:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c r EI_{c,i} \\ K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1}, K_{s2} = \sum_{i=1}^c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{\pi^2 EI_c} + \frac{1}{GA'_c} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (1323)$$

- Dual (Pórtico + muro de corte):

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b1} = \sum_{i=1}^c EA_{c,i} c_i^2, K_{b2} = \sum_{i=1}^c r EI_{c,i} + \sum_{i=1}^w r EI_{w,i}, K_{s1} = \sum_{i=1}^b \left[\frac{h}{L} \left(\frac{L^2}{12EI_b} + \frac{1}{GA'_b} \right) \right]^{-1} \\ K_{s2} = \sum_{i=1}^c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{\pi^2 EI_c} + \frac{1}{GA'_c} \right) \right]^{-1} + \sum_{i=1}^w \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{\pi^2 EI_w} + \frac{1}{GA'_w} \right) \right]^{-1} \end{array} \right\} \quad (1324)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f(x) dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1325)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - \psi_{(x)}]^2 + K_{b2} \psi'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [\psi_{(x)} - u'_{(x)}]^2 \right\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'_{(x)}{}^2 dx \end{aligned} \quad (1326)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} + K_{s1} [\theta_{(x)} - \psi_{(x)}] [\delta \theta_{(x)} - \delta \psi_{(x)}] + K_{b2} \psi'_{(x)} \delta \psi'_{(x)} \right. \\ & \left. + K_{s2} [\psi_{(x)} - u'_{(x)}] [\delta \psi_{(x)} - \delta u'_{(x)}] - f_{(x)} u'_{(x)} \delta u'_{(x)} \right\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1327)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \{ [K_{s2} - f(x)] u'_{(x)} - K_{s2} \psi_{(x)} \} \delta u_{(x)} \Big|_0^H + [K_{b1} \theta'_{(x)} \delta \theta_{(x)}] \Big|_0^H + [K_{b2} \psi'_{(x)} \delta \psi_{(x)}] \Big|_0^H \\ & - \int_0^H \{ [K_{s2} - f(x)] u''_{(x)} - K_{s2} \psi'_{(x)} - f'_{(x)} u'_{(x)} \} \delta u_{(x)} \\ & - \int_0^H \{ K_{b1} \theta''_{(x)} - K_{s1} [\theta_{(x)} - \psi_{(x)}] \} \delta \theta_{(x)} \\ & - \int_0^H [K_{b2} \psi''_{(x)} - (K_{s1} + K_{s2}) \psi_{(x)} + K_{s1} \theta_{(x)} + K_{s2} u'_{(x)}] \delta \psi_{(x)} \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1328)$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{s2} - f(x)] u''_{(x)} - K_{s2} \psi'_{(x)} - f'_{(x)} u'_{(x)} = 0 \\ K_{b1} \theta''_{(x)} - K_{s1} [\theta_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2} \psi''_{(x)} - (K_{s1} + K_{s2}) \psi_{(x)} + K_{s1} \theta_{(x)} + K_{s2} u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1329)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{s2} - f(0)]u'_{(0)} - K_{s2}\psi_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1330)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x=0$:

$$[K_{s2} - f(x)]u'_{(x)} - K_{s2}\psi_{(x)} = 0 \quad (1331)$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{s2} - f(x)]u'_{(x)} - K_{s2}\psi_{(x)} = 0 \\ K_{b1}\theta''_{(x)} - K_{s1}[\theta_{(x)} - \psi_{(x)}] = 0 \\ K_{b2}\psi''_{(x)} - (K_{s1} + K_{s2})\psi_{(x)} + K_{s1}\theta_{(x)} + K_{s2}u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1332)$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} [K_{s2} - f(x)]D & 0 & -K_{s2} \\ 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} & K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{s1} & K_{b2}D^2 - (K_{s1} + K_{s2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \\ \psi_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1333)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero:

$$u_{(x)}'''' - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} \right] u_{(x)}''' + f(x) \left\{ -\frac{1}{K_{s2}} u_{(x)}'''' + \left(\frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \right) u_{(x)}''' - \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} u'_{(x)} \right\} = 0 \quad (1334)$$

O su equivalente:

$$\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}} u_{(x)}'''' - (K_{b1} + K_{b2})u_{(x)}''' + f(x) \left\{ -\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}K_{s2}} u_{(x)}'''' + \left[\frac{K_{b2}}{K_{s2}} + K_{b1} \left(\frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{s2}} \right) \right] u_{(x)}''' - u'_{(x)} \right\} = 0 \quad (1335)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z=x/H$:

$$u_{(z)}'''' - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} H^2 \right] u_{(z)}''' + f(z) \left\{ -\frac{1}{K_{s2}} u_{(z)}'''' + \left[\left(\frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}} \right) H^2 \right] u_{(z)}''' - \left(\frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}} H^4 \right) u'_{(z)} \right\} = 0$$

(1336)

Donde:

$$f_{(z)} = q\alpha_{(z)} \quad (1337)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u_{(z)}'''' - a_0 u_{(z)}''' + q\alpha_{(z)}[-a_1 u_{(z)}'''' + a_2 u_{(z)}''' - a_3 u_{(z)}'] = 0 \quad (1338)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}}H^2, a_1 = \frac{1}{K_{s2}}$$

$$a_2 = \frac{K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1}}{K_{b1}K_{b2}K_{s2}}H^2, a_3 = \frac{K_{s1}}{K_{b1}K_{b2}}H^4 \quad (1339)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(1)} = 0 \\ u''''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1340)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^5}{dz^5} - a_0 \frac{d^3}{dz^3} \right] u_{(z)} - q \left[\alpha_{(z)} \left(a_1 \frac{d^5}{dz^5} - a_2 \frac{d^3}{dz^3} + a_3 \frac{d}{dz} \right) \right] u_{(z)} = 0 \quad (1341)$$

Multiplicando la ecuación por $\left(a_1 \frac{d^5}{dz^5} - a_2 \frac{d^3}{dz^3} + a_3 \frac{d}{dz} \right)$, integrando de 0 a 1 y despejando:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{ a_1 u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_1 + a_2) u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_2 + a_3) u''''^2_{(z)} + a_0 a_3 u''^2_{(z)} \} dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [a_1 u'''''' - a_2 u''' + a_3 u']^2 dz} \quad (1342)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $u_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1343)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{a_1 u''''''_{(z)} + (a_0 a_1 + a_2) u''''''_{(z)} + (a_0 a_2 + a_3) u''''''_{(z)} + a_0 a_3 u''''_{(z)}\} dz}{\int_0^1 z [a_1 u''''''_{(z)} - a_2 u''''_{(z)} + a_3 u'_{(z)}]^2 dz} \quad (1344)$$

- **Carga puntual en x=0 (z=0)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en x=0 (z=0), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1345)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u''''''_{(z)} - a_0 u''''_{(z)} + q[-a_1 u''''''_{(z)} + a_2 u''''_{(z)} - a_3 u'_{(z)}] = 0 \quad (1346)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1347)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \\ \beta = \frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \end{array} \right\} \quad (1348)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cosh(\sqrt{\xi}) & \sinh(\sqrt{\xi}) & \cos(\sqrt{\beta}) & \sin(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^{1/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{1/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & -\beta^{1/2} \sin(\sqrt{\beta}) & \beta^{1/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \xi^{3/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{3/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & \beta^{3/2} \sin(\sqrt{\beta}) & -\beta^{3/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^2 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1349)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos\sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1)\frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1350)$$

Es decir:

$$\frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1351)$$

Resolviendo:

$$q_{cr} = \frac{\frac{(2n - 1)^4 \pi^4}{4} + a_0(2n - 1)^2 \pi^2}{4a_0 + a_2(2n - 1)^2 \pi^2 + a_1 \frac{(2n - 1)^4 \pi^4}{4}} \quad (1352)$$

Reemplazando los coeficientes y después de algunas manipulaciones simples:

$$q_{cr} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\frac{1}{4H^2} + \frac{1}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}}} + (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right]^{-1} + \frac{1}{K_{s2}}} \quad (1353)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = \left\{ \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s1}^{-1} \right\}^{-1} + (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right\}^{-1} + K_{s2}^{-1} \quad (1354)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \left\{ \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} + \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right\}^{-1} + K_{s2}^{-1} \quad (1355)$$

Es decir;

$$q_{cr} = \left\{ \left[(q_{cr,flexión\ global}^{-1} + q_{cr,corte\ global}^{-1})^{-1} + q_{cr,flexión\ local} \right]^{-1} + q_{cr,corte\ local}^{-1} \right\}^{-1} \quad (1356)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.8.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s2}u''(x) - K_{s2}\psi'(x) = 0 \\ K_{b1}\theta''(x) - K_{s1}[\theta(x) - \psi(x)] = 0 \\ K_{b2}\psi''(x) - (K_{s1} + K_{s2})\psi(x) + K_{s1}\theta(x) + K_{s2}u'(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (1357)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\begin{bmatrix} K_{s2}D^2 & 0 & -K_{s2}D \\ 0 & K_{b1}D^2 - K_{s1} & K_{s1} \\ K_{s2}D & K_{s1} & K_{b2}D^2 - (K_{s1} + K_{s2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta(x) \\ \psi(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1358)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D^2 \left\{ D^4 - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2}) - q(K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s2} - q)} \right] D^2 - \left[\frac{K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s2} - q)} \right] \right\} = 0 \quad (1359)$$

Reescribiendo:

$$D^2(D^4 - r_1D^2 - r_2) = 0 \quad (1360)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{K_{s1}K_{s2}(K_{b1} + K_{b2}) - q(K_{s1}K_{b2} + K_{s2}K_{b1} + K_{s1}K_{b1})}{K_{b1}K_{b2}(K_{s2} - q)} \\ r_2 = \frac{K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s2} - q)} \end{array} \right\} \quad (1361)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ \theta_{(z)} = C_6 + C_7 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_8 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_9 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_{10} \sin(\sqrt{\beta} z) \\ \psi_{(z)} = C_{11} + C_{12} \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_{13} \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_{14} \cos(\sqrt{\beta} z) + C_{15} \sin(\sqrt{\beta} z) \end{array} \right\} \quad (1362)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \\ \beta = \frac{-r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \end{array} \right\} \quad (1363)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ \theta_{(z)} = C_1 + [p_1 \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi} z)] C_2 + [p_1 \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi} z)] C_3 - [p_3 \sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta} z)] C_4 + [p_3 \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta} z)] C_5 \\ \psi_{(z)} = C_1 + [p_2 \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi} z)] C_2 + [p_2 \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi} z)] C_3 - [p_4 \sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta} z)] C_4 + [p_4 \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta} z)] C_5 \end{array} \right\} \quad (1364)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b1} K_{b2} \xi^2 - (K_{s1} K_{b2} + K_{s2} K_{b1} + K_{s1} K_{b1}) \xi + K_{s1} K_{s2} - (K_{b1} \xi - K_{s1}) K_{s1}} \\ p_2 = \frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b1} K_{b2} \xi^2 - (K_{s1} K_{b2} + K_{s2} K_{b1} + K_{s1} K_{b1}) \xi + K_{s1} K_{s2}} \\ p_3 = \frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b1} K_{b2} \beta^2 - (K_{s1} K_{b2} + K_{s2} K_{b1} + K_{s1} K_{b1}) \beta + K_{s1} K_{s2} - (K_{b1} \beta + K_{s1}) K_{s1}} \\ p_4 = \frac{K_{s1} K_{s2}}{K_{b1} K_{b2} \beta^2 - (K_{s1} K_{b2} + K_{s2} K_{b1} + K_{s1} K_{b1}) \beta + K_{s1} K_{s2}} \end{array} \right\} \quad (1365)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M_{1(z)} = K_{b1}\theta'_{(x)} = [p_1\xi K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [p_1\xi K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_3 \\ \quad - [p_3\beta K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [p_3\beta K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{2(z)} = K_{b2}\psi'_{(x)} = [p_2\xi K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [p_2\xi K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_3 \\ \quad - [p_4\beta K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [p_4\beta K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_5 \end{array} \right\} \\ V_{(z)} = (K_{s2} - q)u'_{(x)} - K_{s2}\psi_{(x)} = -qC_1 + R_1\sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) C_2 + R_1\sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) C_3 \\ \quad - R_2\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) C_4 + R_2\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) C_5 \end{array} \right\} \quad (1366)$$

Donde:

$$\{R_1 = K_{s2}(1 - p_2) - q, R_2 = K_{s2}(1 - p_4) - q\} \quad (1367)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_i) \\ \psi_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{1i}(z_i) \\ M_{2i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{array} \right\} = K_i(z_i) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \right\} \quad (1368)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & \cosh(\sqrt{\xi}z) & \sinh(\sqrt{\xi}z) & \cos(\sqrt{\beta}z) & \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & p_1\sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & p_1\sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -p_3\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) & p_3\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & p_2\sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & p_2\sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -p_4\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) & p_4\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & p_1\xi K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & p_1\xi K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -p_3\beta K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) & -p_3\beta K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & p_2\xi K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z) & p_2\xi K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -p_4\beta K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z) & -p_4\beta K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & -q & R_1\sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_1\sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_2\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) & R_2\sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) \end{bmatrix}_i \quad (1369)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} u_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ \psi_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (1370)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1371)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ \psi_{(1)} = 0 \\ \psi'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ [K_{s2} - q]u'_{(0)} - K_{s2}\psi_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ \psi_1(h_1) = 0 \\ M_{1n}(0) = 0 \\ M_{2n}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1372)$$

Reemplazando:

$$\begin{pmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ \psi_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{pmatrix} \quad (1373)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.9 Viga sándwich Generalizada Modificada de dos campos (MGSB1)

4.3.9.1 Caso 1

La energía potencial del modelo MGSB1 de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_b^* \theta'_{(x)}{}^2 + K_s^* [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx \quad (1374)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_b^* = \eta \sum_{i=1}^c rEI_{c,i} + (1 - \eta) \sum_{i=1}^c EA_{c,i}c_i^2, K_s^* = \sum_{i=1}^c GA_{c,i} + (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1} \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{6EI_{b,i}[(l^* + S_1)^2 + (l^* + S_2)^2]}{l^{*3}h \left(1 + 12 \frac{kEI_{b,i}}{l^{*2}GA_{b,i}}\right)}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{\pi^2 EI_{c,i}}{h^2} \end{array} \right\} \quad (1375)$$

La ecuación puede que permite determinar la carga crítica, según la viga TB resulta:

$$\theta''_{(z)} - \lambda \alpha_{(z)} \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''_{(z)} - \theta_{(z)} \right] = 0 \quad (1376)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_s^*}{K_b^*}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_b^*} \right\} \quad (1377)$$

Sujeto a las condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ \theta''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1378)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

El cociente de Rayleigh, según la viga TB resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''^2(z) + \theta'^2(z) \right] dz}{\int_0^1 z \left[\frac{1}{\alpha^2} \theta''(z) - \theta(z) \right]^2 dz} \quad (1379)$$

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

La carga crítica, según la viga TB resulta:

$$q_{cr} = \left\{ \left[(2n-1)^2 \frac{\pi^2 K_b^*}{4H^2} \right]^{-1} + K_s^{*-1} \right\}^{-1} \quad (1380)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \left[\left(\frac{\pi^2 K_b^*}{4H^2} \right)^{-1} + K_s^{*-1} \right]^{-1} = (q_{cr, flexión global}^{-1} + q_{cr, corte}^{-1})^{-1} \quad (1381)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.9.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

La matriz de transferencia, según la viga TB resulta:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi}z) & \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 1 & -\frac{K_b \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z)}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} & -\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & 0 & -\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \cos(\sqrt{\xi}z) & -\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} \sin(\sqrt{\xi}z) \\ 0 & q & \left(\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q \right) \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi}z) & -\left(\frac{K_b \xi}{\frac{\xi}{\alpha^{*2}} + 1} - q \right) \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi}z) \end{bmatrix}_i \quad (1382)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{qK_s^*}{(K_s - q)K_b^*}, \alpha^* = \sqrt{\frac{K_s^*}{K_b^*}} \right\} \quad (1383)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

La carga crítica se obtiene igualando a cero la determinante (la matriz de coeficientes es singular):

$$\begin{vmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \quad (1384)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1385)$$

4.3.10 Acoplamiento en paralelo de viga de corte y viga Timoshenko de dos campos (MCTB)

4.3.10.1 Caso 1

La energía potencial del modelo MCTB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1386)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{s1} = (K_b^{-1} + K_c^{-1})^{-1}, K_{b2} = \sum_{i=1}^c rEI_{c,i}, K_{s2} = \sum_{i=1}^c GA_{c,i}, \\ K_b = \sum_{i=1}^b \frac{12EI_{b,i}}{hL}, K_c = \sum_{i=1}^c \frac{\pi^2 EI_{c,i}}{h^2} \end{array} \right\} \quad (1387)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f_{(x)} dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1388)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{s1} u'_{(x)}{}^2\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1389)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^H \{ & K_{b2} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} + K_{s2} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] \delta \theta_{(x)} - K_{s2} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] \delta u'_{(x)} + K_{s1} u'_{(x)} \delta u'_{(x)} \\ & - f_{(x)} u'_{(x)} \delta u'_{(x)}\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1390)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & [K_{b2}\theta'_{(x)}\delta\theta_{(x)}]_0^H + \{[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} - K_{s2}\theta_{(x)}\}\delta u_{(x)}_0^H \\
& - \int_0^H \{K_{b2}\theta''_{(x)} - K_{s2}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}]\}\delta\theta_{(x)}dx \\
& - \int_0^H \{[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u''_{(x)} - K_{s2}\theta'_{(x)} - f'_{(x)}u'_{(x)}\}\delta u_{(x)}dx \\
& - \frac{1}{2}\int_0^H f_{(x)}u_{(x)}'^2\delta f_{(x)}dx
\end{aligned} \tag{1391}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b2}\theta''_{(x)} - K_{s2}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}] = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f'_{(x)}]u''_{(x)} - K_{s2}\theta'_{(x)} - f_{(x)}u''_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1392}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_{(0)} = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(0)}]u'_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1393}$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} - K_{s2}\theta_{(x)} = 0 \tag{1394}$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{b2}\theta''_{(x)} - K_{s2}[\theta_{(x)} - u'_{(x)}] = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} - K_{s2}\theta_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1395}$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{s2}D & -K_{s2} + K_{b2}D^2 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]D & -K_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1396}$$

El determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular):

$$K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})u_{(x)}''' - K_{s1}K_{s2}u'_{(x)} - f_{(x)}[K_{b2}u_{(x)}''' - K_{s2}u'_{(x)}] = 0 \tag{1397}$$

Reordenando:

$$u'''_{(x)} - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u'_{(x)} - f_{(x)} \left[\frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} u'''_{(x)} - \frac{K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u'_{(x)} \right] = 0 \quad (1398)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u'''_{(z)} - \frac{K_{s1}K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u'_{(z)} - f_{(z)} \left[\frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} u'''_{(z)} - \frac{K_{s2}}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u'_{(z)} \right] = 0 \quad (1399)$$

Donde:

$$f_{(z)} = q\alpha_{(z)} \quad (1400)$$

Definimos:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{K_{s2}^2}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{s2}}}, \lambda = \frac{qH}{K_{s1} + K_{s2}} \right\} \quad (1401)$$

Reescribiendo:

$$u'''_{(z)} - (\alpha\kappa)^2 u'_{(z)} - \lambda\alpha_{(z)} [u'''_{(z)} - \alpha^2(k^2 + 1)u'_{(z)}] = 0 \quad (1402)$$

Sin embargo, la función de rotación es de un grado menor:

$$\theta''_{(z)} - (\alpha\kappa)^2 \theta_{(z)} - \lambda\alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(k^2 + 1)\theta_{(z)}] = 0 \quad (1403)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $\theta_{(z)}$:

$$\begin{cases} \theta_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1404)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - (\alpha\kappa)^2 \right] \theta_{(z)} - \lambda \left\{ \alpha_{(z)} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2(\kappa^2 + 1) \right] \right\} \theta_{(z)} = 0 \quad (1405)$$

Multiplicando la ecuación por $[\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]$ e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 [\theta''_{(z)} - \alpha^2(2\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}\theta''_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2\theta_{(x)}^2] dz - \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1406)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\int_0^1 [\theta''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 + 1)\theta'_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2\theta_{(x)}^2] dz - \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1407)$$

Despejando el parámetro γ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [\theta''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 + 1)\theta'_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2\theta_{(x)}^2] dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]^2 dz} \quad (1408)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $\theta_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1409)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [\theta''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 + 1)\theta'_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2\theta_{(x)}^2] dz}{\int_0^1 z [\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]^2 dz} \quad (1410)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - z^3, \phi_2^1 = 1 - z^4 \quad (1411)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta_{(z)} = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A(1 - z^3) + B(1 - z^4) \quad (1412)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$U = \int_0^1 [\theta''_{(z)} + \alpha^2(2\kappa^2 + 1)\theta'_{(z)} + \alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2\theta_{(z)}] dz - \lambda \int_0^1 z[\theta''_{(z)} - \alpha^2(\kappa^2 + 1)\theta_{(z)}]^2 dz \quad (1413)$$

Desarrollando las integrales y uniendo términos comunes:

$$U = A^2(a_1 - \lambda a_2) + B^2(b_1 - \lambda b_2) + AB[(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \quad (1414)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 12 + 1.8[\alpha^2(2\kappa^2 + 1)] + 0.6428[\alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2] \\ a_2 = 9 + 0.225[\alpha^2(\kappa^2 + 1)]^2 + 2[\alpha^2(\kappa^2 + 1)] \\ b_1 = 28.8 + 2.2857[\alpha^2(2\kappa^2 + 1)] + 0.7111[\alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2] \\ b_2 = 28.8 + 0.7111[\alpha^2(\kappa^2 + 1)]^2 + 3[\alpha^2(\kappa^2 + 1)] \\ (ab)_1 = 36 + 4[\alpha^2(2\kappa^2 + 1)] + 1.35[\alpha^2(\kappa^2 + 1)(\alpha\kappa)^2] \\ (ab)_2 = 28.8 + 0.4889[\alpha^2(\kappa^2 + 1)]^2 + 4.8571[\alpha^2(\kappa^2 + 1)] \end{array} \right\} \quad (1415)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \rightarrow 2(a_1 - \lambda a_2)A + [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]B \\ \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \rightarrow [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]A + 2(b_1 - \lambda b_2)B \end{array} \right\} \quad (1416)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1417)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero; es decir:

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (1418)$$

Operando la determinante, se tiene:

$$[4a_2b_2 - (ab)_2^2]\lambda^2 + [2(ab)_1(ab)_2 - 4(a_1b_2 + a_2b_1)]\lambda + [4a_1b_1 - (ab)_1^2] = 0 \quad (1419)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\lambda = \frac{qH}{K_{s1} + K_{s2}} \rightarrow q_{cr}H = \lambda(K_{s1} + K_{s2}) \quad (1420)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga MCTB de dos campos. Con el objetivo de obtener una mejor aproximación a la carga crítica exacta es necesario repetir el procedimiento anterior con dos nuevos polinomios de mayor grado.

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - z^4 \quad (1421)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos dos veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga MCTB de dos campos:

$$\theta_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint \theta_{(z)} dz + \lambda \iint \alpha_{(z)} \theta_{(z)}'' dz - \lambda\alpha^2(\kappa^2 + 1) \iint \alpha_{(z)} \theta_{(z)} dz + C_1 z + C_0 \quad (1422)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$\theta_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint \theta_{(z)} dz + \lambda \iint z \theta_{(z)}'' dz - \lambda\alpha^2(\kappa^2 + 1) \iint z \theta_{(z)} dz + C_1 z + C_0 \quad (1423)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio a utilizar en la segunda iteración.

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$\theta_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 = A\phi_1^1 + B\phi_2^2 \quad (1424)$$

Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado. Numéricamente se observa que con una cuarta iteración la aproximación puede considerarse exacta.

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1425)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\theta''_{(z)} - (\alpha\kappa)^2\theta_{(z)} - \frac{\lambda}{H} [\theta''_{(z)} - \alpha^2(k^2 + 1)\theta_{(z)}] = 0 \quad (1426)$$

La expresión de $\theta_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$\theta_{(z)} = C_1 \cos(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sin(\sqrt{\xi}z) \quad (1427)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{\frac{\lambda}{H}\alpha^2(k^2 + 1) - (\alpha\kappa)^2}{\frac{\lambda}{H} - 1} \right\} \quad (1428)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\xi} & \sinh \sqrt{\xi} \\ 0 & \xi^{1/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1429)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos \sqrt{\xi} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1430)$$

Es decir:

$$\frac{\frac{\lambda}{H} \alpha^2 (k^2 + 1) - (\alpha \kappa)^2}{1 - \frac{\lambda}{H}} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1431)$$

Después de algunas manipulaciones simples:

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{(2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} + (\alpha \kappa)^2}{(2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} + \alpha^2 (\kappa^2 + 1)} \quad (1432)$$

Reemplazando por sus rigideces características:

$$q_{cr} = K_{s1} + \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b2}} + \frac{1}{K_{s2}}} \quad (1433)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = K_{s1} + \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s2}^{-1} \right\}^{-1} \quad (1434)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = K_{s1} + \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s2}^{-1} \right]^{-1} = q_{cr, corte global} + [q_{cr, flexión global}^{-1} + q_{cr, corte local}^{-1}]^{-1} \quad (1435)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.10.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{cases} K_{b2} \theta''_{(x)} - K_{s2} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - q] u'_{(x)} - K_{s2} \theta_{(x)} = 0 \end{cases} \quad (1436)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\begin{bmatrix} K_{s2}D & -K_{s2} + K_{b2}D^2 \\ [K_{s1} + K_{s2} - q]D & -K_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ \theta_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1437)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D \left\{ D^2 - \left[\frac{K_{s1}(K_{b1} + K_{b2})}{K_{b1}K_{b2}} - \frac{q}{K_{b2}} \right] \right\} = 0 \quad (1438)$$

Reescribiendo:

$$D \left\{ D^2 + \frac{\lambda \alpha^{*2}(k^2 + 1) - (\alpha^* \kappa)^2}{1 - \lambda} \right\} = 0 \quad (1439)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s2}^2}{K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})}}, \kappa = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{s2}}}, \lambda = \frac{q}{K_{s1} + K_{s2}} \right\} \quad (1440)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 \cos(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sin(\sqrt{\xi}z) \\ \theta_{(z)} = C_3 + C_4 \cos(\sqrt{\xi}z) + C_5 \sin(\sqrt{\xi}z) \end{cases} \quad (1441)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{\lambda \alpha^{*2}(k^2 + 1) - (\alpha^* \kappa)^2}{1 - \lambda} \right\} \quad (1442)$$

Expresando los coeficientes de $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + \cos(\sqrt{\xi}z) C_1 + \sin(\sqrt{\xi}z) C_2 \\ \theta_{(z)} = - \left[\frac{K_{s2}\sqrt{\xi}}{K_{s2} + \xi K_{b2}} \sin(\sqrt{\xi}z) \right] C_1 + \left[\frac{K_{s2}\sqrt{\xi}}{K_{s2} + \xi K_{b2}} \cos(\sqrt{\xi}z) \right] C_2 \end{array} \right\} \quad (1443)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{(z)} = K_{b2} \theta'_{(x)} = - \left[\frac{K_{S2} \xi}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \cos(\sqrt{\xi} z) \right] C_1 - \left[\frac{K_{S2} \xi}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \sin(\sqrt{\xi} z) \right] C_2 \\ V_{(z)} = (K_{s1} + K_{s2} - q) u'_{(x)} - K_{s2} \theta_{(x)} = \left[-(K_{s1} + K_{s2} - q) + \frac{K_{S2}^2 \sqrt{\xi}}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \right] \sin(\sqrt{\xi} z) C_1 \\ \quad - \left[-(K_{s1} + K_{s2} - q) + \frac{K_{S2}^2 \sqrt{\xi}}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \right] \cos(\sqrt{\xi} z) C_2 \end{array} \right\} \quad (1444)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (K_{s1} + K_{s2} - q) \sqrt{\xi} - K_{s1} R_{\psi1} - K_{s2} R_{\theta1} \\ R_2 = (K_{s1} + K_{s2} - q) \sqrt{\beta} - K_{s1} R_{\psi2} - K_{s2} R_{\theta2} \end{array} \right\} \quad (1445)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{array} \right\} = K_i(z_i) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} \quad (1446)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\sqrt{\xi} z) & \sin(\sqrt{\xi} z) \\ 0 & -\frac{K_{S2} \xi}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \cos(\sqrt{\xi} z) & -\frac{K_{S2} \xi}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \sin(\sqrt{\xi} z) \\ 0 & \left[-(K_{s1} + K_{s2} - q) + \frac{K_{S2}^2 \sqrt{\xi}}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \right] \sin(\sqrt{\xi} z) & \left[(K_{s1} + K_{s2} - q) - \frac{K_{S2}^2 \sqrt{\xi}}{K_{S2} + \xi K_{b2}} \right] \cos(\sqrt{\xi} z) \end{bmatrix}_i \quad (1447)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{array} \right\} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} = t \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{array} \right\} \quad (1448)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1449)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - q]u'_{(0)} - K_{s2}\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1450)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1451)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} \\ t_{5,4} & t_{5,5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1452)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.11 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado de tres campos (GCTB)

4.3.11.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de tres campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}]^2 dx \quad (1453)$$

Donde:

$$\left\{ K_{b1} = E \left(A_2 + \frac{A_2^2}{A_1} \right), K_{b2} = E(I_1 + I_2), K_{s1} = G_{eq} t_w l_b, K_{s2} = G\kappa(A_1 + A_2) \right\} \quad (1454)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f_{(x)} dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \quad (1455)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)}{}^2 + K_{b2} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}]^2 + K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}]^2 \right\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 dx \end{aligned} \quad (1456)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \int_0^H \left\{ K_{b1} w'_{(x)} \delta w'_{(x)} + K_{b2} \theta'_{(x)} \delta \theta'_{(x)} + K_{s2} [u'_{(x)} - \theta_{(x)}] [\delta u'_{(x)} - \delta \theta_{(x)}] \right. \\ & \left. + K_{s1} [u'_{(x)} + m\theta_{(x)} - nw_{(x)}] [\delta u'_{(x)} + m\delta \theta_{(x)} - n\delta w_{(x)}] \right. \\ & \left. - f_{(x)} u'_{(x)} \delta u'_{(x)} \right\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u'_{(x)}{}^2 \delta f_{(x)} dx \end{aligned} \quad (1457)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} = & K_{b1}[w'_{(x)}\delta w_{(x)}]_0^H + K_{b2}[\theta'_{(x)}\delta\theta_{(x)}]_0^H \\
& + \left\{ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} - nK_{s1}w_{(x)} \right\} \delta\theta_{(x)} \Big|_0^H \\
& + \int_0^H \{ -K_{b1}w''_{(x)} - nK_{s1}u'_{(x)} - mnK_{s1}\theta_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} \} \delta w_{(x)} \\
& + \int_0^H \{ -K_{b2}\theta''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(x)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(x)} - mnK_{s1}w_{(x)} \} \delta\theta_{(x)} \\
& + \int_0^H \{ -[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u''_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'_{(x)} + nK_{s1}w'_{(x)} \\
& + f'_{(x)}u'_{(x)} \} \delta u_{(x)} - \int_0^H u_{(x)} \delta f_{(x)} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f_{(x)} u_{(x)}^2 \delta f_{(x)} dx
\end{aligned} \tag{1458}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - nK_{s1}u'_{(x)} - mnK_{s1}\theta_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ -K_{b2}\theta''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(x)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(x)} - mnK_{s1}w_{(x)} = 0 \\ -[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u''_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta'_{(x)} + nK_{s1}w'_{(x)} + f'_{(x)}u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1459}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ [K_{s1} + K_{s2} - f_{(0)}]u'_{(0)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1460}$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x=0$:

$$-[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} + nK_{s1}w_{(x)} = 0 \tag{1461}$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - nK_{s1}u'_{(x)} - mnK_{s1}\theta_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ -K_{b2}\theta''_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})u'_{(x)} + (K_{s2} + m^2K_{s1})\theta_{(x)} - mnK_{s1}w_{(x)} = 0 \\ -[K_{s1} + K_{s2} - f_{(x)}]u'_{(x)} + (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} + nK_{s1}w_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1462}$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -nK_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} & -mnK_{s1} \\ -(K_{s2} - mK_{s1})D & -mnK_{s1} & -K_{b2}D^2 + (K_{s2} + m^2K_{s1}) \\ -[K_{s1} + K_{s2} - f(x)]D & nK_{s1} & (K_{s2} - mK_{s1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero:

$$\begin{aligned} u_{(x)}'''' - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u_{(x)}'''' \\ - f(x) \left[\frac{1}{(K_{s1} + K_{s2})} u_{(x)}'''' - \frac{K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u_{(x)}'''' \right. \\ \left. + \frac{n^2K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} u_{(x)}' \right] = 0 \end{aligned} \quad (1463)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z=x/H$:

$$\begin{aligned} u_{(z)}'''' - \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u_{(z)}'''' \\ + f(z) \left[-\frac{1}{(K_{s1} + K_{s2})} u_{(z)}'''' + \frac{K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2 u_{(z)}'''' \right. \\ \left. - \frac{n^2K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^4 u_{(z)}' \right] = 0 \end{aligned} \quad (1464)$$

Donde:

$$f(z) = q\alpha_{(z)} \quad (1465)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u_{(z)}'''' - a_0 u_{(z)}'''' + q\alpha_{(z)} [-a_1 u_{(z)}'''' + a_2 u_{(z)}'''' - a_3 u_{(z)}'] = 0 \quad (1466)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{K_{s1}K_{s2}[n^2K_{b2} + (m+1)^2K_{b1}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2, a_1 = \frac{1}{K_{s1} + K_{s2}} \\ a_2 = \frac{K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^2, a_3 = \frac{n^2K_{s1}K_{s2}}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2})} H^4 \end{array} \right\} \quad (1467)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ u'''_{(1)} = 0 \\ u''''_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \quad (1468)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^5}{dz^5} - a_0 \frac{d^3}{dz^3} \right] u_{(z)} - q \left[\alpha_{(z)} \left(a_1 \frac{d^5}{dz^5} - a_2 \frac{d^3}{dz^3} + a_3 \frac{d}{dz} \right) \right] u_{(z)} = 0 \quad (1469)$$

Multiplicando la ecuación por $\left(a_1 \frac{d^5}{dz^5} - a_2 \frac{d^3}{dz^3} + a_3 \frac{d}{dz} \right)$, integrando de 0 a 1 y despejando:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{ a_1 u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_1 + a_2) u''''^2_{(z)} + (a_0 a_2 + a_3) u''''^2_{(z)} + a_0 a_3 u''^2_{(z)} \} dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} [a_1 u''''''_{(z)} - a_2 u''''_{(z)} + a_3 u'_{(z)}]^2 dz} \quad (1470)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $u_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1471)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \{ a_1 u''''''^2_{(z)} + (a_0 a_1 + a_2) u''''^2_{(z)} + (a_0 a_2 + a_3) u''''^2_{(z)} + a_0 a_3 u''^2_{(z)} \} dz}{\int_0^1 z [a_1 u''''''_{(z)} - a_2 u''''_{(z)} + a_3 u'_{(z)}]^2 dz} \quad (1472)$$

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1473)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u_{(z)}'''' - a_0 u_{(z)}''' + q[-a_1 u_{(z)}'''' + a_2 u_{(z)}''' - a_3 u_{(z)}''] = 0 \quad (1474)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1475)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \\ \beta = \frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} \end{array} \right\} \quad (1476)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cosh(\sqrt{\xi}) & \sinh(\sqrt{\xi}) & \cos(\sqrt{\beta}) & \sin(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^{1/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{1/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & -\beta^{1/2} \sin(\sqrt{\beta}) & \beta^{1/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \xi^{3/2} \sinh(\sqrt{\xi}) & \xi^{3/2} \cosh(\sqrt{\xi}) & \beta^{3/2} \sin(\sqrt{\beta}) & -\beta^{3/2} \cos(\sqrt{\beta}) \\ 0 & \xi^2 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1477)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos\sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1478)$$

Es decir:

$$\frac{-(a_0 - qa_2) + \sqrt{(a_0 - qa_2)^2 + 4qa_3(1 - qa_1)}}{2(1 - qa_1)} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1479)$$

Resolviendo:

$$q_{cr} = \frac{\frac{(2n-1)^4 \pi^4}{4} + a_0(2n-1)^2 \pi^2}{4a_0 + a_2(2n-1)^2 \pi^2 + a_1 \frac{(2n-1)^4 \pi^4}{4}} \quad (1480)$$

Reemplazando los coeficientes y después de algunas manipulaciones simples:

$$q_{cr} = \frac{(2n-1)^4 \pi^4 K_{b1} K_{b2} (K_{s1} + K_{s2}) + 4H^2 (2n-1)^2 \pi^2 [(m+1)^2 K_{b1} + n^2 K_{b2}]}{(2n-1)^4 \pi^4 K_{b1} K_{b2} + 4H^2 (2n-1)^2 \pi^2 [K_{b1} (K_{s2} + m^2 K_{s1}) + n^2 K_{s1} K_{b2}] + 16H^4 n^2 K_{s1} K_{s2}} \quad (1481)$$

Se observa que una fórmula donde interactúan los modos en forma independiente no es posible debido al acoplamiento existente entre los comportamientos de flexión y corte producto de las vigas de conexión. Para el caso de $n=1$:

$$q_{cr} = \frac{\pi^4 K_{b1} K_{b2} (K_{s1} + K_{s2}) + 4H^2 \pi^2 [(m+1)^2 K_{b1} + n^2 K_{b2}]}{\pi^4 K_{b1} K_{b2} + 4H^2 \pi^2 [K_{b1} (K_{s2} + m^2 K_{s1}) + n^2 K_{s1} K_{b2}] + 16H^4 n^2 K_{s1} K_{s2}} \quad (1482)$$

4.3.11.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1} w''(x) - nK_{s1} u'(x) - mnK_{s1} \theta(x) + n^2 K_{s1} w(x) = 0 \\ -K_{b2} \theta''(x) - (K_{s2} - mK_{s1}) u'(x) + (K_{s2} + m^2 K_{s1}) \theta(x) - mnK_{s1} w(x) = 0 \\ -[K_{s1} + K_{s2} - q] u''(x) + (K_{s2} - mK_{s1}) \theta'(x) + nK_{s1} w'(x) + f'(x) u'(x) = 0 \end{array} \right. \quad (1483)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\left[\begin{array}{ccc} -nK_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} & -mnK_{s1} \\ -(K_{s2} - mK_{s1})D & -mnK_{s1} & -K_{b2}D^2 + (K_{s2} + m^2K_{s1}) \\ -[K_{s1} + K_{s2} - q]D^2 & nK_{s1}D & (K_{s2} - mK_{s1})D \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1484)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D^2 \left\{ D^4 - \left\{ \frac{K_{s1}K_{s2}[(m+1)^2K_{b1} + n^2K_{b2}] - q[K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \right\} D^2 - \frac{n^2K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \right\} = 0 \quad (1485)$$

Reescribiendo:

$$D^2(D^4 - r_1D^2 - r_2) = 0 \quad (1486)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{K_{s1}K_{s2}[(m+1)^2K_{b1} + n^2K_{b2}] - q[K_{b1}(K_{s2} + m^2K_{s1}) + n^2K_{s1}K_{b2}]}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \\ r_2 = \frac{n^2K_{s1}K_{s2}q}{K_{b1}K_{b2}(K_{s1} + K_{s2} - q)} \end{array} \right\} \quad (1487)$$

La expresión para $u_{(z)}$, $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ se propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta}z) \\ w_{(x)} = C_6 + C_7z + C_8 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_9 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_{10} \cos(\sqrt{\beta}z) + C_{11} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ \theta_{(x)} = C_{12} + C_{13}z + C_{14} \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_{15} \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_{16} \cos(\sqrt{\beta}z) + C_{17} \sin(\sqrt{\beta}z) \end{array} \right\} \quad (1488)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \\ \beta = \frac{-r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_2}}{2} \end{array} \right\} \quad (1489)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(z)} = C_0 + C_1z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta}z) \\ w_{(x)} = p_3C_1 + [\sqrt{\xi}p_1 \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [\sqrt{\xi}p_1 \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_3 - [\sqrt{\beta}p_1 \sin(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [\sqrt{\beta}p_1 \cos(\sqrt{\beta}z)]C_5 \\ \theta_{(x)} = p_4C_1 + [\sqrt{\xi}p_2 \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [\sqrt{\xi}p_2 \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_3 - [\sqrt{\beta}p_2 \sin(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [\sqrt{\beta}p_2 \cos(\sqrt{\beta}z)]C_5 \end{array} \right\} \quad (1490)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{nK_{s1}[(m+1)K_{s2} + \beta K_{b2}]}{(n^2K_{s1} + \beta K_{b1})(K_{s2} + m^2K_{s2} + \beta K_{b2}) - m^2n^2K_{s1}^2} \\ p_2 = \frac{(K_{s2} - mK_{s1})[n^2K_{s1}K_{s2} + \beta K_{b1}(K_{s2} - mK_{s1})]}{(n^2K_{s1} + \beta K_{b1})(K_{s2} + m^2K_{s2} + \beta K_{b2}) - m^2n^2K_{s1}^2} \\ p_3 = \left(\frac{m+1}{n}\right)\left(1 + m^2\frac{K_{s1}}{K_{s2}}\right), p_4 = 1 - m(m-1)\frac{K_{s1}}{K_{s2}} \end{array} \right\} \quad (1491)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M_{1(z)} = K_{b1}w'_{(x)} = [\xi p_1 K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [\xi p_1 K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_3 \\ -[\beta p_1 K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [\beta p_1 K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{2(z)} = K_{b2}\theta'_{(x)} = [\xi p_2 K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z)]C_2 + [\xi p_2 K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z)]C_3 \\ -[\beta p_2 K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z)]C_4 - [\beta p_2 K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z)]C_5 \end{array} \right\} \\ V_{(z)} = (K_{s1} + K_{s2} - q)u'_{(x)} - nK_{s1}w_{(x)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(x)} = R_1C_1 + R_2 \sinh(\sqrt{\xi}z)C_2 \\ + R_2 \cosh(\sqrt{\xi}z)C_3 - R_3 \sin(\sqrt{\beta}z)C_4 + R_4 \cos(\sqrt{\beta}z)C_5 \end{array} \right\} \quad (1492)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (K_{s1} + K_{s2} - q) - nK_{s1}p_3 - (K_{s2} - mK_{s1})p_4 \\ R_2 = (K_{s1} + K_{s2} - q)\sqrt{\xi} - nK_{s1}\sqrt{\xi}p_1 - (K_{s2} - mK_{s1})\sqrt{\xi}p_2 \\ R_3 = -(K_{s1} + K_{s2} - q)\sqrt{\xi} + nK_{s1}\sqrt{\xi}p_1 + (K_{s2} - mK_{s1})\sqrt{\xi}p_2 \\ R_4 = (K_{s1} + K_{s2} - q)\sqrt{\xi} + nK_{s1}\sqrt{\xi}p_1 + (K_{s2} - mK_{s1})\sqrt{\xi}p_2 \end{array} \right\} \quad (1493)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_i) \\ w_i(z_i) \\ \theta_i(z_i) \\ M_{1i}(z_i) \\ M_{2i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{array} \right\} = K_i(z_i) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \right\} \quad (1494)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z & \cosh(\sqrt{\xi}z) & \sinh(\sqrt{\xi}z) & \cos(\sqrt{\beta}z) & \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & p_3 & \sqrt{\xi}p_1 \sinh(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi}p_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) & -\sqrt{\beta}p_1 \sin(\sqrt{\beta}z) & -\sqrt{\beta}p_1 \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & p_4 & \sqrt{\xi}p_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi}p_2 \cosh(\sqrt{\xi}z) & -\sqrt{\beta}p_2 \sin(\sqrt{\beta}z) & -\sqrt{\beta}p_2 \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & \xi p_1 K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & \xi p_1 K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -\beta p_1 K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) & -\beta p_1 K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & \xi p_2 K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z) & \xi p_2 K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -\beta p_2 K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z) & -\beta p_2 K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & R_1 & R_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) & R_2 \cosh(\sqrt{\xi}z) & -R_3 \sin(\sqrt{\beta}z) & R_4 \cos(\sqrt{\beta}z) \end{bmatrix}_i$$

(1495)

• **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ w_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ w_1(h_1) \\ \theta_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix}$$

(1496)

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0)$$

(1497)

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ w_{(1)} = 0 \\ \theta_{(1)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \\ \theta'_{(0)} = 0 \\ (K_{s1} + K_{s2} - q)u'_{(0)} - nK_{s1}w_{(0)} - (K_{s2} - mK_{s1})\theta_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(h_1) = 0 \\ w_1(h_1) = 0 \\ \theta_1(h_1) = 0 \\ M_{1n}(0) = 0 \\ M_{2n}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{array} \right\}$$

(1498)

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ w_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1499)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ M_2(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1500)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.12 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado modificado de dos campos (GCTB)

4.3.12.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de dos campos se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} u''(x)^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^H K_{s1} [(m+1)u'(x) - nw(x)]^2 dx \quad (1501)$$

Donde:

$$\left\{ K_{b1} = E \left(A_2 + \frac{A_2^2}{A_1} \right), K_{b2} = E(I_1 + I_2), K_{s1} = G_{eq} t_w l_b \right\} \quad (1502)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f(x)dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f(x)u'(x)^2 dx \quad (1503)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^H \{K_{b1} w'(x)^2 + K_{b2} u''(x)^2 + K_{s1} [(m+1)u'(x) - nw(x)]^2\} dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x)u'(x)^2 dx \quad (1504)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = & \int_0^H \{K_{b1} w'(x) \delta w'(x) + K_{b2} u''(x) \delta u''(x) + K_{s1} [(m+1)u'(x) - nw(x)](m+1) \delta u'(x) \\ & - K_{s1} [(m+1)u'(x) - nw(x)] n \delta w(x) - f(x) u'(x) \delta u'(x)\} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (1505)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned}
\delta u = & K_{b1}[w'_{(x)}\delta w_{(x)}]_0^H + K_{b2}[u''_{(x)}\delta u'_{(x)}]_0^H \\
& + \left\{ \left\{ -K_{b2}u'''_{(x)} + [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]u'_{(x)} - n(m+1)K_{s1}w_{(x)} \right\} \delta u_{(x)} \right\}_0^H \\
& + \int_0^H \left\{ -K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} \right\} \delta w_{(x)} \\
& + \int_0^H \left\{ K_{b2}u''''_{(x)} - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w'_{(x)} \right. \\
& \left. + f'_{(x)}u'_{(x)} \right\} \delta u_{(x)} - \frac{1}{2} \int_0^H f'_{(x)}u'^2_{(x)}\delta f_{(x)} dx
\end{aligned} \tag{1506}$$

Al igualar a cero los términos, resultan las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ K_{b2}u''''_{(x)} - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]u''_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w'_{(x)} + f'_{(x)}u'_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1507}$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ K_{b2}u''_{(0)} - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(0)}]u'_{(0)} + n(m+1)K_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1508}$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x=0$:

$$K_{b2}u'''_{(x)} - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]u'_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w_{(x)} = 0 \tag{1509}$$

Se tiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1}w''_{(x)} - n(m+1)K_{s1}u'_{(x)} + n^2K_{s1}w_{(x)} = 0 \\ K_{b2}u''_{(x)} - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]u'_{(x)} + n(m+1)K_{s1}w_{(x)} = 0 \end{array} \right\} \tag{1510}$$

Utilizando el método de operador diferencial para la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{cc} -n(m+1)K_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} \\ K_{b2}D^3 - [(m+1)^2K_{s1} - f_{(x)}]D & n(m+1)K_{s1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_{(x)} \\ w_{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular):

$$\frac{K_{b1}K_{b2}}{K_{s1}}u_{(x)}'''' - [(m+1)^2K_{b1} + n^2K_{b2}]u_{(x)}'''' + f_{(x)}\left[\frac{K_{b1}}{K_{s1}}u_{(x)}'''' - u'_{(x)}\right] = 0 \quad (1511)$$

Reordenando:

$$u_{(x)}'''' - \frac{K_{s1}}{K_{b2}}\left[(m+1)^2 + n^2\frac{K_{b2}}{K_{b1}}\right]u_{(x)}'''' + \frac{f_{(x)}}{K_{b2}}\left[u_{(x)}'''' - \frac{K_{s1}}{K_{b1}}u'_{(x)}\right] = 0 \quad (1512)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u_{(z)}'''' - \frac{K_{s1}}{K_{b2}}\left[(m+1)^2 + n^2\frac{K_{b2}}{K_{b1}}\right]H^2u_{(z)}'''' + \frac{f_{(z)}H^2}{K_{b2}}\left[u_{(z)}'''' - \frac{K_{s1}H^2}{K_{b1}}u'_{(z)}\right] = 0 \quad (1513)$$

Donde:

$$f_{(z)} = q\alpha_{(z)} \quad (1514)$$

Definimos:

$$\left\{ \alpha = H\sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2\frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \right\} \quad (1515)$$

Reescribiendo:

$$u_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2u_{(z)}'''' + \lambda\alpha_{(z)}\left\{u_{(z)}'''' - \alpha^2\left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2}\right]u'_{(z)}\right\} = 0 \quad (1516)$$

Sin embargo, la función de extensibilidad axial es de un grado menor:

$$w_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2w_{(z)}'''' + \lambda\alpha_{(z)}\left\{w_{(z)}'''' - \alpha^2\left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2}\right]w_{(z)}\right\} = 0 \quad (1517)$$

Expresando las condiciones de borde en función de $w_{(z)}$:

$$\begin{cases} w_{(1)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \\ w''_{(1)} = 0 \\ w'''_{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1518)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^4}{dz^4} - (\alpha\kappa)^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] w_{(z)} - \lambda \left\{ -\alpha_{(z)} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right] \right\} w_{(z)} = 0 \quad (1519)$$

Multiplicando la ecuación por $\left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}$ e integrando de 0 a 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ w''_{(z)} w''''_{(z)} - (\alpha\kappa)^2 w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} w''''_{(z)} \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 w_{(z)} w'_{(z)} \right\} dz \\ & \quad + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} \left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (1520)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \left\{ w''''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 w'_{(z)} \right\} dz \\ & \quad + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} \left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (1521)$$

Despejando el parámetro γ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left\{ w''''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 w'_{(z)} \right\} dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} \left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}^2 dz} \quad (1522)$$

Este cociente de Rayleigh representa una aproximación del límite superior de la carga crítica, y es exacta si y solo si se usa la curva de equilibrio exacta $w_{(z)}$ para calcular λ .

Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1523)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left\{ w''''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 w'_{(z)} \right\} dz}{\int_0^1 z \left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}^2 dz} \quad (1524)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - \frac{6}{5}z^2 + \frac{1}{5}z^4, \phi_2^1 = 1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5 \quad (1525)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$w_{(z)} = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A \left(1 - \frac{6}{5}z^2 + \frac{1}{5}z^4 \right) + B \left(1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5 \right) \quad (1526)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$U = \int_0^1 \left\{ w''''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w''_{(z)} + \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 w'_{(z)} \right\} dz - \lambda \int_0^1 z \left\{ w''_{(z)} - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\}^2 dz \quad (1527)$$

Desarrollando las integrales y uniendo términos comunes:

$$U = A^2(a_1 - \lambda a_2) + B^2(b_1 - \lambda b_2) + AB[(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \quad (1528)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 7.68 + 3.072 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} + 1.2434 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 \right\} \\ a_2 = 0.96 + 0.1507 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\}^2 - 1.3166 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} \\ b_1 = 8.8889 + 3.1746 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} + 1.2689 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 \right\} \\ b_2 = 1.1111 + 0.1555 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\}^2 - 1.5089 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} \\ (ab)_1 = 16 + 6.2222 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{2\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} + 2.5111 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] (\alpha\kappa)^2 \right\} \\ (ab)_2 = 2.0571 + 0.3062 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\}^2 - 3.1030 \left\{ \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \right\} \end{array} \right\} \quad (1529)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial A} = 0 \rightarrow 2(a_1 - \lambda a_2)A + [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]B \\ \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \rightarrow [(ab)_1 - \lambda(ab)_2]A + 2(b_1 - \lambda b_2)B \end{array} \right\} \quad (1530)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1531)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero; es decir:

$$\begin{vmatrix} 2(a_1 - \lambda a_2) & [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] \\ [(ab)_1 - \lambda(ab)_2] & 2(b_1 - \lambda b_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (1532)$$

Operando la determinante, se tiene:

$$[4a_2b_2 - (ab)_2^2]\lambda^2 + [2(ab)_1(ab)_2 - 4(a_1b_2 + a_2b_1)]\lambda + [4a_1b_1 - (ab)_1^2] = 0 \quad (1533)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\lambda = \frac{qH^3}{K_{b2}} \rightarrow q_{cr}H = \lambda \frac{K_{b2}}{H^2} \quad (1534)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga GCTB de dos campos. Para la mayoría de los casos prácticos la carga crítica resultante es lo suficientemente exacta; con el objetivo de obtener una mejor aproximación a la carga crítica exacta es necesario repetir el procedimiento anterior con dos nuevos polinomios de mayor grado.

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - \frac{10}{9}z^2 + \frac{1}{9}z^5 \quad (1535)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos cuatro veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga GCTB de dos campos:

$$w_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint w_{(z)} dz - \lambda \iiiii \alpha_{(z)} w_{(z)}'' dz + \lambda\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] \iiiii \alpha_{(z)} w_{(z)} dz + C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1536)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$w_{(z)} = (\alpha\kappa)^2 \iint w_{(z)} dz - \lambda \iiiii z w_{(z)}'' dz + \lambda\alpha^2[\kappa^2 - (m+1)^2] \iiiii z w_{(z)} dz + C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1537)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio a utilizar en la segunda iteración.

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$w_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 = A\phi_1 + B\phi_2^2 \quad (1538)$$

Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado.

- **Carga puntual en x=0 (z=0)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en x=0 (z=0), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1539)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$w_{(z)}'''' - (\alpha\kappa)^2 w_{(z)}'' + \frac{\lambda}{H} \left\{ w_{(z)}'' - \alpha^2 \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] w_{(z)} \right\} = 0 \quad (1540)$$

La expresión de $w_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$w_{(z)} = C_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) + C_2 \sinh(\sqrt{\xi}z) + C_3 \cos(\sqrt{\beta}z) + C_4 \sin(\sqrt{\beta}z) \quad (1541)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{-\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right]^2 + 4\frac{\lambda}{H}\alpha^2\left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2}\right]}}{2} \\ \beta = \frac{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right]^2 + 4\frac{\lambda}{H}\alpha^2\left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2}\right]}}{2} \end{array} \right\} \quad (1542)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\xi} & \sinh \sqrt{\xi} & \cos \sqrt{\beta} & \sin \sqrt{\beta} \\ 0 & \xi^{1/2} & 0 & \beta^{1/2} \\ \xi \cosh \sqrt{\xi} & \xi \sinh \sqrt{\xi} & -\beta \cos \sqrt{\beta} & -\beta \sin \sqrt{\beta} \\ 0 & \xi^{3/2} & 0 & -\beta^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1543)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir, para:

$$\cos \sqrt{\beta} = 0 \rightarrow \sqrt{\beta} = (2n-1)\frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1544)$$

Es decir:

$$\frac{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right] + \sqrt{\left[\frac{\lambda}{H} - (\alpha\kappa)^2\right]^2 + 4\frac{\lambda}{H}\alpha^2\left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2}\right]}}{2} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \quad (1545)$$

Después de algunas manipulaciones simples:

$$\frac{\lambda}{H} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{\frac{4 \left[\frac{\kappa^2 - (m + 1)^2}{n^2} \right]}{(2n - 1)^2 \pi^2} + \frac{1}{\alpha^2}} \quad (1546)$$

Reemplazando por sus rigideces características:

$$q_{cr} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \frac{1}{\frac{4H^2}{(2n - 1)^2 \pi^2 K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}}} \quad (1547)$$

Ordenando adecuadamente:

$$q_{cr} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \left\{ \left[(2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right]^{-1} + K_{s1}^{-1} \right\}^{-1} \quad (1548)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = \frac{\pi^2 K_{b2}}{4H^2} + \left[\left(\frac{\pi^2 K_{b1}}{4H^2} \right)^{-1} + K_{s1}^{-1} \right]^{-1} \quad (1549)$$

Es decir;

$$q_{cr} = q_{cr, flexi\grave{o}n local} + [q_{cr, flexi\grave{o}n global}^{-1} + q_{cr, corte}^{-1}]^{-1} \quad (1550)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.12.2 Caso 2

- cálculo de la matriz de transferencia

Según las ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{b1} w''(x) - n(m + 1)K_{s1} u'(x) + n^2 K_{s1} w(x) = 0 \\ K_{b2} u''''(x) - [(m + 1)^2 K_{s1} - q] u''(x) + n(m + 1)K_{s1} w'(x) = 0 \end{array} \right\} \quad (1551)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$\begin{bmatrix} -n(m+1)K_{s1}D & -K_{b1}D^2 + n^2K_{s1} \\ K_{b2}D^4 - [(m+1)^2K_{s1} - q]D^2 & n(m+1)K_{s1}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1552)$$

Para evitar soluciones triviales, el determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$D^2 \left\{ D^4 - \left\{ \frac{K_{s1}}{K_{b2}} \left[(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}} \right] - \frac{q}{K_{b2}} \right\} D^2 - \frac{K_{s1}q}{K_{b1}K_{b2}} \right\} = 0 \quad (1553)$$

Reescribiendo:

$$D^2 \left\{ D^4 - [(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] D^2 - \left\{ \alpha^{*2} \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \lambda \right\} \right\} = 0 \quad (1554)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha^* = \sqrt{\frac{K_{s1}}{K_{b2}}}, \kappa = \sqrt{(m+1)^2 + n^2 \frac{K_{b2}}{K_{b1}}}, \lambda = \frac{q}{K_{b2}} \right\} \quad (1555)$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $w_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ w_{(z)} = C_6 + C_7 z + C_8 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_9 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_{10} \cos(\sqrt{\beta} z) + C_{11} \sin(\sqrt{\beta} z) \end{cases} \quad (1556)$$

Donde:

$$\begin{cases} \xi = \frac{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] + \sqrt{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda]^2 + 4\alpha^{*2} \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \lambda}}{2} \\ \beta = \frac{-[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda] + \sqrt{[(\alpha^* \kappa)^2 - \lambda]^2 + 4\alpha^{*2} \left[\frac{\kappa^2 - (m+1)^2}{n^2} \right] \lambda}}{2} \end{cases} \quad (1557)$$

Expresando los coeficientes de $\psi_{(z)}$ y $\theta_{(z)}$ en función de los coeficientes de $u_{(z)}$:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cosh(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sinh(\sqrt{\xi} z) + C_4 \cos(\sqrt{\beta} z) + C_5 \sin(\sqrt{\beta} z) \\ w_{(z)} = p_3 C_1 + p_1 \sinh(\sqrt{\xi} z) C_2 + p_1 \cosh(\sqrt{\xi} z) C_3 - p_2 \sin(\sqrt{\beta} z) C_4 + p_2 \cos(\sqrt{\beta} z) C_5 \end{cases} \quad (1558)$$

Donde:

$$\left\{ p_1 = \frac{n(m+1)K_{s1}\sqrt{\xi}}{n^2K_{s1} - \xi K_{b1}}, p_2 = \frac{n(m+1)K_{s1}\sqrt{\beta}}{n^2K_{s1} + \beta K_{b1}}, p_3 = \left(\frac{m+1}{n} \right) \right\} \quad (1559)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} M_{1(z)} = K_{b1}w'_{(x)} = p_1\sqrt{\xi}K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) C_2 + p_1\sqrt{\xi}K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) C_3 \\ -p_2\sqrt{\beta}K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) C_4 - p_2\sqrt{\beta}K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) C_5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{2(z)} = K_{b2}u''_{(x)} = \xi K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z) C_2 + \xi K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z) C_3 \\ -\beta K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z) C_4 - \beta K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z) C_5 \end{array} \right\} \\ V_{(z)} = -K_{b2}u'''_{(x)} + [(m+1)^2K_{s1} - q]u'_{(x)} - n(m+1)K_{s1}w_{(x)} = p_4C_1 + p_5 \sinh(\sqrt{\xi}z) C_2 \\ + p_5 \cosh(\sqrt{\xi}z) C_3 + p_6 \sin(\sqrt{\beta}z) C_4 + p_7 \cos(\sqrt{\beta}z) C_5 \end{array} \right\} \quad (1560)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_4 = (m+1)K_{s1}[(m+1) - np_3] - q \\ p_5 = -K_{b2}\xi^{\frac{3}{2}} + [(m+1)^2K_{s1} - q]\xi^{\frac{1}{2}} - n(m+1)K_{s1}p_1 \\ p_6 = -K_{b2}\beta^{\frac{3}{2}} + [(m+1)^2K_{s1} - q]\beta^{\frac{1}{2}} + n(m+1)K_{s1}p_2 \\ p_7 = K_{b2}\beta^{\frac{3}{2}} + [(m+1)^2K_{s1} - q]\beta^{\frac{1}{2}} - n(m+1)K_{s1}p_2 \end{array} \right\} \quad (1561)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ w_i(z_i) \\ M_{1i}(z_i) \\ M_{2i}(z_i) \\ V_i(z_i) \end{array} \right\} = K_i(z_i) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \right\} \quad (1562)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & z & \cosh(\sqrt{\xi}z) & \sinh(\sqrt{\xi}z) & \cos(\sqrt{\beta}z) & \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 1 & \sqrt{\xi} \sinh(\sqrt{\xi}z) & \sqrt{\xi} \cosh(\sqrt{\xi}z) & -\sqrt{\beta} \sin(\sqrt{\beta}z) & \sqrt{\beta} \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & p_3 & p_1 \sinh(\sqrt{\xi}z) & p_1 \cosh(\sqrt{\xi}z) & -p_2 \sin(\sqrt{\beta}z) & p_2 \cos(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & p_1\sqrt{\xi}K_{b1} \cosh(\sqrt{\xi}z) & p_1\sqrt{\xi}K_{b1} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -p_2\sqrt{\beta}K_{b1} \cos(\sqrt{\beta}z) & -p_2\sqrt{\beta}K_{b1} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & 0 & \xi K_{b2} \cosh(\sqrt{\xi}z) & \xi K_{b2} \sinh(\sqrt{\xi}z) & -\beta K_{b2} \cos(\sqrt{\beta}z) & -\beta K_{b2} \sin(\sqrt{\beta}z) \\ 0 & p_4 & p_5 \sinh(\sqrt{\xi}z) & p_5 \cosh(\sqrt{\xi}z) & p_6 \sin(\sqrt{\beta}z) & +p_7 \cos(\sqrt{\beta}z) \end{array} \right]_i \quad (1563)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ w_n(0) \\ M_{1n}(0) \\ M_{2n}(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ w_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = \mathbf{t} \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ w_1(h_1) \\ M_{11}(h_1) \\ M_{21}(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1564)$$

Donde:

$$\mathbf{t} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1565)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 6x6 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ w_{(1)} = 0 \\ w'_{(0)} = 0 \\ u''_{(0)} = 0 \\ -K_{b2}u'''_{(0)} + [(m+1)^2K_{s1} - q]u'_{(0)} - n(m+1)K_{s1}w_{(0)} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ w_1(h_1) = 0 \\ M_{1n}(0) = 0 \\ M_{2n}(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (1566)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ w_n(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} & t_{1,5} & t_{1,6} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} & t_{2,5} & t_{2,6} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} & t_{3,5} & t_{3,6} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,1} & t_{5,2} & t_{5,3} & t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,1} & t_{6,2} & t_{6,3} & t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ M_2(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{4,4} & t_{4,5} & t_{4,6} \\ t_{5,4} & t_{5,5} & t_{5,6} \\ t_{6,4} & t_{6,5} & t_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ M_2(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1567)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.3.13 Acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizada de un campo (GCTB)

4.3.13.1 Caso 1

La energía potencial del modelo GCTB de un campo es:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''(x)^2 + (m+1)^2 K_s u'(x)^2] dx \quad (1568)$$

Donde:

$$\{K_b = E(I_1 + I_2), K_s = G_{eq} t_w l_b\} \quad (1569)$$

El trabajo ejercido por la fuerza externa se expresa como:

$$W = -f(x) dl = -\frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1570)$$

En consecuencia, la energía potencial total del modelo se expresa como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H [K_b u''(x)^2 + (m+1)^2 K_s u'(x)^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 dx \quad (1571)$$

Las soluciones de forma cerrada del modelo se logran resolviendo el sistema diferencial que surge de la estacionariedad de la ecuación. La estacionariedad debido al equilibrio implica:

$$\delta U = \int_0^H [K_b u''(x) \delta u''(x) + (m+1)^2 K_s u'(x) \delta u'(x) - f(x) u'(x) \delta u'(x)] dx - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \quad (1572)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\begin{aligned} \delta U &= [K_b u''(x) \delta u'(x)]_0^H + \left\{ [-K_b u'''(x) + [(m+1)^2 K_s - f(x)] u'(x)] \delta u(x) \right\}_0^H \\ &\quad + \int_0^H [K_b u''''(x) - (m+1)^2 K_s u''(x) + f'(x) u'(x) + f(x) u''(x)] \delta u(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^H f(x) u'(x)^2 \delta f(x) dx \end{aligned} \quad (1573)$$

Al igualar a cero los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$K_b u''''(x) - (m+1)^2 K_s u''(x) + f'(x) u'(x) + f(x) u''(x) = 0 \quad (1574)$$

Y condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(0) = 0 \\ -K_b u'''(0) + [(m+1)^2 K_s - f(0)] u'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1575)$$

Integrando una vez la ecuación y evaluando en $x = 0$:

$$K_b u'''(x) - [(m+1)^2 K_s - f(x)] u'(x) = 0 \quad (1576)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden, donde la carga crítica resulta del valor propio más pequeño. Normalizando la ecuación diferencial por la variable $z = x/H$:

$$u'''(z) - \frac{(m+1)^2 K_s - f(z)}{K_b} H^2 u'(z) = 0 \quad (1577)$$

La ecuación puede reescribirse como:

$$u'''(z) - \alpha^2 u'(z) + \lambda \alpha(z) u'(z) = 0 \quad (1578)$$

Donde:

$$\left\{ \alpha = H \sqrt{\frac{(m+1)^2 K_s}{K_b}}, \lambda = \frac{qH^3}{K_b} \right\} \quad (1579)$$

Condiciones de borde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1) = 0 \\ u'(1) = 0 \\ u''(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (1580)$$

- **Carga uniformemente distribuida**

Para la estabilidad de la viga, la ecuación diferencial gobernante es de la forma:

$$\left[\frac{d^3}{dz^3} - \alpha^2 \frac{d}{dz} \right] u_{(z)} - \lambda \left[-\alpha_{(z)} \frac{d}{dz} \right] u_{(z)} = 0 \quad (1581)$$

Multiplicando la ecuación por $u'_{(z)}$ e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 [u'_{(z)} u'''_{(z)} - \alpha^2 u'_{(z)} u''_{(z)}] dz + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [u'_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1582)$$

Después de integrar por partes y reemplazarlo en la ecuación, ordenamos los términos comunes:

$$\int_0^1 [-u''_{(z)} - \alpha^2 u'_{(z)}] dz + \lambda \int_0^1 \alpha_{(z)} [u'_{(z)}]^2 dz = 0 \quad (1583)$$

Despejando el parámetro λ :

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [u''_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)}] dz}{\int_0^1 \alpha_{(z)} u'_{(z)} dz} \quad (1584)$$

Donde λ es cociente de Rayleigh. Para el caso de una carga uniformemente distribuida la función $\alpha_{(z)}$ resulta:

$$\alpha_{(z)} = z \rightarrow f_{(z)} = qz \quad (1585)$$

El cociente de Rayleigh resulta:

$$\lambda = \frac{\int_0^1 [u''_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)}] dz}{\int_0^1 z u'_{(z)} dz} \quad (1586)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de borde. Consideramos dos polinomios simples de grados diferentes que satisfagan la condición de contorno:

$$\phi_1^1 = 1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4, \phi_2^1 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1587)$$

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u_{(z)} = A\phi_1^1 + B\phi_2^1 = A\left(1 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}z^4\right) + B\left(1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5\right) \quad (1588)$$

Expandimos las integrales y reemplazando en el cociente de Rayleigh:

$$u = \int_0^1 [u''_{(z)} + \alpha^2 u'_{(z)}] dz - \lambda \int_0^1 z [u'_{(z)}]^2 dz \quad (1589)$$

Desarrollando las integrales y agrupando términos comunes:

$$u = A^2[(3.2 + 1.1429\alpha^2) - 0.4\lambda] + B^2[(3.5714 + 1.1111\alpha^2) - 0.4167\lambda] + AB[(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda] \quad (1590)$$

La condición para que la carga crítica sea la mínima se expresa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial A} = 0 \rightarrow [(6.4 + 2.2858\alpha^2) - 0.8\lambda]A + [(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda]B = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial B} = 0 \rightarrow [(6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda]A + [(7.1428 + 2.2222\alpha^2) - 0.8334\lambda]B = 0 \end{array} \right\} \quad (1591)$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (6.4 + 2.2858\alpha^2) - 0.8\lambda & (6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda \\ (6.6667 + 2.25\alpha^2) - 0.8148\lambda & (7.1428 + 2.2222\alpha^2) - 0.8334\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1592)$$

Para una solución no trivial (a y b no pueden ser iguales a cero simultáneamente), el determinante de la matriz de coeficientes para a y b debe ser igual a cero. Operando la determinante:

$$\lambda^2 - (66.8571 + 5.7857\alpha^2)\lambda + (6.1473\alpha^4 + 200.0205\alpha^2 + 462.4561) = 0 \quad (1593)$$

El valor propio mínimo se obtiene de la mínima raíz de la ecuación cuadrática.

$$\lambda_1 = (33.4286 + 2.8929\alpha^2) - \sqrt{2.2213\alpha^4 - 6.6123\alpha^2 + 655.0133} \\ q_{cr}H = \lambda_1 \frac{K_b}{H^2} \rightarrow q_{cr}H = \lambda_1 \frac{K_b}{H^2} \quad (1594)$$

Que es la primera aproximación al valor de la carga crítica de la viga.

- 2° Iteración:

El primer polinomio a considerar será el de mayor grado de la iteración anterior:

$$\phi_1^2 = 1 - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^5 \quad (1595)$$

Para obtener un nuevo polinomio de mayor grado y que tome en cuenta el valor propio calculado en la iteración anterior, integraremos tres veces la ecuación diferencial resultante del modelo de viga:

$$u_{(z)} = \iint_0^z \alpha^2 u_{(z)} dz - \lambda \iiint_0^z \alpha_{(z)} u'_{(z)} dz dz + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1596)$$

Para el caso de una carga uniformemente:

$$u_{(z)} = \iint_0^z \alpha^2 u_{(z)} dz - \lambda \iiint_0^z z u'_{(z)} dz dz + C_2 z^2 + C_1 z + C_0 \quad (1597)$$

Al evaluar las condiciones de borde se determinan las constantes y se determina el nuevo polinomio ϕ_2^2 a utilizar en la segunda iteración.

Tomando una combinación lineal de ambos términos:

$$u_{(z)} = A\phi_1^2 + B\phi_2^2 \quad (1598)$$

Resolviendo similarmente a la iteración 1 se obtiene el nuevo valor propio λ_2 . Se puede lograr un mayor aproximación al valor exacto repitiendo los dos pasos de la iteración, lo que resulta en polinomios de mayor y mayor grado. Numéricamente se observa que con una tercera iteración la aproximación puede considerarse exacta.

- **Carga puntual en $x=0$ ($z=0$)**

Para el caso de una carga puntual aplicado en $x=0$ ($z=0$), la función $\alpha_{(z)}$:

$$\alpha_{(z)} = 1 \rightarrow f_{(z)} = q \quad (1599)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u''_{(z)} + (\lambda/H - \alpha^2)u'_{(z)} = 0 \quad (1600)$$

La expresión de $u_{(z)}$ es posible derivarlo como:

$$u_{(z)} = C_0 + C_1 \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2} z) + C_2 \operatorname{Sen}(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2} z) \quad (1601)$$

El sistema algebraico lineal resultante de las condiciones de borde, escrito en forma de matriz, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & \sin(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) \\ 0 & -\sin(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) \\ 0 & \cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1602)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular), es decir:

$$\cos(\sqrt{\lambda/H - \alpha^2}) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda/H - \alpha^2} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} / n = 1, 2, 3 \dots \quad (1603)$$

Resolviendo se encuentra que la carga crítica resulta:

$$q_{cr} = (m + 1)^2 K_s + (2n - 1)^2 \frac{\pi^2 K_b}{4 H^2} \quad (1604)$$

Para el caso cuando $n = 1$, se tiene:

$$q_{cr} = (m + 1)^2 K_s + \frac{\pi^2 K_b}{4 H^2} = q_{cr, flexión} + q_{cr, corte} \quad (1605)$$

Dado que la carga crítica resultante es independiente de alguna función de aproximación, puede considerarse exacta e idéntica a la que se obtendría aplicando el teorema de Föppl.

4.3.13.2 Caso 2

- **Cálculo de la matriz de transferencia**

Según las ecuaciones diferenciales de cuarto grado:

$$K_b u_{(x)}'''' + [q - (m + 1)^2 K_s] u_{(x)}'' = 0 \quad (1606)$$

Utilizando el método de operador diferencial:

$$D^2(D^2 + \xi^2) = 0$$

La expresión para $u_{(z)}$ y $u'_{(z)}$ se propone:

$$\begin{cases} u_{(z)} = C_0 + C_1 z + C_2 \cos(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sin(\sqrt{\xi} z) \\ u'_{(z)} = C_1 - C_2 \sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi} z) + C_3 \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z) \end{cases} \quad (1607)$$

Donde:

$$\left\{ \xi = \frac{q}{K_b} - \alpha^{*2}, \alpha^* = \sqrt{\frac{(m+1)^2 K_s}{K_b}} \right\} \quad (1608)$$

Las fuerzas internas como el momento flector y la fuerza cortante asociados al desplazamiento lateral resultan:

$$\begin{cases} M_{(z)} = K_b u''_{(x)} = -[\xi K_b \cos(\sqrt{\xi} z)] C_2 - [\xi K_b \sin(\sqrt{\xi} z)] C_3 \\ V_{(z)} = K_b u'''_{(x)} + [q - (m+1)^2 K_s] u'_{(x)} = [q - (m+1)^2 K_s] C_1 \end{cases} \quad (1609)$$

Escribiendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_i(z_i) \\ u'_i(z_i) \\ M_i(z_i) \\ V_i(z_i) \end{Bmatrix} = K_i(z_i) \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (1610)$$

Donde:

$$K_i(z_i) = \begin{bmatrix} 1 & z_i & \cos(\sqrt{\xi} z) & \sin(\sqrt{\xi} z) \\ 0 & 1 & -\sqrt{\xi} \sin(\sqrt{\xi} z) & \sqrt{\xi} \cos(\sqrt{\xi} z) \\ 0 & 0 & -\xi K_b \cos(\sqrt{\xi} z) & -\xi K_b \sin(\sqrt{\xi} z) \\ 0 & q - (m+1)^2 K_s & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (1611)$$

- **Análisis de estabilidad bajo cargas puntuales aplicadas a nivel de piso**

Aplicando secuencialmente desde la base hasta la parte superior de la viga y expresando la ecuación entre símbolo de producto:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u'_n(0) \\ M_n(0) \\ V_n(0) \end{Bmatrix} = \prod_{k=1}^n T_k(0) \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} = t \begin{Bmatrix} u_1(h_1) \\ u'_1(h_1) \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1612)$$

Donde:

$$t = \prod_{k=1}^n T_k(0) \quad (1613)$$

Esta ecuación expresa la relación entre la parte las fuerzas y desplazamientos de la parte superior y la base de la viga. Un punto importante a destacar es que el tamaño de la matriz de transferencia es de 4x4 y se mantiene constante en todos los pisos.

Según las condiciones de contorno definidas en el caso 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{(1)} = 0 \\ u'_{(1)} = 0 \\ K_b u''_{(0)} = 0 \\ (K_b u'''_{(0)} + [q - (m + 1)^2 K_s] u'_{(0)} = 0) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(h_1) = 0 \\ u'_1(h_1) = 0 \\ M_n(0) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{Bmatrix} \quad (1614)$$

Reemplazando:

$$\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ \theta_n(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1615)$$

Despejando momento flector y la fuerza cortante en la base del modelo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,3} & t_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1(h_1) \\ V_1(h_1) \end{Bmatrix} \quad (1616)$$

Que tiene una solución diferente a la trivial si el determinante es igual a cero (la matriz de coeficientes es singular). Resolviendo las cargas críticas de la viga.

4.4 VIGA DE REEMPLAZO EQUIVALENTE DEL EDIFICIO ALTO

Las figuras 101 y 102 muestran como el edificio es modelado como un sistema de elementos estructurales unidos por barras fijas inextensibles que representan al diafragma rígido. Se presentan dos opciones para el modelado del edificio: una viga de reemplazo equivalente tipo sándwich y una viga de reemplazo equivalente tipo sándwich generalizada.

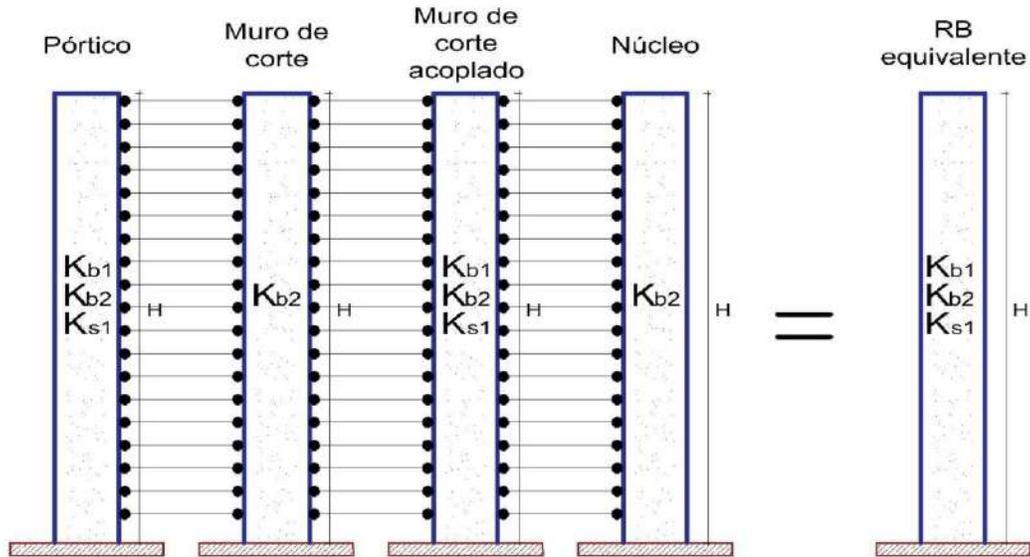


Figura 101. Elementos estructurales y la viga de reemplazo equivalente tipo viga sándwich.

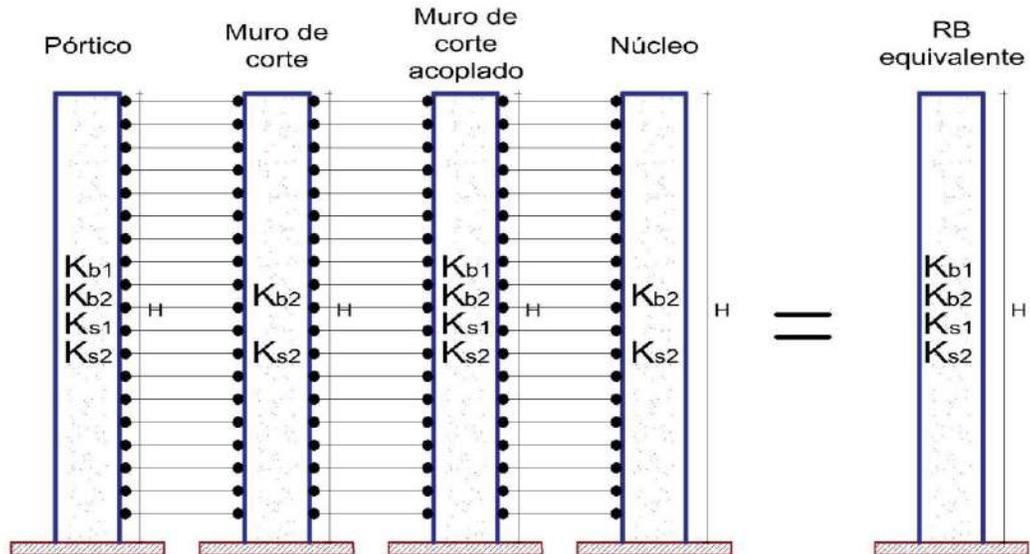


Figura 102. Elementos estructurales y la viga de reemplazo equivalente tipo viga sándwich generalizada.

Como se definió en capítulos anteriores, un sistema estructural puede esquematizarse mediante una viga de reemplazo apropiada. Sin embargo, resulta más complejo esquematizar todo el edificio alto mediante una sola viga de reemplazo apropiada que conecte todos los sistemas estructurales resistentes a la carga lateral. Se presentan seis estrategias que solucionan este problema:

4.4.1.1 Estrategia 1

En esta estrategia, se considera a cada sistema estructural como una viga de reemplazo tipo “Viga Sándwich” y las propiedades de rigidez equivalentes de la viga de reemplazo global del edificio se obtienen al sumar directamente las propiedades de rigidez de cada sistema estructural. Se sugieren las siguientes relaciones:

$$\left\{ K_{b1} = \sum_{k=1}^n K_{b1k}, K_{b2} = \sum_{k=1}^n K_{b2k}, K_{s1} = \sum_{k=1}^n K_{s1k} \right\} \quad (1617)$$

4.4.1.2 Estrategia 2

En esta estrategia, se considera a cada sistema estructural como una viga de reemplazo tipo “Viga Sándwich Generalizado” y las propiedades de rigidez equivalentes de la viga de reemplazo global del edificio se obtienen al sumar directamente las propiedades de rigidez de cada sistema estructural. Se sugieren las siguientes relaciones:

$$\left\{ K_{b1} = \sum_{k=1}^n K_{b1k}, K_{b2} = \sum_{k=1}^n K_{b2k}, K_{s1} = \sum_{k=1}^n K_{s1k}, K_{s1} = \sum_{k=1}^n K_{s2k} \right\} \quad (1618)$$

4.4.1.3 Estrategia 3

Potzta (2002) consideró a cada sistema estructural como una viga de reemplazo tipo “viga sándwich” y planteó la viga de reemplazo global del edificio basado en una formulación energética. La viga de reemplazo propuesta considera n elementos estructurales resistentes, donde el k -ésimo elemento tiene rigideces K_{b1k}, K_{s1k} y K_{b2k} y las rigideces de la viga sándwich que reemplaza la estructura del edificio están indicadas por K_{b1}, K_{s1} y K_{b2} .

Siguiendo a Potzta (2002), las rigideces equivalentes de la viga de reemplazo se derivan del equilibrio de la energía de deformación de la viga sándwich equivalente:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2} u''_{(x)}{}^2 \right\} dx \quad (1619)$$

De la derivación energética de las ecuaciones de movimiento, se deriva la siguiente propiedad:

$$K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}] - K_{b1} \theta''_{(x)} = 0 \quad (1620)$$

De la suma de las energías de deformación de cada sistema estructural:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2} u''_{(x)}{}^2 \right\} dx \\ = \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^n \left[K_{b1k} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1k} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2k} u''_{(x)}{}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (1621)$$

Aplicando un desplazamiento sinusoidal:

$$\begin{cases} u_{(x)} = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{H}x\right) \\ \theta_{(x)} = \theta_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right) \end{cases} \quad (1622)$$

De la propiedad derivada de la derivación energética:

$$\theta_0 = \frac{\left(\frac{\pi}{H}\right)}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} u_0 \quad (1623)$$

Reemplazando e integrando en la equivalencia de energías de deformación se obtiene:

$$\frac{4}{u_0^2 \left(\frac{\pi}{H}\right)^4} V = K_{b2} + \frac{K_{b1}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} = \sum_{k=1}^n \left[K_{b2k} + \frac{K_{b1k}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}} \right] \quad (1624)$$

Aplicando series de Taylor con respecto a $\left(\frac{1}{H}\right)^2$ aproximadamente en $\left(\frac{1}{H_0}\right)^2$:

$$K_{b2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b1} \left(-\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i = \sum_{k=1}^n \left\{ K_{b2k} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b1k} \left(-\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i \right\} \quad (1625)$$

Considerando los primeros tres términos de la serie; se obtiene:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{b2} + \frac{K_{b1}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} &= \sum_{k=1}^n \left[K_{b2k} + \frac{K_{b1k}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}} \right] \\ \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right) \right\} \\ \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^2 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^2 \right\} \end{aligned} \right. \quad (1626)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones, se obtiene:

$$\left\{ K_{b1} = \frac{1}{\frac{C}{B^2} - \frac{1}{l_0^2} \frac{B^3}{C^2}}, K_{b2} = A - \frac{B^2}{C}, K_{s1} = \pi^2 \frac{B^3}{C^2} \right\} \quad (1627)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]} \right] \\ B &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b0k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^2} \cdot \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}} \right\} \\ C &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b0k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^3} \cdot \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^2 \right\} \end{aligned} \right. \quad (1628)$$

4.4.1.4 Estrategia 4

Considerando a cada elemento estructural como una viga de reemplazo tipo “viga sándwich generalizada” se plantea la viga de reemplazo global del edificio basado en una formulación energética. La viga de reemplazo propuesta considera n elementos estructurales resistentes, donde el k -ésimo elemento tiene rigideces $K_{b1k}, K_{s1k}, K_{b2k}$ y K_{s2k} y las rigideces de la viga sándwich que reemplaza la estructura del edificio están indicadas por K_{b1}, K_{s1}, K_{b2} y K_{s2} .

Las rigideces equivalentes de la viga de reemplazo se derivan del equilibrio de la energía de deformación de la viga sándwich generalizada equivalente:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'^2 + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \quad (1629)$$

De la derivación energética de las ecuaciones de movimiento, se deriva la siguiente propiedad:

$$\begin{cases} K_{b1} \psi''(x) + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)] = 0 \\ K_{b2} \theta''(x) + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)] = 0 \end{cases} \quad (1630)$$

De la suma de las energías de deformación de cada sistema estructural:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ K_{b1} \psi'^2 + K_{s1} [u'(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2} \theta'(x)^2 + K_{s2} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^n \left\{ K_{b1k} \psi'^2 + K_{s1k} [u'(x) - \psi(x)]^2 + K_{b2k} \theta'(x)^2 + K_{s2k} [u'(x) - \theta(x)]^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (1631)$$

Aplicando un desplazamiento sinusoidal:

$$\begin{cases} u(x) = u_0 \sin\left(\frac{\pi}{H}x\right) \\ \varphi(x) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right) \\ \theta(x) = \theta_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right) \end{cases} \quad (1632)$$

De la propiedad derivada de la derivación energética:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\left(\frac{\pi}{H}\right)}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} u_0 \\ \theta_0 = \frac{\left(\frac{\pi}{H}\right)}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}} u_0 \end{array} \right\} \quad (1633)$$

Reemplazando e integrando en la equivalencia de energías de deformación se obtiene:

$$\frac{4}{u_0^2 \left(\frac{\pi}{H}\right)^4} V = \frac{K_{b1}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} + \frac{K_{b2}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{K_{b1k}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}} + \frac{K_{b2k}}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}} \right] \quad (1634)$$

Aplicando series de Taylor con respecto a $\left(\frac{1}{H}\right)^2$ aproximadamente en $\left(\frac{1}{H_0}\right)^2$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b1} \left(-\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b2} \left(-\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b1k} \left(-\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_{b2k} \left(-\pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right)^i}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^{i+1}} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l_0^2}\right)^i \right\} \quad (1635) \end{aligned}$$

Considerando los primeros cuatro términos de la serie; se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{K_{b1}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} + \frac{K_{b2}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{K_{b1k}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}} + \frac{K_{b2k}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}} \right] \right\} \\ & \left\{ \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right) + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right) \right. \\ & \left. = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right) + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^2 + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right)^2 \right. \\
& \quad \left. = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^2 + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right)^2 \right\} \right\} \\
& \left\{ \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^3 + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right)^3 \right. \\
& \quad \left. = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^3 + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right)^3 \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{1636}$$

Es decir;

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{K_{b1}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}} + \frac{K_{b2}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}} = A \\
& \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right) + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^2} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right) = B \\
& \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^2 + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^3} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right)^2 = C \\
& \frac{K_{b1}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b1}}{K_{s1}}\right)^3 + \frac{K_{b2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right]^4} \left(\pi^2 \frac{K_{b2}}{K_{s2}}\right)^3 = D
\end{aligned} \right. \tag{1637}$$

Donde:

$$\left. \begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{K_{b1k}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}} + \frac{K_{b2k}}{1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}} \right] \\
B &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^2} \cdot \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}} + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^2} \cdot \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}} \right\} \\
C &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^3} \cdot \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^2 + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^3} \cdot \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}} \right\} \\
D &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{K_{b1k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right]^4} \cdot \left(\pi^2 \frac{K_{b1k}}{K_{s1k}}\right)^3 + \frac{K_{b2k}}{\left[1 + \left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right]^4} \cdot \left(\pi^2 \frac{K_{b2k}}{K_{s2k}}\right)^3 \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (1638)$$

La rigideces características equivalentes puede obtenerse luego de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones.

4.4.1.5 Estrategia 5

Siguiendo la metodología propuesta por Zalka (2020), cada sistema estructural se modela de forma diferente según lo planteado en este proyecto de investigación.

La carga externa se distribuye en función a la rigidez de cada elemento estructural:

$$q_i(z) = p_i \cdot f(z) \quad (1639)$$

Donde $f(z)$ es la carga externa total que actúa en el edificio y q_i es el repartidor de la carga externa a los elementos estructurales individuales. Dado que el campo es lineal elástico, este repartidor de carga es posible utilizarlo tanto en fuerzas como en momentos. El valor del repartidor de la carga se define como:

$$p_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (1640)$$

Donde S_i es la rigidez lateral del i -ésimo elemento estructural. La rigidez lateral de un elemento estructural se define como:

$$S_i = \frac{1}{y_i(H)} \quad (1641)$$

Donde $y_i(H)$ es el máximo desplazamiento lateral superior del i-ésimo elemento estructural.

Cualquiera que sea el elemento estructural que se elija para evaluar el desplazamiento lateral del edificio, el resultado será el mismo. Por lo tanto, parece práctico elegir un muro de corte como el i-ésimo elemento estructural, ya que su ecuación es más simple. Es importante aclarar que, sin embargo, para calcular el repartidor de la carga externa en el elemento estructural, se requiere la determinación de la deflexión máxima de cada elemento estructural del sistema de arriostramiento, y, por lo tanto, es necesario resolver el desplazamiento lateral de todos los elementos estructurales presentes en el edificio.

El método es simple y de fácil aplicación. El inconveniente radica en que no es posible tener en cuenta la interacción directa entre los elementos estructurales y, por lo tanto, esta compleja interacción es ignorada.

4.4.1.6 Estrategia 6

La viga de reemplazo propuesta considera n subsistemas laterales resistentes a la carga, donde el k -ésimo elementos tipo “Viga Sándwich” tienen rigideces K_{b1k}, K_{b2k} y K_{s1k} ; y el j -ésimo elemento tipo “Viga de flexión (EBB)” tiene rigidez solo a la flexión local $K_{b1,j}$.

Las rigideces equivalentes de la viga de reemplazo se derivan del equilibrio de la energía de deformación de la viga SWB y EBB, respectivamente:

$$V = \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^{n1} \{K_{b1k} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1k} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2 + K_{b2k} u''_{(x)}{}^2\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \sum_{j=1}^{n2} [K_{b2j} u''_{(x)}{}^2] dx \quad (1642)$$

Ordenando adecuadamente:

$$V = \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^{n1} \{K_{b1k} \theta'_{(x)}{}^2 + K_{s1k} [\theta_{(x)} - u'_{(x)}]^2\} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \left(\sum_{k=1}^{n1} K_{b2k} + \sum_{j=1}^{n2} K_{b2j} \right) u''_{(x)}{}^2 dx \quad (1643)$$

En términos de energía, el incluir la energía de deformación de flexión local de la viga EBB en la sumatoria de las energías de deformación de flexión local de las vigas SWB solo aumenta la rigidez de flexión local de los elementos. Otro aspecto importante es que al incluir la rigidez a flexión local de la viga EBB en la viga SWB se asegura que se tenga en cuenta automáticamente la interacción entre ambas vigas (interacción directa).

Siguiendo este concepto, Zalka (2020) distribuyó la rigidez a flexión local total de los muros de corte y/o núcleos hacia los pórticos y/o muros de corte acoplados en función a su rigidez relativa.

$$S_i = \frac{1}{y_i(H)} \quad (1644)$$

Donde $y_i(H)$ es el máximo desplazamiento lateral superior del i -ésimo del pórtico y/o muro de corte acoplado. El valor del repartidor del momento se define como:

$$p_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (1645)$$

El sistema resultante consta de una serie de pórticos y/o muros de corte acoplados con una nueva rigidez a la flexión local (producto del reparto de la rigidez a la flexión local de los muros de corte y/o núcleos); luego se sigue el procedimiento descrito en la estrategia 5.

4.5 ANÁLISIS ESTRUCTURAL ESTÁTICO DEL EDIFICIO ALTO

4.5.1 Desplazamiento lateral del edificio

Cuando el edificio es doblemente simétrico en planta, los desplazamientos laterales se calculan directamente del análisis de la viga de reemplazo con sus rigideces características equivalentes calculadas según la estrategia adecuada.

4.5.2 Desplazamiento torsional del edificio

Existe una analogía conocida como “analogía de Vlasov” para estructuras de paredes delgadas solicitadas a flexión y torsión. Según esta analogía, las deflexiones, los momentos de flexión y las fuerzas de corte corresponden a la rotación, a los momentos de deformación y a los momentos de torsión respectivamente.

Con el objetivo de calcular la rotación del edificio solo haremos referencia a la analogía referente a las deflexiones y a las rotaciones. Establecemos las rigideces correspondientes a las deflexiones y a las rotaciones:

$$\begin{cases} K_{b1}^* = t^2 \cdot K_{b1} \\ K_{b2}^* = t^2 \cdot K_{b2} \\ K_{s1}^* = t^2 \cdot K_{s1} \\ K_{s2}^* = t^2 \cdot K_{s2} \end{cases} \quad (1646)$$

Donde t es la distancia desde el centro de corte del edificio al centro de corte de cada elemento de arriostramiento.

Se concluye que el análisis de la deflexión pura de un edificio alto se puede usar para realizar el análisis torsional si las rigideces de los elementos de arriostramiento encuentran su rigidez torsional equivalente.

Surge un inconveniente, no existe una metodología exacta para el cálculo del centro de corte de un edificio que consta de diferentes elementos estructurales. Para efectos de este proyecto de investigación, se seguirá el enfoque de Zalka (2020):

$$\left\{ \bar{X}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y,i} \cdot \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^n S_{y,i}}, \bar{Y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n S_{x,i} \cdot \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n S_{x,i}} \right\} \quad (1647)$$

Donde \bar{X}_i, \bar{Y}_i son las distancias perpendiculares de los centros de corte i -ésimo al origen del sistema de coordenadas, n es el número de elementos estructurales y S_i es la rigidez del i -ésimo elemento de arriostramiento calculado como la inversa de la deflexión máxima debido a una carga unitaria.

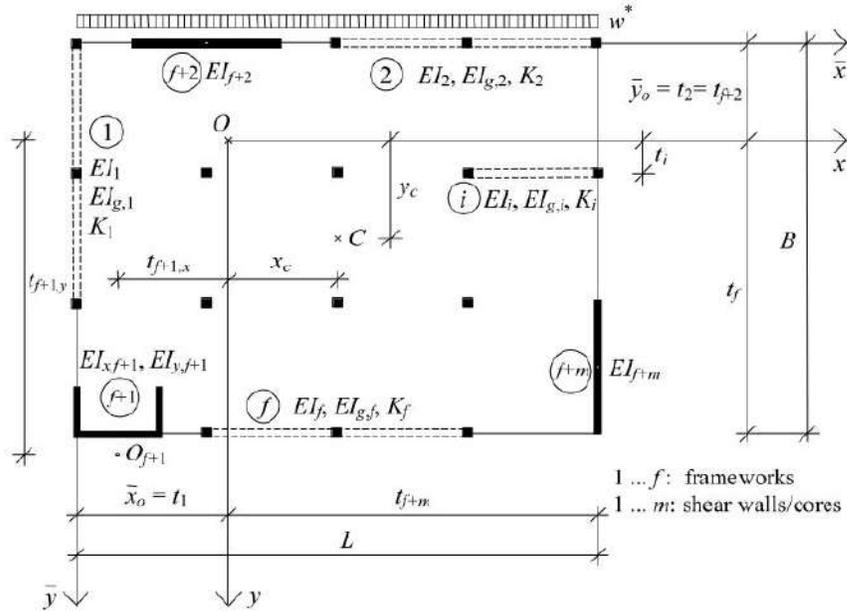


Figura 103. Elementos estructurales con su respectivo brazo de torsión (Zalka, 2020).

El momento torsional total del edificio es:

$$m = w \cdot X_c = w \left(\frac{L}{2} - \bar{X}_0 \right) \quad (1648)$$

El momento de torsión compartido en la i -ésimo unidad de arriostramiento es:

$$m = q_{w,i} \cdot m \quad (1649)$$

Donde el parámetro torsional $q_{w,i}$ cumple la misma función repartidora que el parámetro traslacional q_i utilizado en la sección anterior.

$$q_{w,i} = \frac{S_{w,i}}{\sum_{i=1}^{f+m} S_{w,i}} \quad (1650)$$

La rigidez torsional gobernante de la unidad de refuerzo i -ésimo se define como:

$$S_{w,i} = S_i \cdot t_i^2 = \frac{t_i^2}{y_{max}} = \frac{t_i^2}{y_H} \quad (1651)$$

Cualquiera que sea el elemento estructural que se elija para evaluar la rotación del edificio, el resultado será el mismo. Por lo tanto, parece práctico elegir un muro de corte, ya que su ecuación es más simple. Es importante aclarar que, sin embargo, para calcular el repartidor de la carga externa en el elemento estructural, se requiere la determinación de la deflexión máxima de cada elemento estructural del sistema de arriostramiento, y, por lo tanto, es necesario resolver el desplazamiento lateral de todos los elementos estructurales presentes en el edificio.

4.5.3 Desplazamiento acoplado lateral-torsional del edificio

Un concepto bien conocido por los ingenieros estructurales es que “no existe edificio sin torsión”. Si bien es cierto este concepto es relativo debido a que matemáticamente puede lograrse que el edificio sea doblemente simétrico, el término “excentricidad accidental” que esta provista en la mayoría de los códigos sísmicos del mundo, hace que esta definición sea absolutamente cierta.

Cuando un edificio alto se somete a una carga lateral horizontal, el edificio responde de manera compleja desarrollando dos fenómenos: desplazamiento traslacional puro y rotación alrededor del centro de rigidez del edificio.

El hecho de encontrarnos bajo un comportamiento lineal elástico del edificio, hace que, mediante el principio de superposición, ambos fenómenos se puedan separar, lo que permite analizar al edificio bajo un desplazamiento puramente lateral y bajo una rotación pura alrededor del centro de rigidez.

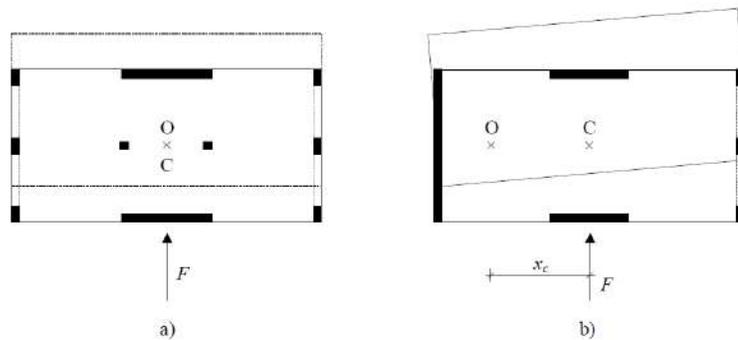


Figura 104. Planta estructural de un edificio a) Edificio simétrico, y b) Edificio asimétrico (Zalka, 2020).

Donde el punto “O” ubica al centro de masas y el punto “C” ubica al centro de rigidez.

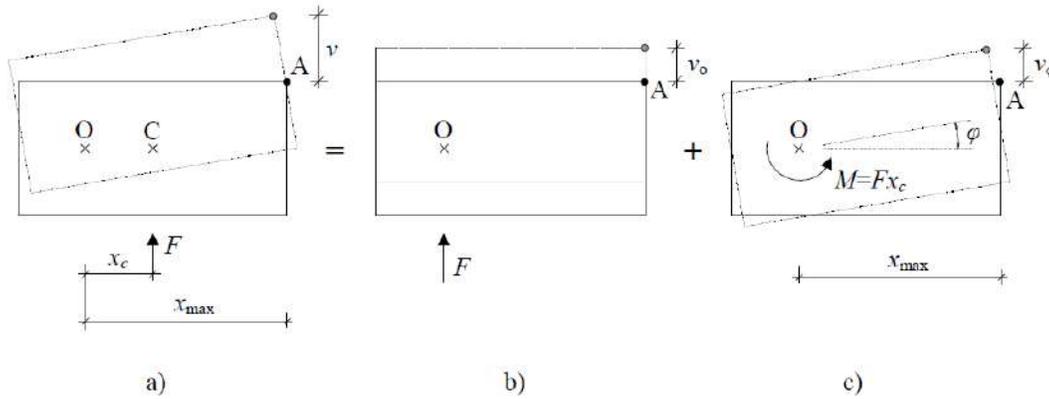


Figura 105. Desplazamiento total de un edificio asimétrico. a) v =desplazamiento máximo, b) v_0 =desplazamiento debido a una fuerza aplicada en su centro de rigidez, y c) v_φ =desplazamiento debido al momento torsional en su centro de rigidez (Zalka, 2020).

El comportamiento del edificio se analiza entonces transfiriendo la carga lateral horizontal ubicada en el centro de masa hacia el centro de rigidez produciendo un momento torsional debido al traslado de la fuerza lateral horizontal ($M = F \cdot X_c$). La carga horizontal desarrolla solo desplazamientos laterales mientras que el momento torsor desarrolla solo rotación en el edificio (alrededor del centro de rigidez).

El desplazamiento máximo del edificio se desarrolla en el punto más alejado respecto al centro de rigidez y haciendo uso del ángulo de rotación, se tiene:

$$v = v_0 + v_\varphi \quad (1652)$$

El desplazamiento máximo resulta:

$$v_{max} = v_{(H)} = v_{0(H)} + x_{max} \cdot \varphi_{(H)} \quad (1653)$$

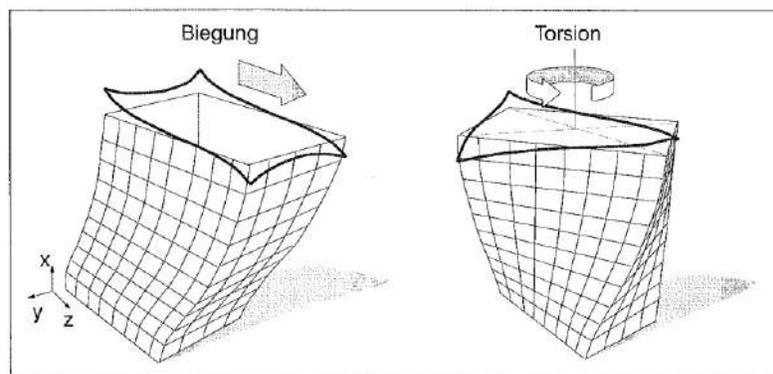


Figura 106. Desplazamiento lateral y torsional de un edificio (Schmidts, 1998).

4.6 ANÁLISIS ESTRUCTURAL DINÁMICO DEL EDIFICIO ALTO

4.6.1 Periodo lateral del edificio

Cuando el edificio es doblemente simétrico en planta, los periodos laterales se calculan directamente del análisis de la viga de reemplazo con sus rigideces características equivalentes calculadas según la estrategia adecuada.

4.6.2 Periodo torsional del edificio

Se utiliza la analogía de Vlasov para el cálculo de las rigideces características y se adopta el enfoque de Zalka (2020) para calcular el centro de corte:

$$\left\{ \bar{X}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n f_{y,i}^2 \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^n f_{y,i}^2}, \bar{Y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n f_{x,i}^2 \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n f_{x,i}^2} \right\} \quad (1654)$$

Donde f_i es la frecuencia del i-ésimo elemento de arriostramiento. Debe tenerse en cuenta que el factor de corrección por masa distribuida debe aplicarse a las rigideces características y la masa distribuida corresponde a la masa torsional e igual a la masa lateral multiplicada por el radio de giro al cuadrado.

4.6.3 Periodo acoplado lateral-torsional del edificio

Conocidas las frecuencias desacopladas laterales y torsionales, para calcular las frecuencias acopladas, Zalka (2020) propone la siguiente ecuación:

$$(f^2)^3 + a_2(f^2)^2 + a_1(f^2) + a_0 = 0 \quad (1655)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{f_x^2 f_y^2 f_\phi^2}{1 - t_x^2 - t_y^2}, a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\phi^2 f_x^2 + f_\phi^2 f_y^2}{1 - t_x^2 - t_y^2}, a_2 = \frac{f_x^2 t_x^2 + f_y^2 t_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\phi^2}{1 - t_x^2 - t_y^2} \\ t_x = \frac{x_c}{i_p}, t_y = \frac{y_c}{i_p} \end{array} \right\} \quad (1656)$$

La raíz más pequeña de la ecuación cúbica produce la frecuencia acoplada lateral torsional del edificio.

4.7 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL EDIFICIO ALTO

4.7.1 Carga crítica lateral del edificio

Cuando el edificio es doblemente simétrico en planta, la carga crítica lateral se calculan directamente del análisis de la viga de reemplazo con sus rigideces características equivalentes calculadas según la estrategia adecuada.

4.7.2 Carga crítica torsional del edificio

Se utiliza la analogía de Vlasov para el cálculo de las rigideces características y se adopta el enfoque de Zalka (2020) para calcular el centro de corte:

$$\left\{ \bar{X}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n N_{y,i} \cdot \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^n N_{y,i}}, \bar{Y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n N_{x,i} \cdot \bar{Y}_i}{\sum_{i=1}^n N_{x,i}} \right\} \quad (1657)$$

Donde N_i es la frecuencia del i -ésimo elemento de arriostramiento. Debe tenerse en cuenta que el factor de corrección por masa distribuida debe aplicarse a las rigideces características y la masa distribuida corresponde a la masa torsional e igual a la masa lateral multiplicada por el radio de giro al cuadrado.

4.7.3 Carga crítica acoplado lateral-torsional del edificio

Conocidas las cargas críticas desacopladas laterales y torsionales, para calcular las cargas críticas acopladas, Zalka (2020) propone la siguiente ecuación:

$$(N)^3 + b_2(N)^2 + b_1(N) + b_0 = 0 \quad (1658)$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} N_{cr,\varphi}}{1 - t_x^2 - t_y^2} \\ b_1 = \frac{N_{cr,x} N_{cr,y} + N_{cr,\varphi} N_{cr,x} + N_{cr,\varphi} N_{cr,y}}{1 - t_x^2 - t_y^2} \\ b_2 = \frac{N_{cr,x} t_x^2 + N_{cr,y} t_y^2 - N_{cr,x} - N_{cr,y} - N_{cr,\varphi}}{1 - t_x^2 - t_y^2} \\ t_x = \frac{x_c}{i_p}, t_y = \frac{y_c}{i_p} \end{array} \right\} \quad (1659)$$

La raíz más pequeña de la ecuación cúbica produce la carga crítica acoplada lateral torsional del edificio.

4.8 APLICACIONES NUMÉRICAS

Con el objetivo de verificar la eficiencia de los modelos de vigas de reemplazo desarrolladas en este proyecto de investigación, en esta sección se desarrollará el análisis de precisión y confiabilidad de la metodología propuesta. Para la comparación se utilizará los programas de elementos finitos SAP 2000 y ETABS 2016, los cuales se considerarán exactos. Una diferencia positiva significa una sobreestimación y una respuesta negativa significa una subestimación de la respuesta aproximada frente a la respuesta considerada exacta.

4.8.1 Muro de corte

Se analizarán 90 muros de corte que consiste de diez muros W1-W10 a quienes se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos). El módulo de elasticidad es $E = 25 \times 10^6$ kN/m², el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.20$, el módulo de corte es $G = 14.42 \times 10^6$ kN/m², la altura del piso es $h = 3.00$ m, la base es $b = 0.25$ m y la carga de viento uniformemente distribuida es $w = 5.00$ kN/m.

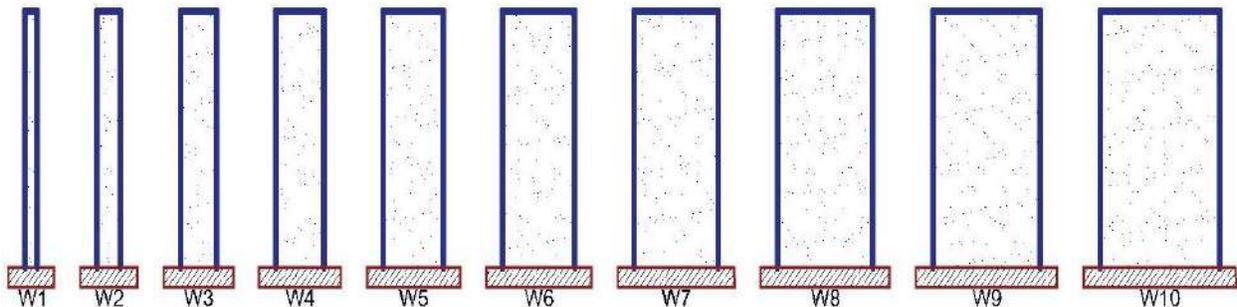


Figura 107. Muros de corte W1-W10 para el análisis de precisión.

Se realizó un análisis de precisión de la viga Timoshenko como viga de reemplazo para los muros de corte. El resumen de los análisis se da en la tabla 10 donde el término “rango de diferencia” se refiere a la diferencia entre la solución aproximada y la solución por FEM.

Tabla.10 *Precisión de la viga Timoshenko (TB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte W1-W10.*

Muros de corte	Rango de Diferencia (%)	Diferencia absoluta promedio (%)	Diferencia máxima (%)
Solución continua	-0.035% - 0.030%	0.005%	0.035%

La figura 108 muestra como varía el rango de diferencia a medida que aumenta la altura del elemento estructural.

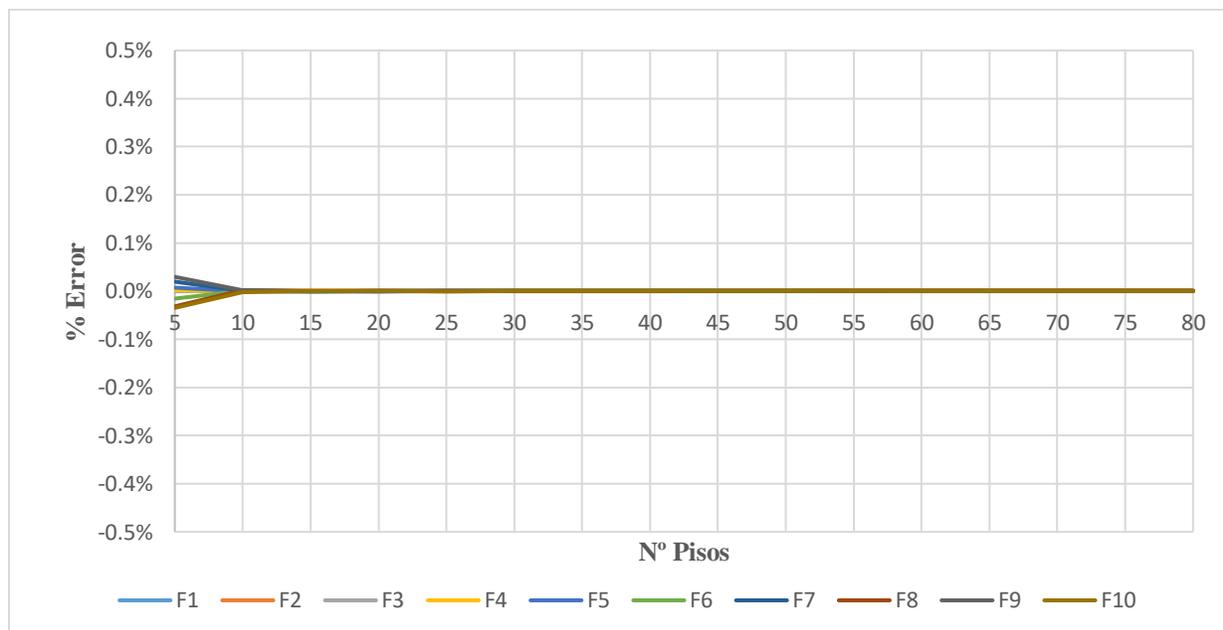


Figura 108. Precisión de la viga Timoshenko (TB) como viga de reemplazo para los muros de corte.

Un análisis de la tabla 10 y la figura 108 muestran la excelente precisión de la viga Timoshenko como viga de reemplazo para los muros de corte. Los resultados muestran un rango de diferencia entre el -0.035% y el 0.030%, una diferencia absoluta promedio del 0.005% y una diferencia máxima del 0.035%.

Con el objetivo de analizar la influencia del efecto del cortante, también se idealizó a los muros de corte como viga de flexión (EBB). El resumen se aprecia en la tabla 11.

Tabla.11 *Precisión de la viga de flexión (EBB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte W1-W10.*

Muros de corte	Rango de Diferencia (%)	Diferencia absoluta promedio (%)	Diferencia máxima (%)
Solución continua	-29.9% - 0.0%	29.9%	29.9%

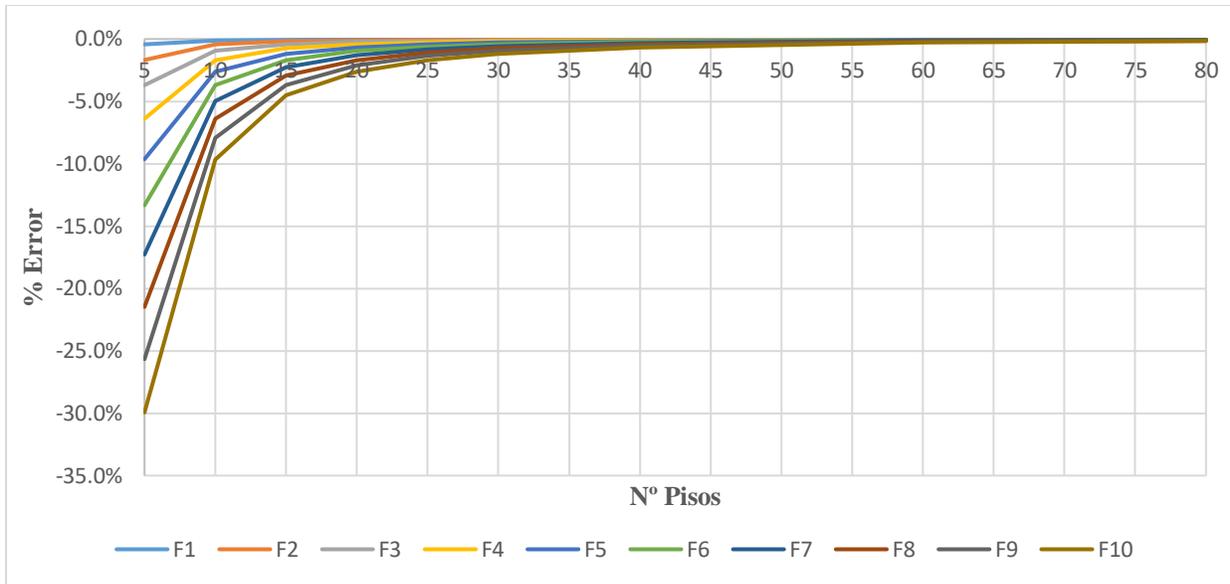


Figura 109. Precisión de la viga de flexión (EBB) como viga de reemplazo para los muros de corte.

Como era de esperar se esperan grandes errores para los muros menos esbeltos debido a que el efecto del cortante es importante y no puede ser descuidado. En todos los casos analizados se observa que el modelo de viga de flexión (EBB) subestima los resultados. Los resultados muestran un rango de diferencia entre el -29.9% y el 0%, una diferencia absoluta promedio del 29.9% y una diferencia máxima del 29.9%.

Se concluye que el utilizar la viga de reemplazo tipo “Viga Timoshenko (TB)” para analizar a los muros de corte es apropiado y muestra una excelente precisión considerándose exacto.

4.8.2 Pórtico

Se analizarán un total de 540 pórticos. El análisis consiste en 60 pórticos F1-F60, a quienes se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos) y el número de tramos en uno y cuatro. El módulo de elasticidad es $E = 25 \times 10^6$ kN/m², el coeficiente de Poisson es $\nu=0.20$, el módulo de corte es $G = 14.42 \times 10^6$ kN/m², la altura del piso es $h = 3.00$ m, la longitud a ejes entre columnas es $L = 6.00$ m y la carga de viento uniformemente distribuida es $w = 5.00$ kN/m. La tabla 12 muestra las secciones de los elementos estructurales viga y columna.

Tabla.12 Sección de columna y viga para pórticos F1-F60.

Pórtico	Viga		Columna		Pórtico	Viga		Columna	
	b (m)	h (m)	b (m)	h (m)		b (m)	h (m)	b (m)	h (m)
F1	0.4	0.4	0.4	0.4	F31	0.4	0.4	0.4	1.6
F2	0.4	0.6	0.4	0.4	F32	0.4	0.6	0.4	1.6
F3	0.4	0.8	0.4	0.4	F33	0.4	0.8	0.4	1.6
F4	0.4	1.0	0.4	0.4	F34	0.4	1.0	0.4	1.6
F5	0.4	1.2	0.4	0.4	F35	0.4	1.2	0.4	1.6
F6	0.4	0.4	0.4	0.6	F36	0.4	0.4	0.4	1.8
F7	0.4	0.6	0.4	0.6	F37	0.4	0.6	0.4	1.8
F8	0.4	0.8	0.4	0.6	F38	0.4	0.8	0.4	1.8
F9	0.4	1.0	0.4	0.6	F39	0.4	1.0	0.4	1.8
F10	0.4	1.2	0.4	0.6	F40	0.4	1.2	0.4	1.8
F11	0.4	0.4	0.4	0.8	F41	0.4	0.4	0.4	2.0
F12	0.4	0.6	0.4	0.8	F42	0.4	0.6	0.4	2.0
F13	0.4	0.8	0.4	0.8	F43	0.4	0.8	0.4	2.0
F14	0.4	1.0	0.4	0.8	F44	0.4	1.0	0.4	2.0
F15	0.4	1.2	0.4	0.8	F45	0.4	1.2	0.4	2.0
F16	0.4	0.4	0.4	1.0	F46	0.4	0.4	0.4	0.4
F17	0.4	0.6	0.4	1.0	F47	0.4	0.6	0.4	0.4
F18	0.4	0.8	0.4	1.0	F48	0.4	0.8	0.4	0.4
F19	0.4	1.0	0.4	1.0	F49	0.4	0.4	0.4	0.8
F20	0.4	1.2	0.4	1.0	F50	0.4	0.6	0.4	0.8
F21	0.4	0.4	0.4	1.2	F51	0.4	0.8	0.4	0.8
F22	0.4	0.6	0.4	1.2	F52	0.4	0.4	0.4	1.2
F23	0.4	0.8	0.4	1.2	F53	0.4	0.6	0.4	1.2
F24	0.4	1.0	0.4	1.2	F54	0.4	0.8	0.4	1.2
F25	0.4	1.2	0.4	1.2	F55	0.4	0.4	0.4	1.6
F26	0.4	0.4	0.4	1.4	F56	0.4	0.6	0.4	1.6
F27	0.4	0.6	0.4	1.4	F57	0.4	0.8	0.4	1.6
F28	0.4	0.8	0.4	1.4	F58	0.4	0.4	0.4	2.0
F29	0.4	1.0	0.4	1.4	F59	0.4	0.6	0.4	2.0
F30	0.4	1.2	0.4	1.4	F60	0.4	0.8	0.4	2.0

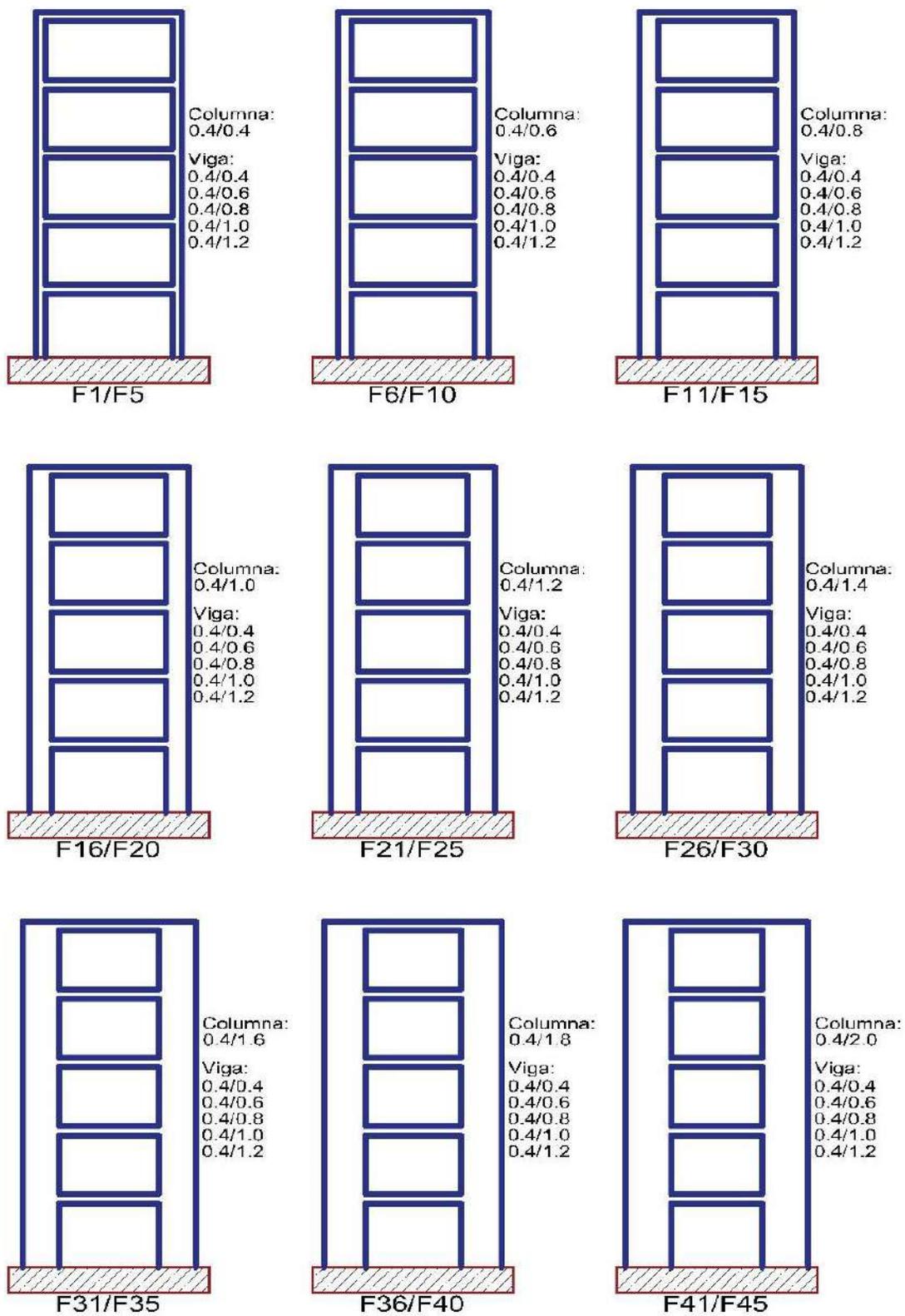


Figura 110. Pórticos F1-F45 de un tramo con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión

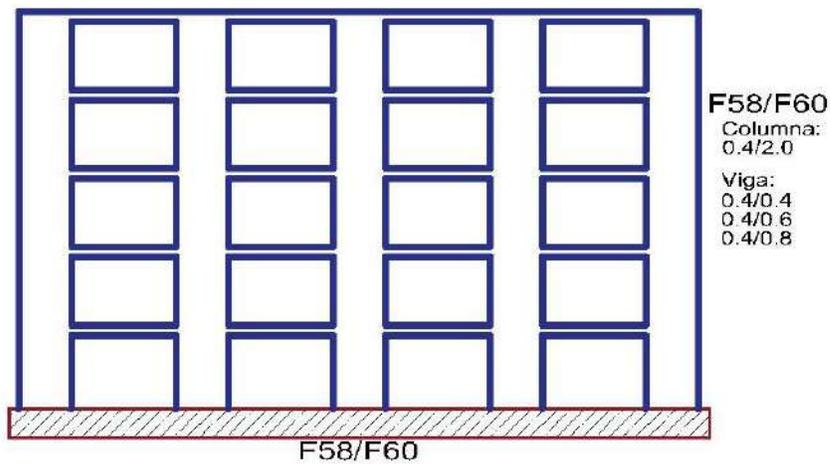
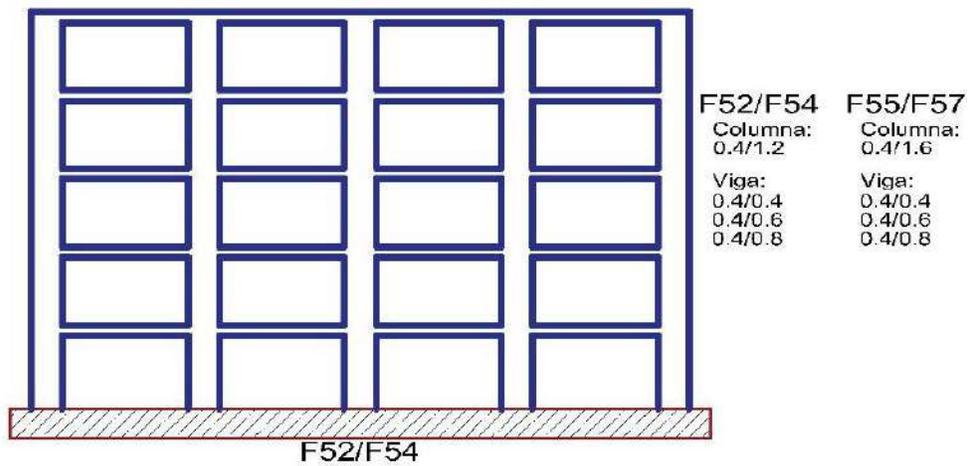
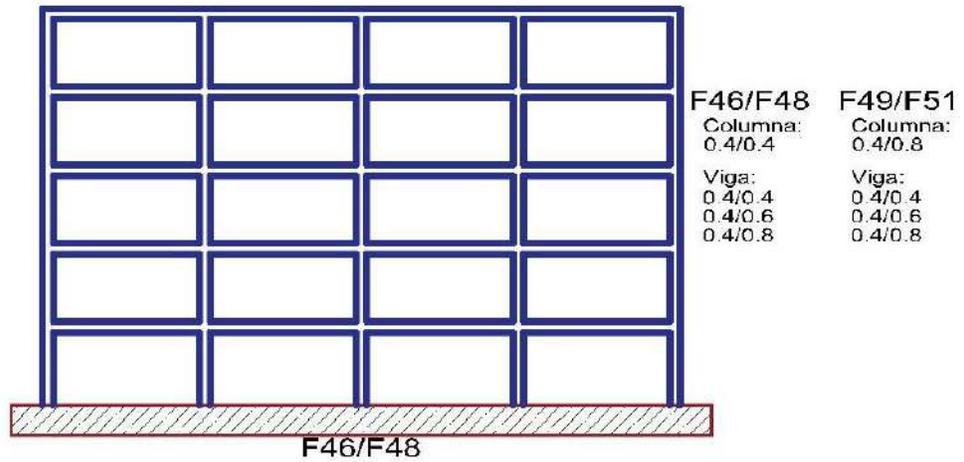


Figura 111. Pórticos F1-F45 de cuatro tramos con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión

- **Análisis de precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo**

Tabla.13 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo para $N \geq 5$ pisos.*

Pórticos $N \geq 5$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-1.50% - 5.33%	1.37%	5.33%

Tabla.14 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo $N \geq 10$ pisos.*

Pórticos $N \geq 10$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-0.49% - 1.79%	0.43%	1.79%

Tabla.15 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de un tramo $N \geq 15$ pisos.*

Pórticos $N \geq 15$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-0.49% - 0.53%	0.17%	0.53%

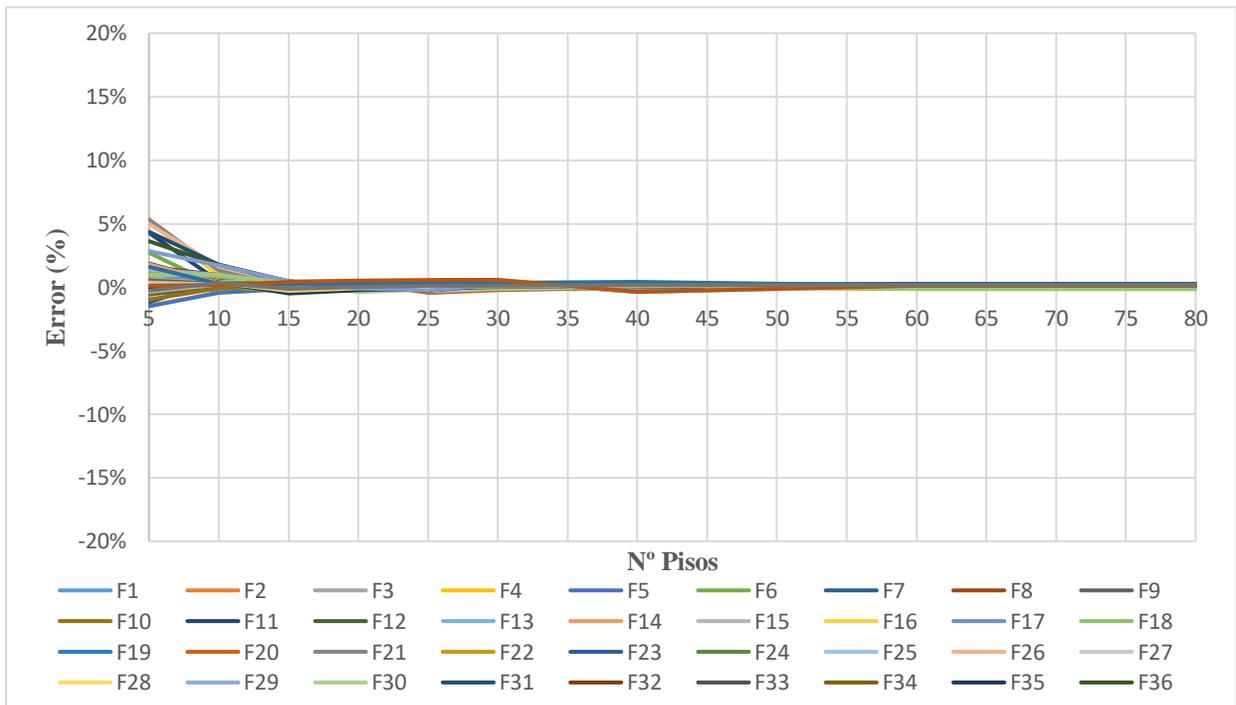


Figura 112. Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los pórticos F1-F45 de un tramo.

Tabla.16 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 5$ pisos.*

Pórticos $N \geq 5$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.61% - 2.95%	2.09%	5.61%

Tabla.17 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 10$ pisos.*

Pórticos $N \geq 10$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.61% - 0.44%	1.89%	5.61%

Tabla.18 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los pórticos F1-F27 de cuatro tramos para $N \geq 15$ pisos.*

Pórticos $N \geq 15$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.61% - 0.14%	1.83%	5.61%

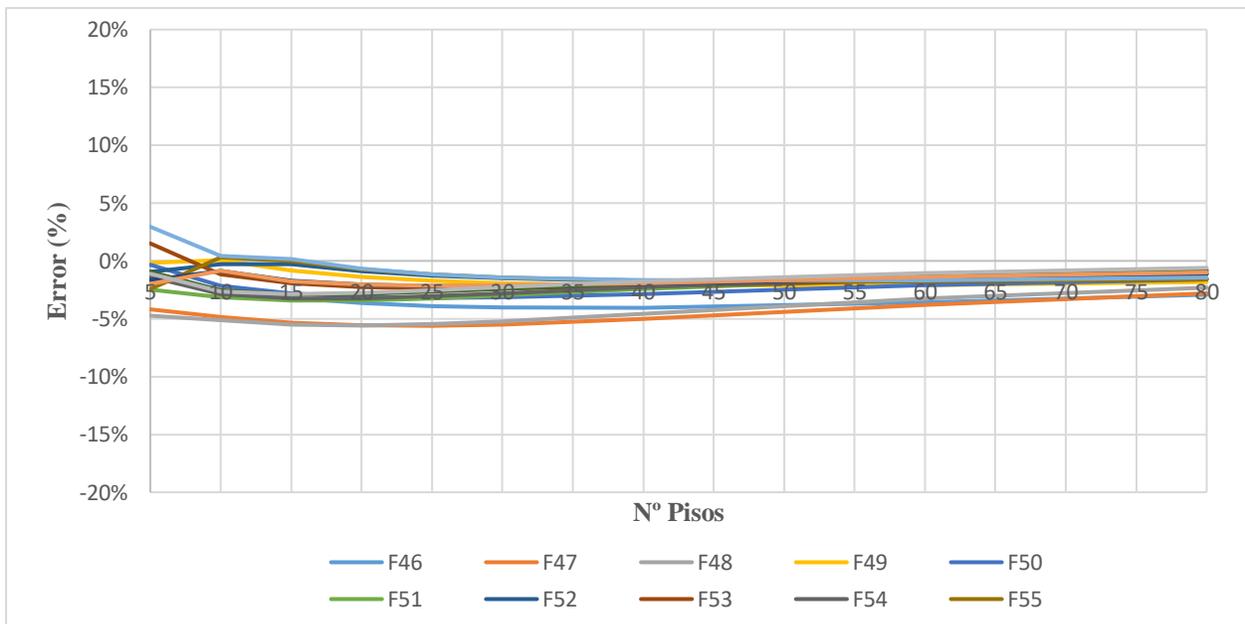


Figura 113. Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los pórticos F1-F45 cuatro tramos.

Se concluye que el utilizar la viga de reemplazo tipo viga sándwich (SWB) para analizar a los pórticos es apropiado y muestra una excelente precisión dentro de los criterios de ingeniería; además, se observa que el error disminuye drásticamente a medida que la altura del edificio aumenta.

4.8.3 Muro de corte acoplado

Se analizarán un total de 324 muros de corte acoplados. El análisis consiste en 36 muros de corte acoplados CSW1-CSW36, a quienes se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos) y el número de tramos en uno. El módulo de elasticidad es $E = 25 \times 10^6$ kN/m², el coeficiente de Poisson es $\nu=0.20$, el módulo de corte es $G = 14.42 \times 10^6$ kN/m², la altura del piso es $h = 3.00$ m, la longitud libre entre muros de corte es $L = 6.00$ m y la carga de viento uniformemente distribuida es $w = 5.00$ kN/m. La tabla 19 muestra las secciones de los elementos estructurales viga y muros de corte.

Tabla.19 Sección de muro y viga para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36.

CSW	Viga		Muro		CSW	Viga		Muro	
	b (m)	h (m)	b (m)	h (m)		b (m)	h (m)	b (m)	h (m)
CSW1	0.4	0.4	0.4	3.0	CSW19	0.4	0.4	0.4	6.0
CSW2	0.4	0.6	0.4	3.0	CSW20	0.4	0.6	0.4	6.0
CSW3	0.4	0.8	0.4	3.0	CSW21	0.4	0.8	0.4	6.0
CSW4	0.4	1.0	0.4	3.0	CSW22	0.4	1.0	0.4	6.0
CSW5	0.4	1.2	0.4	3.0	CSW23	0.4	1.2	0.4	6.0
CSW6	0.4	1.5	0.4	3.0	CSW24	0.4	1.5	0.4	.0
CSW7	0.4	0.4	0.4	4.0	CSW25	0.4	0.4	0.4	7.0
CSW8	0.4	0.6	0.4	4.0	CSW26	0.4	0.6	0.4	7.0
CSW9	0.4	0.8	0.4	4.0	CSW27	0.4	0.8	0.4	7.0
CSW10	0.4	1.0	0.4	4.0	CSW28	0.4	1.0	0.4	7.0
CSW11	0.4	1.2	0.4	4.0	CSW29	0.4	1.2	0.4	7.0
CSW12	0.4	1.5	0.4	4.0	CSW30	0.4	1.5	0.4	7.0
CSW13	0.4	0.4	0.4	5.0	CSW31	0.4	0.4	0.4	8.0
CSW14	0.4	0.6	0.4	5.0	CSW32	0.4	0.6	0.4	8.0
CSW15	0.4	0.8	0.4	5.0	CSW33	0.4	0.8	0.4	8.0
CSW16	0.4	1.0	0.4	5.0	CSW34	0.4	1.0	0.4	8.0
CSW17	0.4	1.2	0.4	5.0	CSW35	0.4	1.2	0.4	8.0
CSW18	0.4	1.5	0.4	5.0	CSW36	0.4	1.5	0.4	8.0

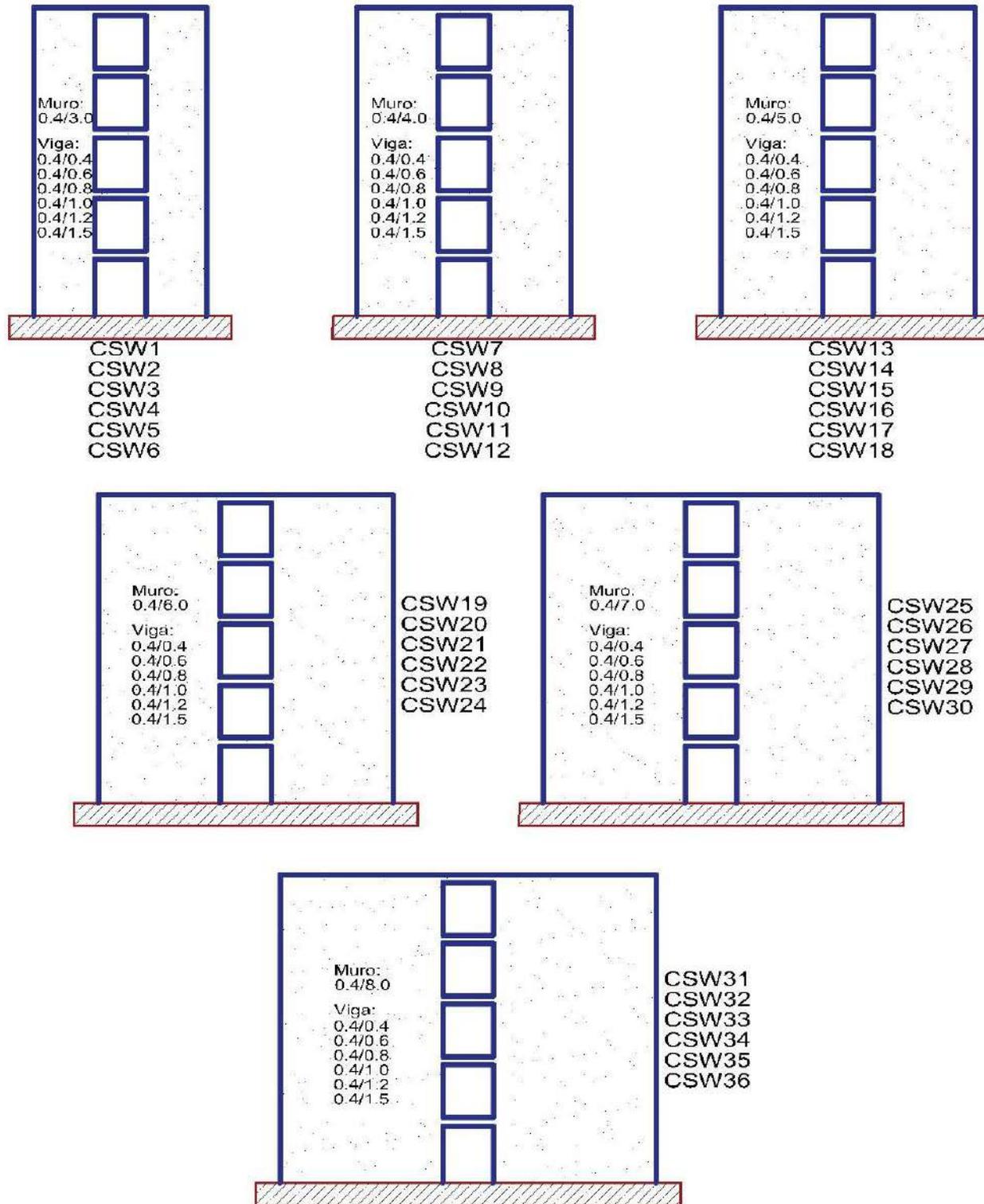


Figura 114. Muros de corte acoplados CSW 1-36 de un tramo con sección transversal (base/peralte) en metros para el análisis de precisión.

Análisis de precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo

- No se toma en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte

Las tablas 20 y 21 muestran los resultados del análisis estructural de los muros de corte acoplados modelados como vigas sándwich sin tener en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte.

Tabla.20 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.*

CSW $N \geq 10$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-23.39% - 1.21%	10.22%	23.39%

Tabla.21 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.*

CSW $N \geq 15$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-13.34% - 1.21%	5.83%	13.34%

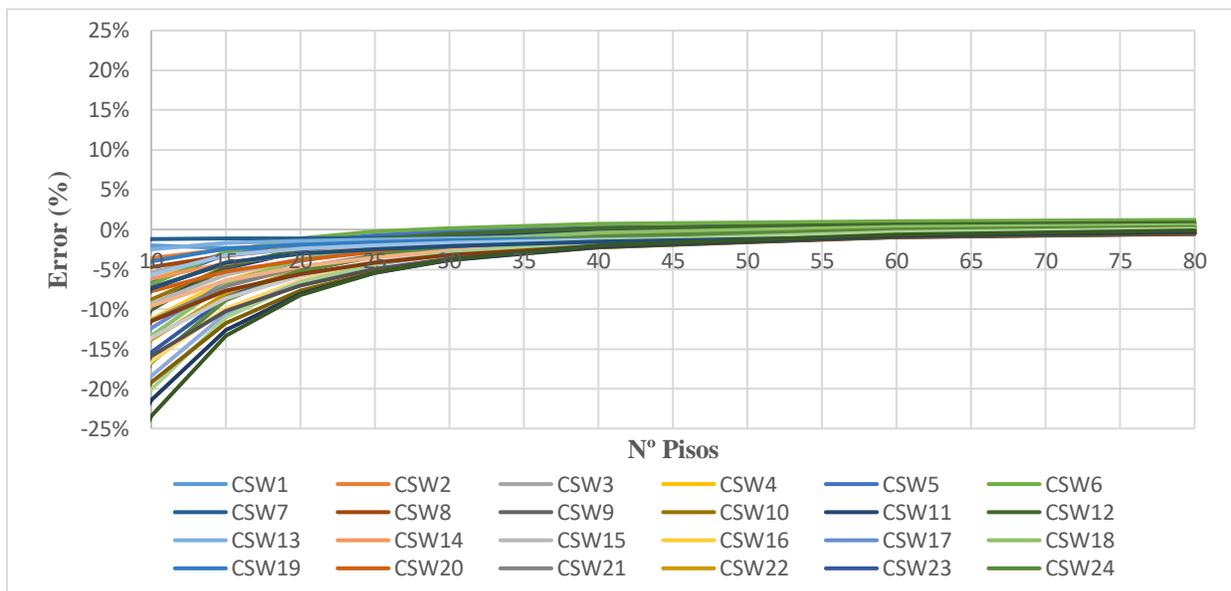


Figura 115. Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.

Se observa que el no incluir la rigidez al corte local de los muros de corte en los primeros pisos conduce a errores que no son despreciables.

- Se toma en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte

Las tablas 22 y 23 muestran los resultados del análisis estructural de los muros de corte acoplados modelados como vigas sándwich teniendo en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte.

Tabla.22 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.*

CSW $N \geq 10$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.42% - 7.43%	2.19%	7.43%

Tabla.23 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.*

CSW $N \geq 15$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-2.26% - 7.43%	1.56%	7.43%

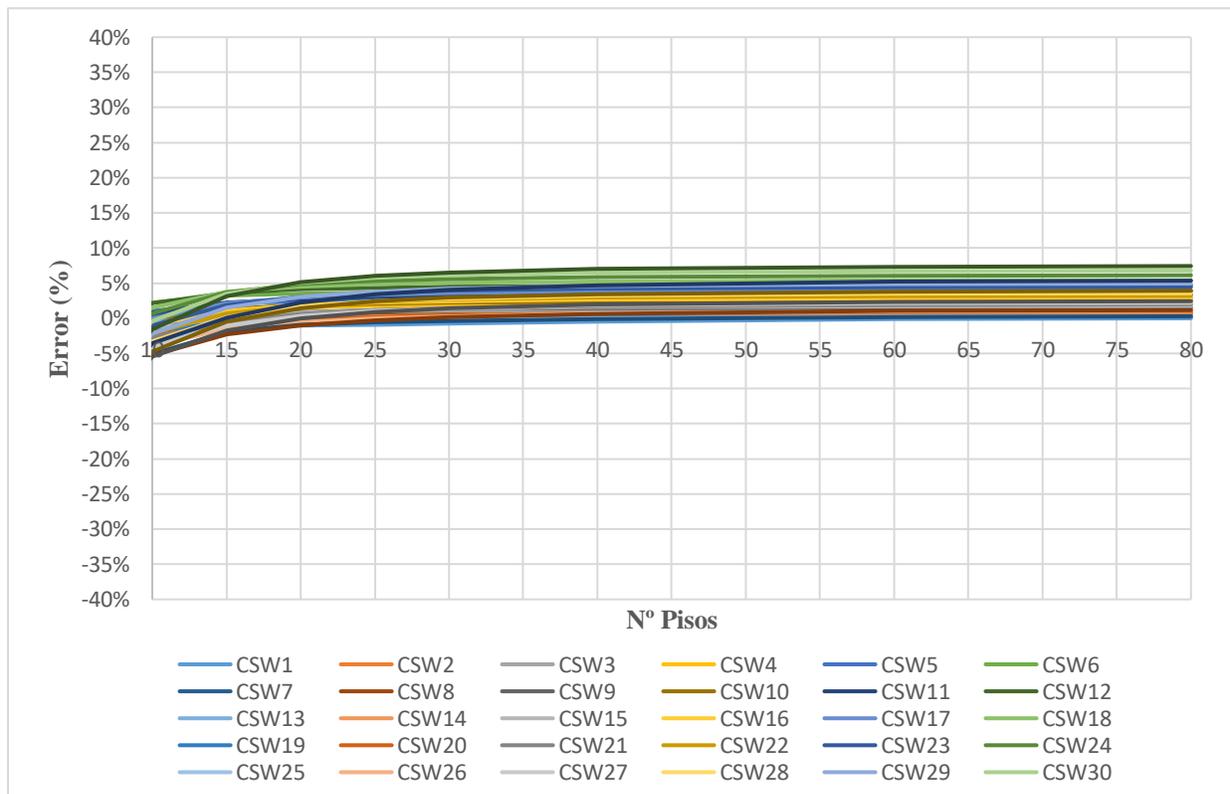


Figura 116. Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.

Se observa que el incluir la rigidez al corte local de los muros de corte en los primeros pisos reduce drásticamente los errores.

- Se toma en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte solo en los primeros pisos

Las tablas 24 y 25 muestran los resultados del análisis estructural de los muros de corte acoplados modelados como vigas sándwich teniendo en cuenta la rigidez al corte local de los muros de corte en los primeros pisos y despreciando la rigidez al corte local de los muros en los pisos superiores.

Tabla.24 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 10$ pisos.*

CSW $N \geq 10$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.44% - 5.11%	1.13%	5.44%

Tabla.25 *Precisión de la viga sándwich (SWB) para el análisis de deflexión máxima de los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo $N \geq 15$ pisos.*

CSW $N \geq 15$	Rango de Diferencia (%)	Diferencia Absoluta Promedio (%)	Diferencia Máxima (%)
Solución continua	-5.44% - 5.11%	0.56%	5.44%

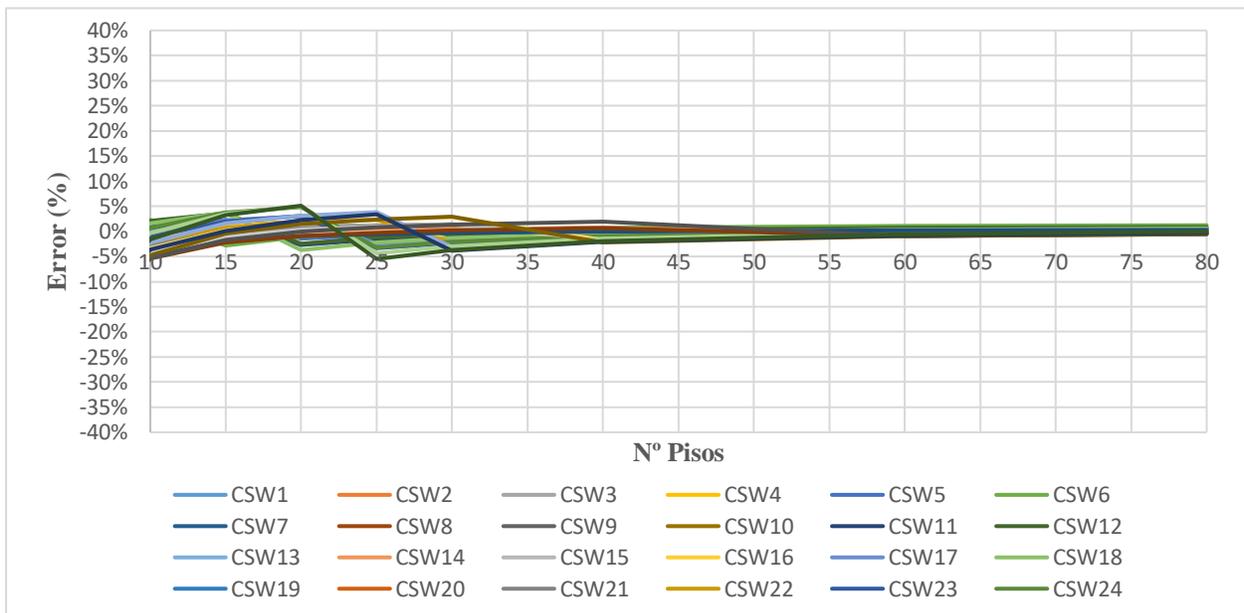


Figura 117. Precisión de la viga sándwich (SWB) como viga de reemplazo para los muros de corte acoplados CSW1-CSW36 de un tramo.

El modelo de viga sándwich que incluyó el corte local de los muros en los primeros pisos e ignoró el corte local de los muros en los pisos superiores ha demostrado una excelente precisión con error máximo del 5% y por lo tanto, se concluye que el utilizar la viga de reemplazo tipo viga sándwich (SWB) para analizar a los muros de corte acoplados es apropiado y muestra una excelente precisión dentro de los criterios de ingeniería.

4.8.4 Pórtico de concreto armado

Se analizará un total de 18 pórticos. El análisis consiste en dos pórticos a quienes se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos) y el número de tramos en dos y tres. Las propiedades mecánicas se resumen en la tabla 26.

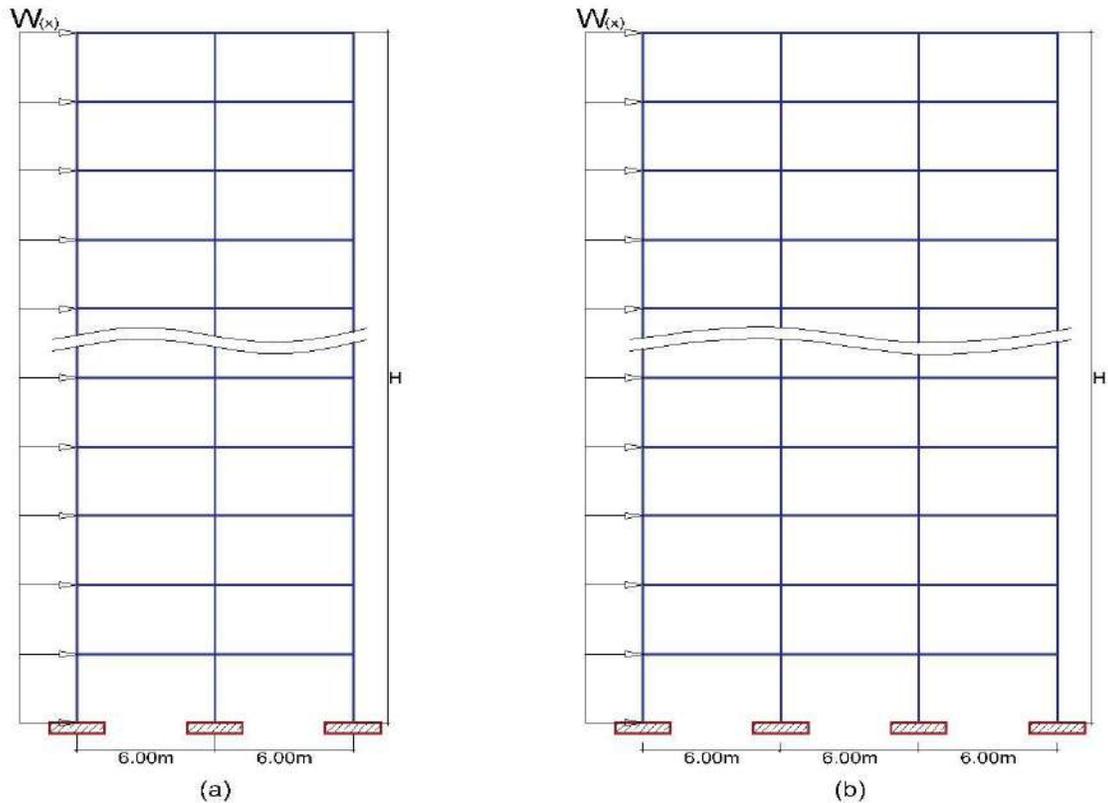


Figura 118. Pórtico de concreto: (a) un tramo (b) dos tramos.

Tabla.26 Propiedades estructurales y geometrías de los pórticos.

Altura del piso	3	m
Longitud a ejes de columnas	6	m
Peralte de viga	0.7	m
Ancho de viga	0.4	m
Peralte de columna	0.4	m
Ancho de columna	0.4	m
Módulo de elasticidad	25000000	kN/m ²
Densidad de masa por unidad de longitud	50	kN/m
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Carga uniformemente distribuida	5	kN/m

4.8.4.1 Análisis estático

Las figuras 119 y 120 demuestran la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del 1.41% para el pórtico de dos tramos y del 2.10% para el pórtico de tres tramos. Es importante mencionar que el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico. Además, puede observarse la tendencia casi exacta del análisis con la longitud a ejes de las vigas y considerando zona rígida en los nudos.

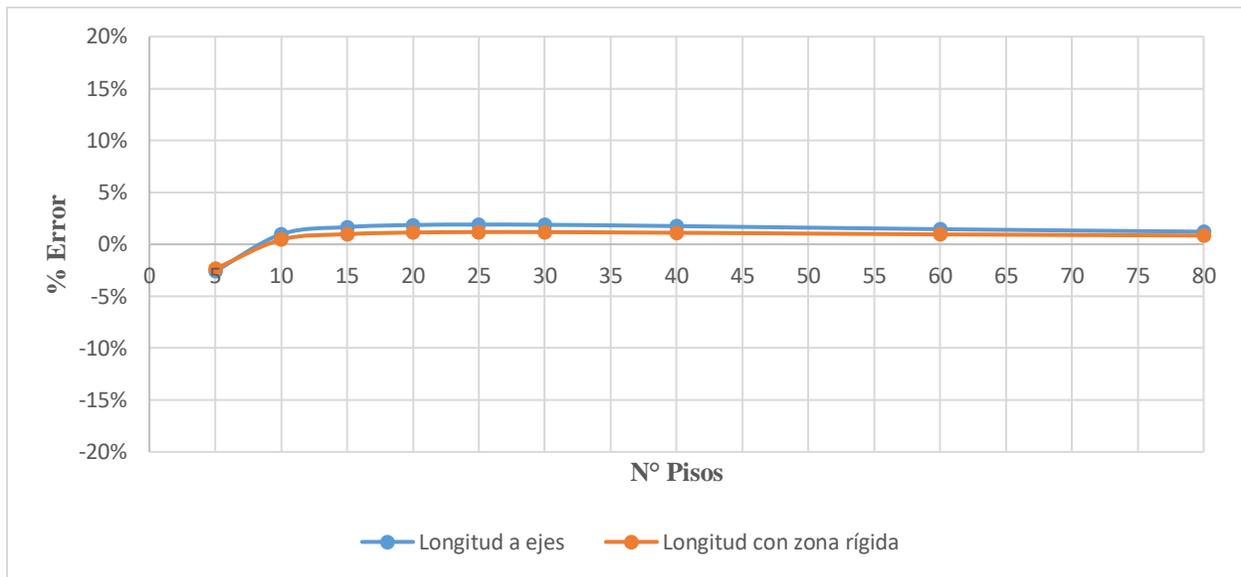


Figura 119. Precisión del desplazamiento máximo del pórtico de dos tramos.

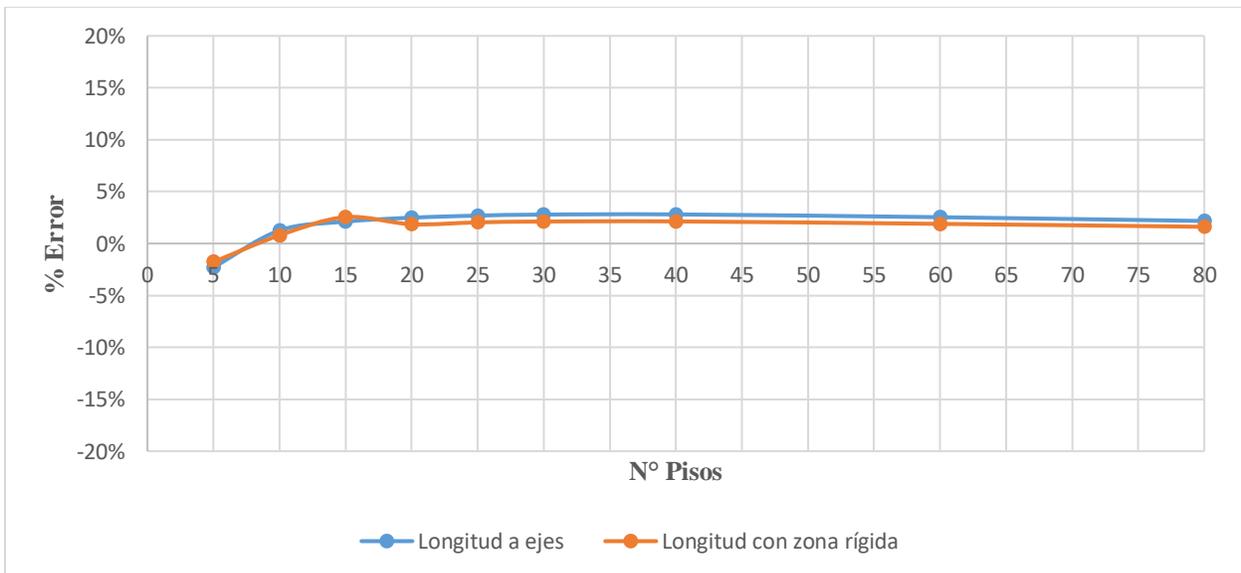


Figura 120. Precisión del desplazamiento máximo del pórtico de tres tramos.

4.8.4.2 Análisis dinámico

Los resultados son similares al caso estático. Las figuras 121 y 122 demuestran la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del 1.45% para el pórtico de dos tramos y del 1.47% para el pórtico de tres tramos. Es importante mencionar que el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico. Además, puede observarse la tendencia casi exacta del análisis con la longitud a ejes y considerando zona rígida en los nudos.

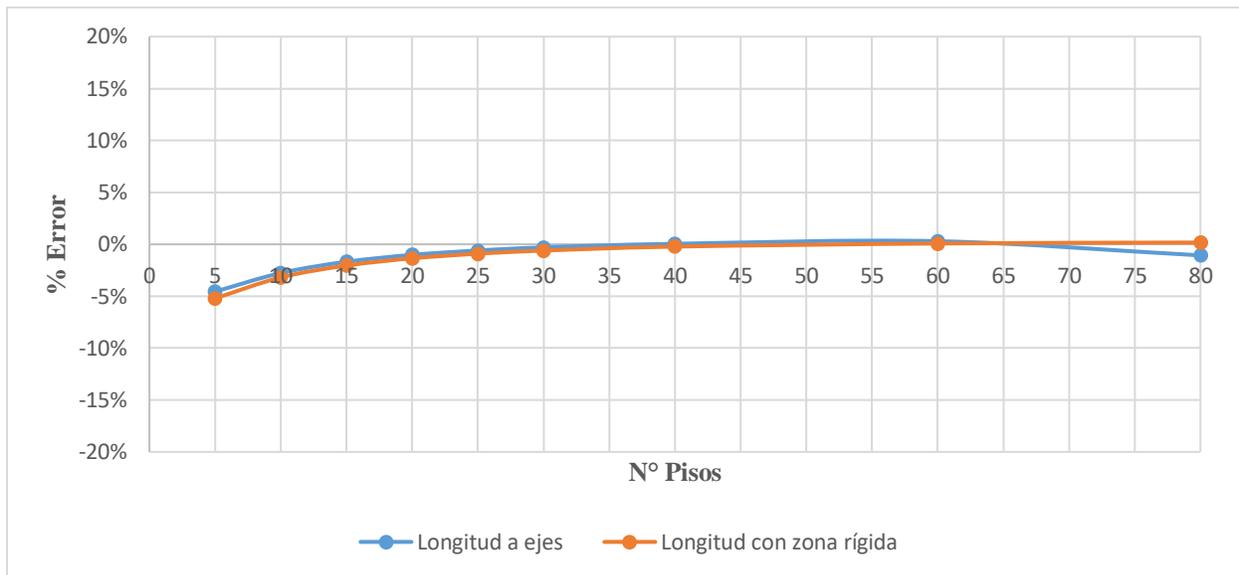


Figura 121. Precisión del periodo fundamental del pórtico de dos tramos.

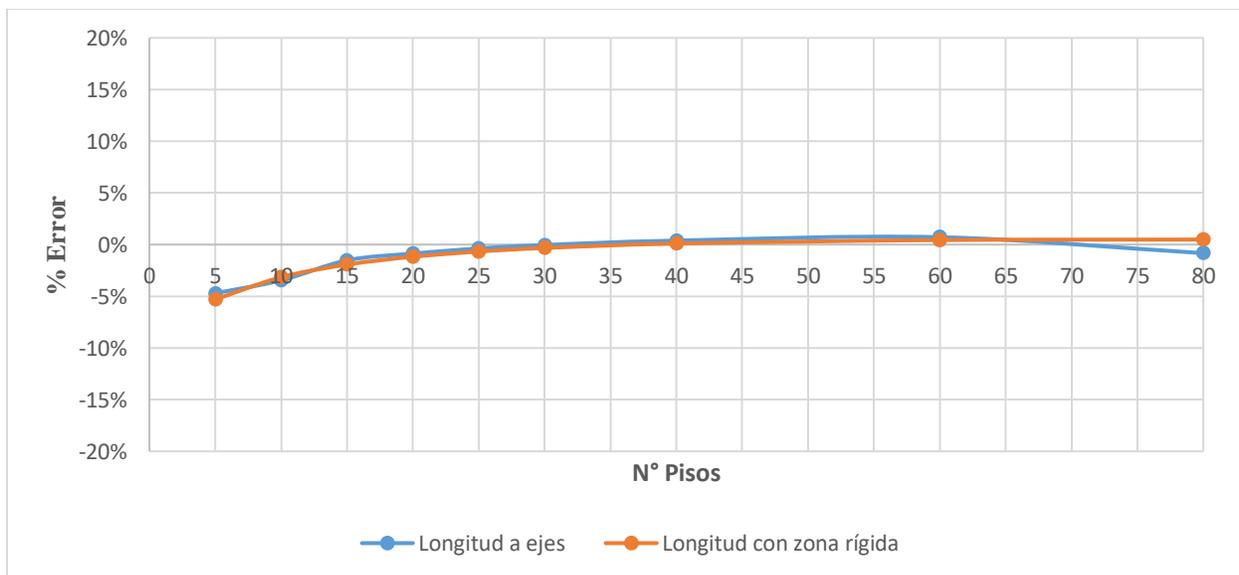


Figura 122. Precisión del periodo fundamental del pórtico de tres tramos.

4.8.4.3 Análisis de estabilidad

Las figuras 123 y 124 demuestran la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del 1.62% para el pórtico de dos tramos y del 1.01% para el pórtico de tres tramos. Es importante mencionar que se utilizó solo cuatro iteraciones para el cálculo de la carga crítica, un mayor número de iteraciones conduciría a un error más pequeño. Además, se encontró que a medida que el valor del parámetro α crece se necesitan un mayor de número de iteraciones para un valor más cercano al exacto.

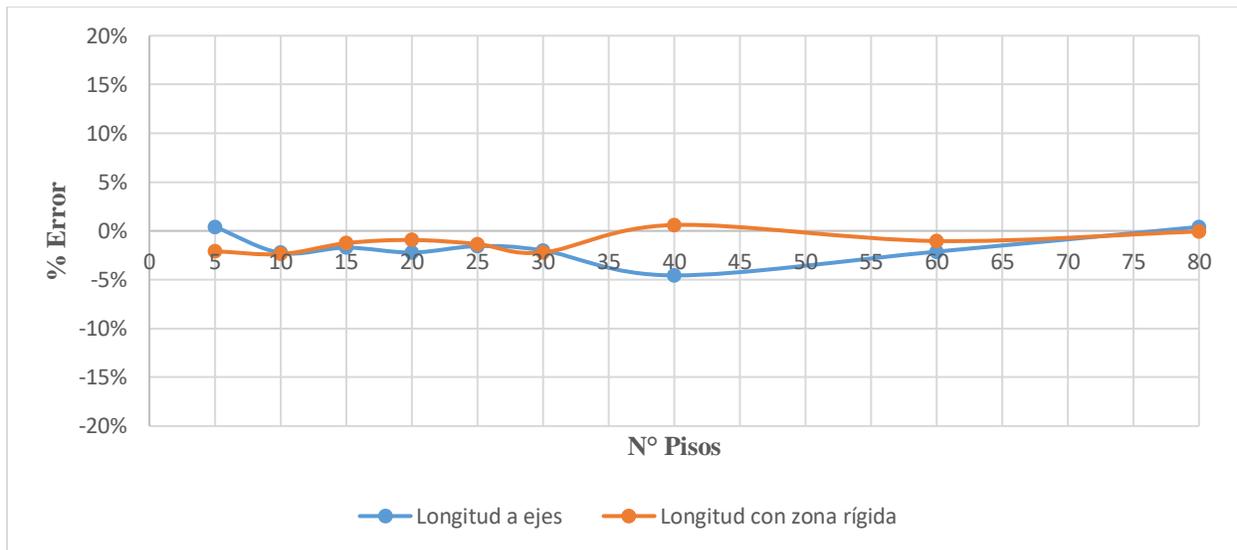


Figura 123. Precisión de la carga crítica del pórtico de dos tramos.

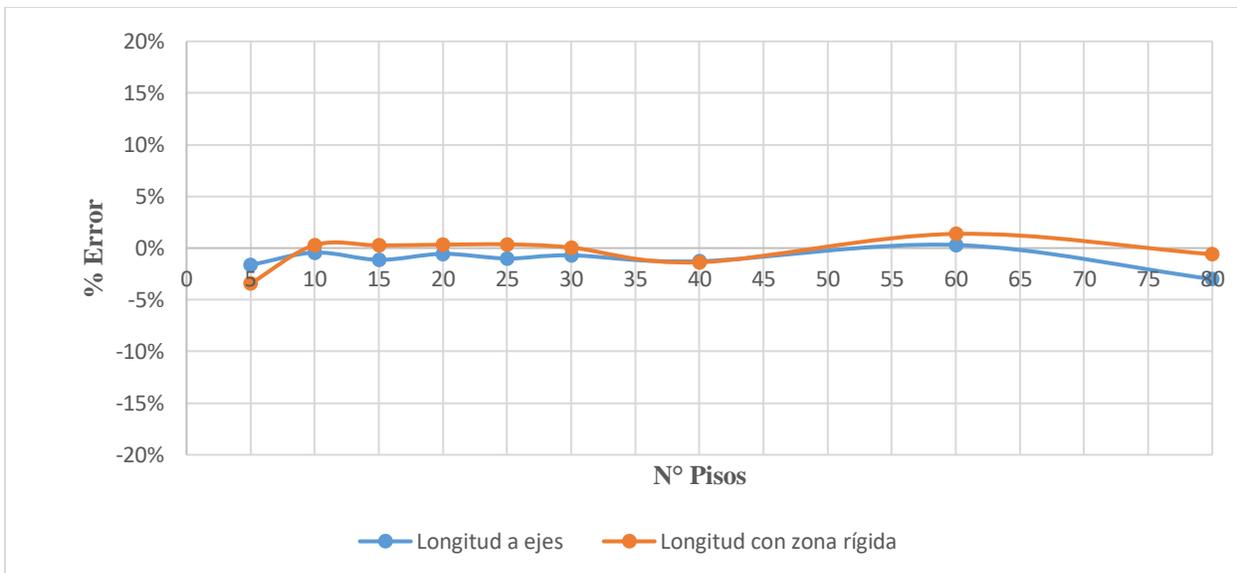


Figura 124. Precisión de la carga crítica del pórtico de tres tramos.

4.8.5 Muro de corte acoplado

Se analizará un total de 9 muros de corte acoplados. El análisis consiste en un muro de corte acoplado a quien se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos). Las propiedades mecánicas se resumen en la tabla 27.

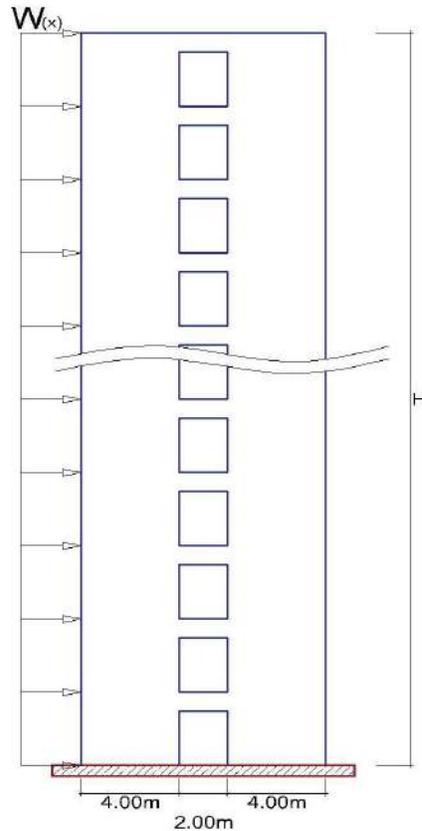


Figura 125. Muro de corte acoplado.

Tabla.27 Propiedades estructurales y geometrías del muro de corte acoplado.

Altura del piso	3	m
Longitud a ejes de muros de corte	6	m
Peralte de viga	0.8	m
Ancho de viga	0.4	m
Peralte del muro de corte	4.0	m
Ancho del muro de corte	0.4	m
Módulo de elasticidad	25000000	kN/m ²
Densidad de masa por unidad de longitud	50	kN/m
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Carga uniformemente distribuida	5	kN/m

4.8.5.1 Análisis estático

La figura 126 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del -2.20% para análisis a ejes de las vigas y del 1.80% para el caso de considerar zona rígida en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico.

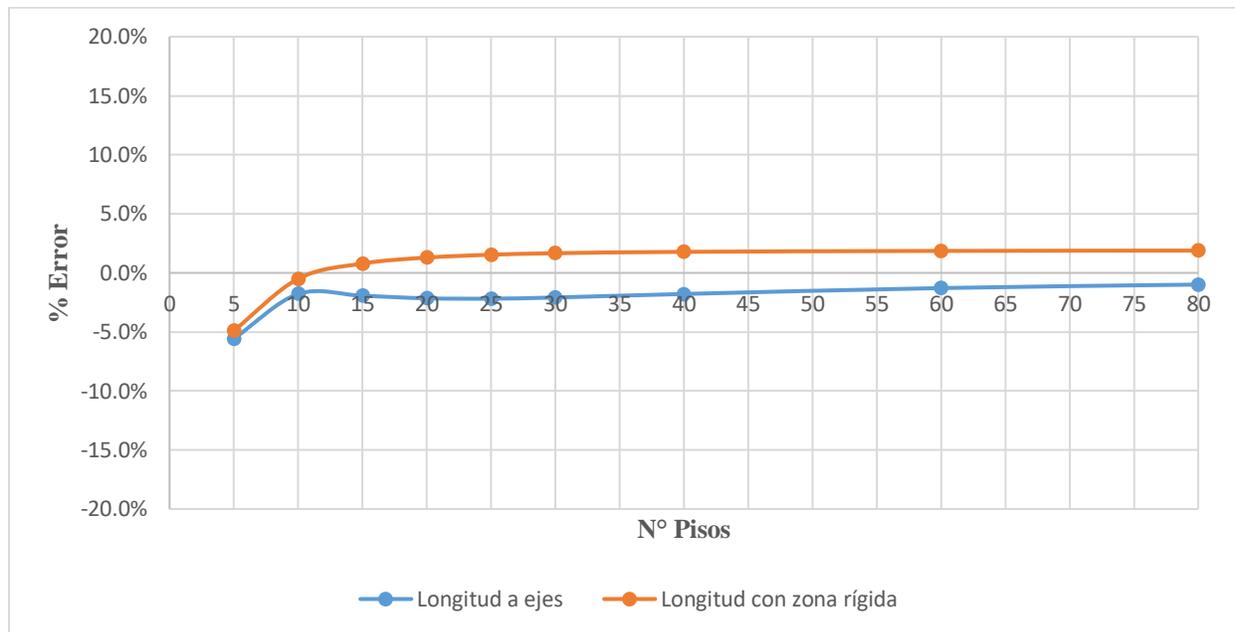


Figura 126. Precisión del desplazamiento máximo del muro de corte acoplado.

4.8.5.2 Análisis dinámico

Los resultados son similares al caso estático. La figuras 127 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró un error promedio del -1.01% para el caso de longitud a ejes y del 0.95% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico.

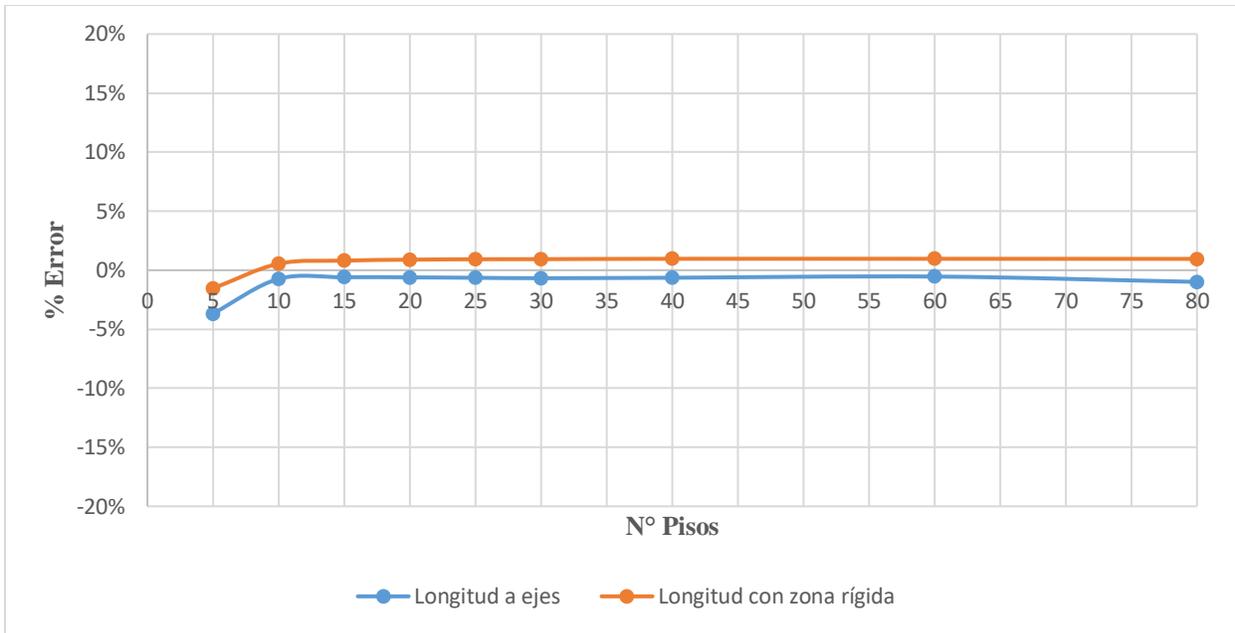


Figura 127. Precisión del periodo fundamental del muro de corte acoplado.

4.8.5.3 Análisis de estabilidad

La figura 128 demuestra la precisión de la solución aproximada. Se utilizó solo cuatro iteraciones y se encontró un error promedio del 2.54% para el caso de longitud a ejes y del 2.84% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos.

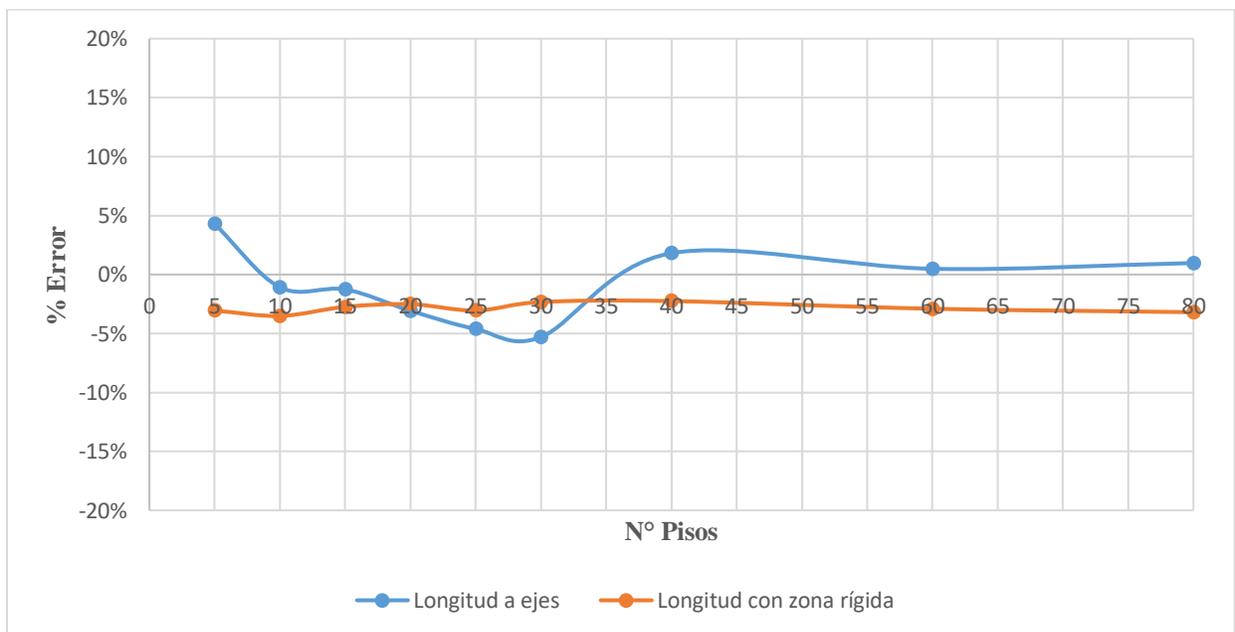


Figura 128. Precisión de la carga crítica del muro de corte acoplado.

4.8.6 Edificio de pórticos

Se analizará un total de 9 edificios de pórticos. El análisis consiste en un edificio de pórtico de tres tramos a quien se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos). Las propiedades mecánicas se resumen en la tabla 28.

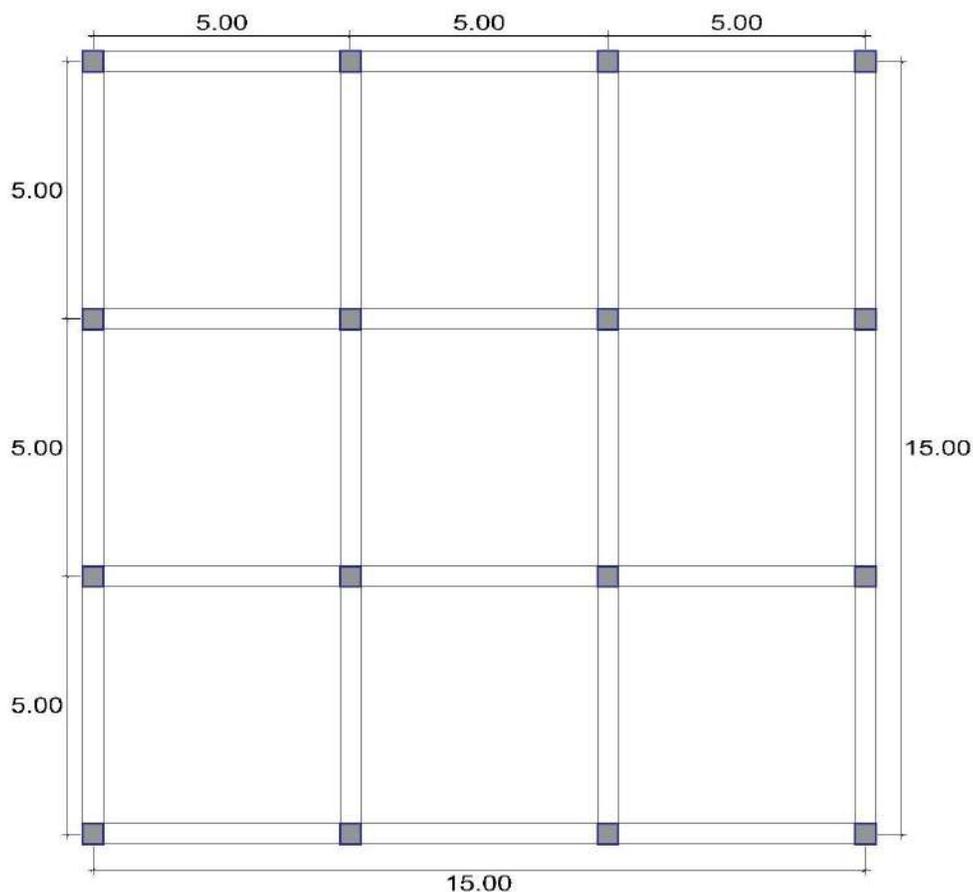


Figura 129. Edificio de pórticos.

Tabla.28 Propiedades estructurales y geometrías del edificio de pórticos.

Altura del piso	3	m
Longitud a ejes de columnas	5	m
Peralte de viga	0.6	m
Ancho de viga	0.4	m
Peralte de columna	0.4	m
Ancho de columna	0.4	m
Módulo de elasticidad	25000000	kN/m ²
Densidad de masa por unidad de longitud	10	kN/m ²
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Carga uniformemente distribuida	5	kN/m ²

4.8.6.1 Análisis estático

La figura 130 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del -3.71% para análisis a ejes de las vigas y del -3.88% para el caso de considerar zona rígida en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico.

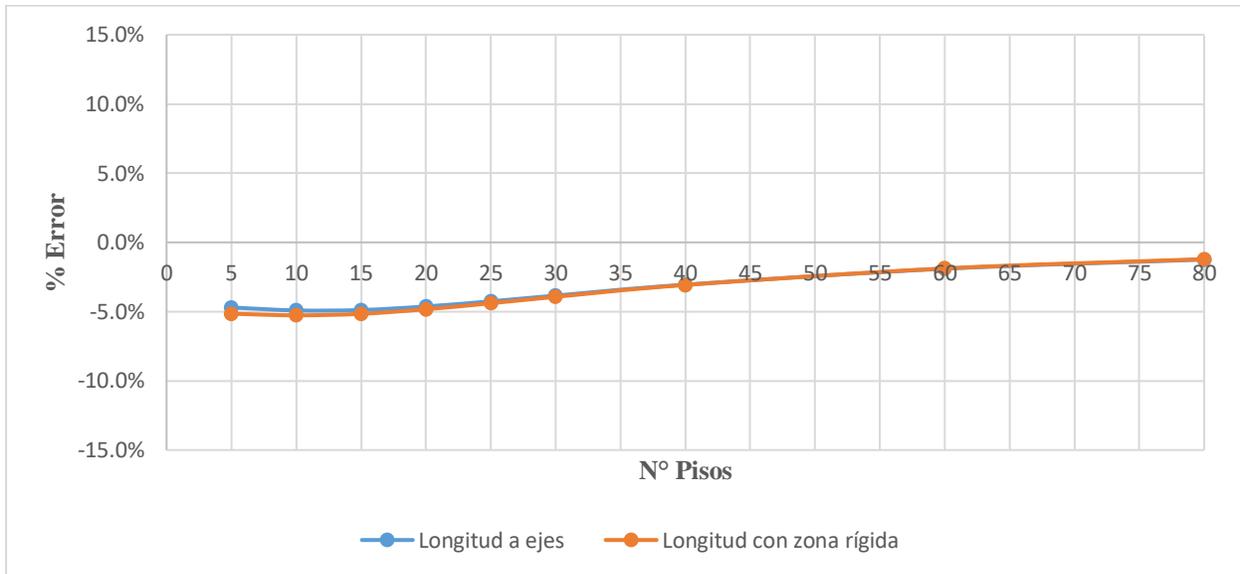


Figura 130. Precisión del desplazamiento máximo del edificio de pórticos.

4.8.6.2 Análisis dinámico

Los resultados son similares al caso estático. La figuras 131 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró un error promedio del 1.18% para el caso de longitud a ejes y del 1.13% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del pórtico.

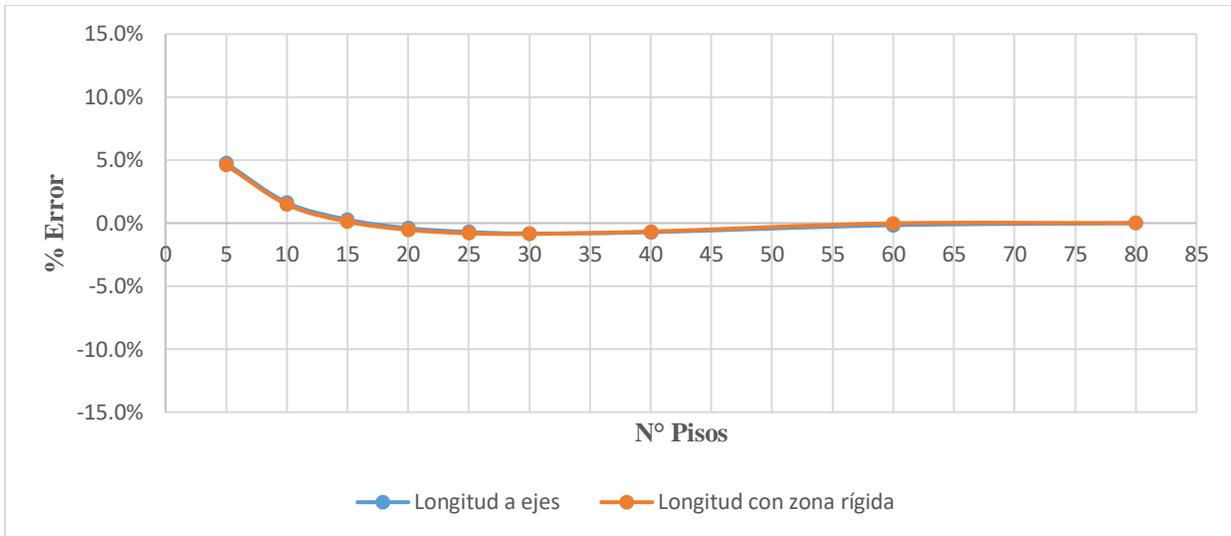


Figura 131. Precisión del periodo fundamental del edificio de pórticos.

4.8.6.3 Análisis de estabilidad

La figura 132 demuestra la precisión de la solución aproximada. Se encontró un error promedio del 6.74% para el caso de longitud a ejes y del 5.76% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos. Es importante mencionar que se utilizó solo cuatro iteraciones para el cálculo de la carga crítica, un mayor número de iteraciones conduciría a un error más pequeño. Además, se encontró que a medida que el valor del parámetro α crece se necesitan un mayor de número de iteraciones para un valor más cercano al exacto.

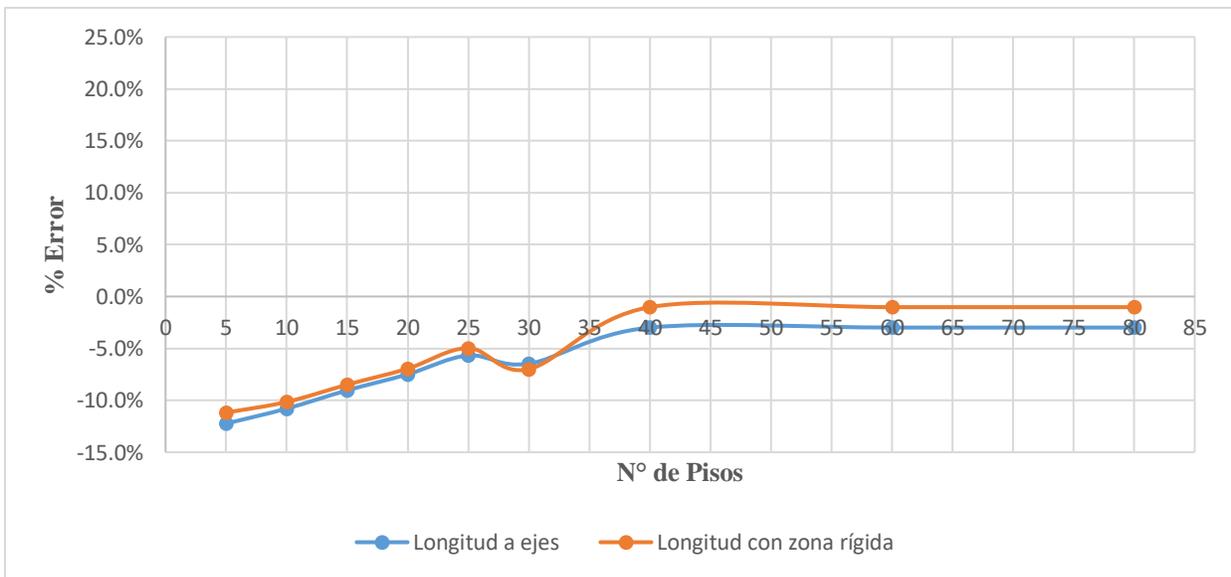


Figura 132. Precisión del periodo fundamental del edificio de pórticos.

4.8.7 Edificio dual de pórtico y muro de corte

Se analizará un total de 9 edificios duales de pórtico y muro de corte. El análisis consiste en un edificio dual a quien se hará variar su altura de cinco a ochenta pisos (5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 6, 80 pisos). Las propiedades mecánicas se resumen en la tabla 29.

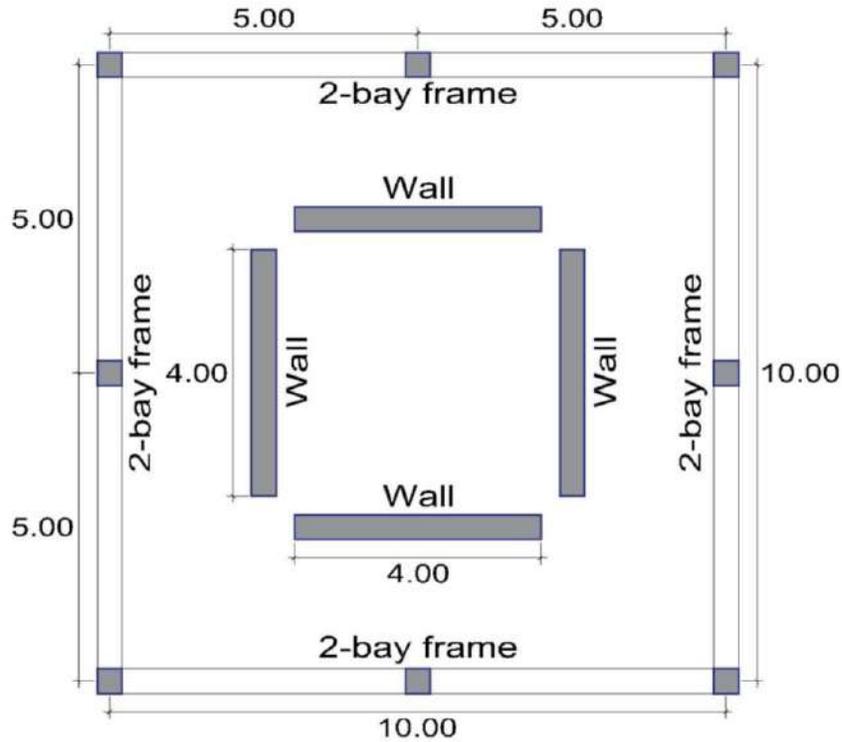


Figura 133. Edificio dual de pórtico y muro de corte.

Tabla.29 Propiedades estructurales y geometrías del edificio dual de pórtico y muro de corte.

Altura del piso	3	m
Longitud a ejes de columnas	5	m
Peralte de viga	0.6	m
Ancho de viga	0.4	m
Peralte de columna	4.0	m
Ancho de columna y muro de corte	0.4	m
Módulo de elasticidad	25000000	kN/m ²
Densidad de masa por unidad de longitud	50	kN/m
Coefficiente de Poisson	0.2	-
Carga uniformemente distribuida	5	kN/m

4.8.7.1 Análisis estático

La figura 134 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró que la solución continua conduce a estimaciones promedias del 4.88% para análisis a ejes de las vigas y del 5.32% para el caso de considerar zona rígida en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del edificio.

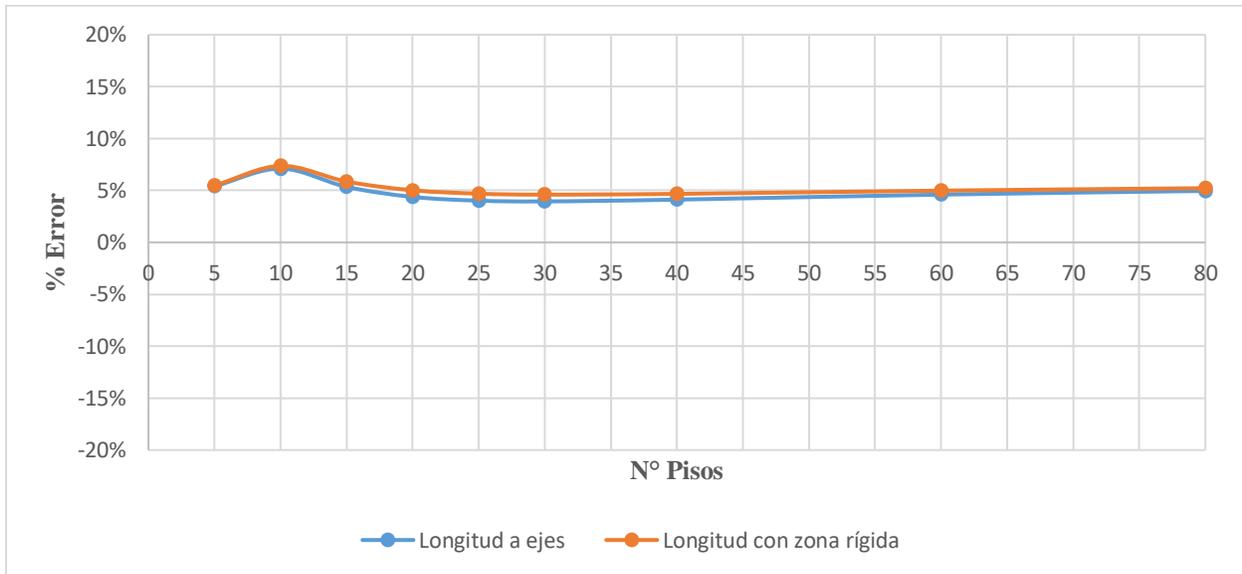


Figura 134. Precisión del desplazamiento máximo del edificio dual de pórticos y muros de corte.

4.8.7.2 Análisis dinámico

Los resultados son similares al caso estático. La figura 135 demuestra la precisión de la solución aproximada. En general se encontró un error promedio del 2.82% para el caso de longitud a ejes y del 3.06% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos. Es importante mencionar que para ambos casos el error tiende a estabilizarse y a reducirse a medida que se aumenta la altura del edificio.

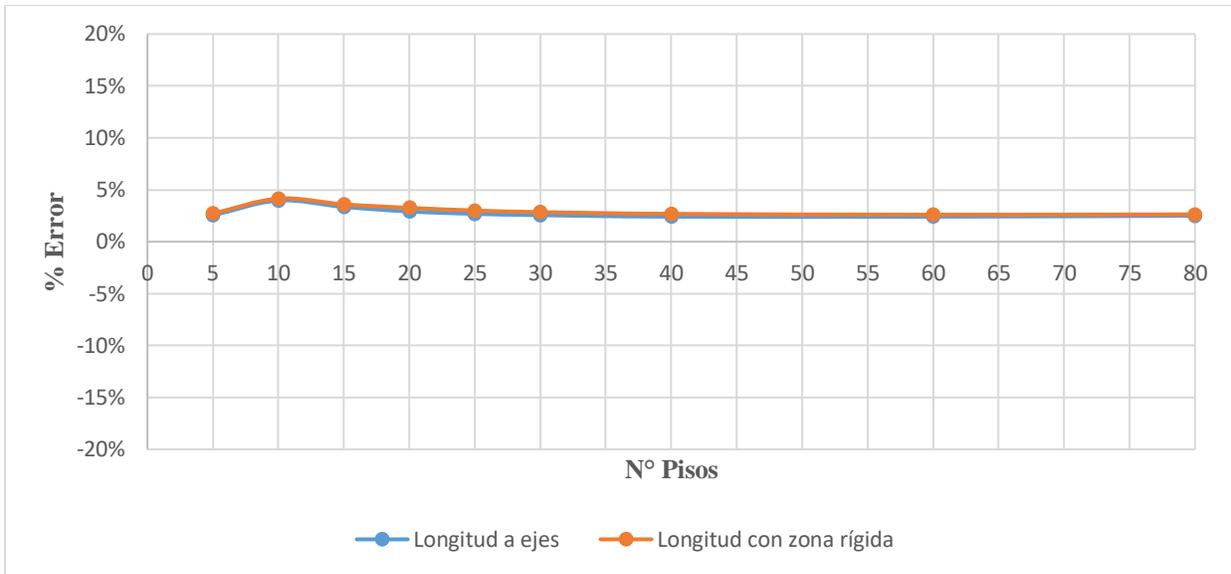


Figura 135. Precisión del periodo fundamental del edificio dual de pórticos y muros de corte.

4.8.7.3 Análisis de estabilidad

La figura 136 demuestra la precisión de la solución aproximada. Se utilizó solo cuatro iteraciones y se encontró un error promedio del 4.10% para el caso de longitud a ejes y del 4.65% para el caso de considerar zonas rígidas en los nudos.

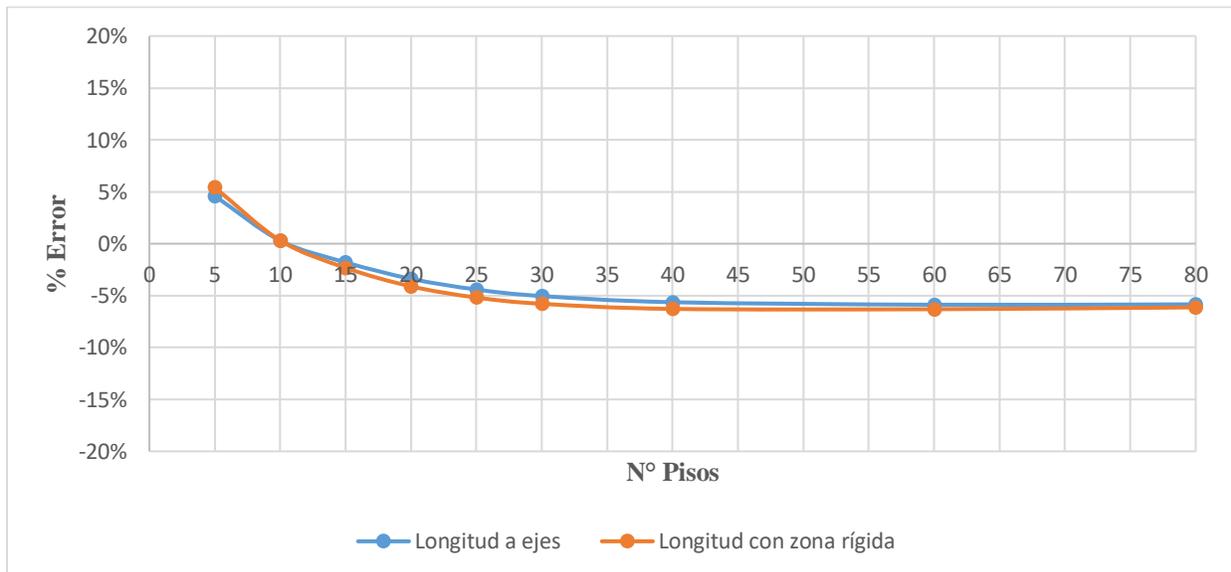


Figura 136. Precisión de la carga crítica del edificio dual de pórticos y muros de corte.

5 CAPITULO V. DISCUSIÓN

5.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Nollet (1979) y Hoenderkamp (1983) trabajaron el análisis estático de edificios altos utilizando el método continuo. En el desarrollo de este proyecto de investigación se encontró que derivando las ecuaciones de la viga de reemplazo tipo sándwich (SWB) utilizando el método continuo con formulación energética conducen a los mismos resultados.

Miranda (1999), utilizó la viga de reemplazo que consiste en el acoplamiento en paralelo de la viga de flexión y corte (CTB) y desarrolló el análisis estático sujeto a una carga lateral general con perfil general que depende únicamente de un parámetro. En este proyecto de investigación se generalizó este enfoque a todas las vigas de reemplazo estudiadas.

Potzta (2002), desarrolló un modelo de viga de reemplazo para todo el edificio utilizando una viga sándwich con un enfoque energético. En este proyecto de investigación se generalizó este enfoque utilizando la viga de reemplazo tipo sándwich generalizado que considera adicionalmente la rigidez al corte local de los elementos verticales.

Bozdoğan (2010), utilizó el método continuo y el método de matriz de transferencia para el análisis estático, dinámico y estabilidad del edificio alto modelando al edificio como una viga de reemplazo tipo sándwich generalizado (GSB). En el desarrollo de este proyecto de investigación se encontró que derivando las ecuaciones de la viga de reemplazo tipo sándwich generalizado (GSB) utilizando el método continuo y matriz de transferencia con formulación energética conducen a los mismos resultados.

Hans (2002), Jigorel (2009), Chesnais (2010), Dinh (2020) y Franco (2021) desarrollaron el método de homogeneización de medios periódicos discretos (HMPD) que consiste en construir una descripción global continua de la estructura basada en sus propiedades locales (celda básica). En el desarrollo de este proyecto de investigación se encontró que el análisis dinámico de algunas vigas de reemplazo conduce a las mismas ecuaciones diferenciales aplicando el método de homogeneización de medios periódicos discretos (HMPD).

Moghadasi, H. (2015), propuso dos vigas de reemplazo (GSB y GCTB) y los analizó numéricamente utilizando elementos finitos unidimensionales para el análisis estático y dinámico. En este proyecto de investigación se ha continuado con su investigación pero resolviendo los casos en forma analítica, cerrada y generalizando el perfil de carga externa para el análisis estático.

Zalka, K. (2020), desarrolló un estudio completo del análisis estructural global de edificios regulares en altura. En el desarrollo de este proyecto de investigación se encontró que derivando las ecuaciones diferenciales de la viga de reemplazo tipo sándwich (SWB) utilizando el método continuo con formulación energética conducen a las mismas ecuaciones diferenciales desarrolladas en su investigación. Adicionalmente, en este proyecto de investigación se ha estudiado el análisis estructural de edificios regulares e irregulares en altura.

6 CAPITULO VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

En la formulación y desarrollo de este proyecto de investigación, se encontró muy útil utilizar el enfoque energético y el principio de Hamilton para la deducción de las ecuaciones diferenciales del comportamiento de las vigas de reemplazo. Es importante mencionar que los métodos de cálculos analíticos como el desarrollado en este proyecto de investigación son fundamentales debido a que permiten verificar los métodos considerados exactos y conocer que parámetros estructurales influyen de forma importante en el comportamiento del edificio alto para realizar un estudio paramétrico que en edificios altos demanda mucho tiempo y es costoso.

La formulación analítica permite el análisis de edificios altos que son uniformes en altura y/o que pueden tener cambios escalonados estructurales en altura. Esto se logra utilizando dos enfoques dentro del análisis estructural global del edificio alto. El caso 1 se basa en el método continuo que conduce a soluciones analíticas y cerradas, y consiste en reemplazar el edificio alto por una viga de reemplazo equivalente con sus rigideces características. El caso 2 se basa en la aplicación conjunta del método continuo y el método de matriz de transferencia para reemplazar al edificio alto por una viga de reemplazo equivalente con variabilidad estructural en altura, donde una ventaja importante es que la matriz de transferencia se mantiene constante en un tamaño igual al orden de la ecuación diferencial (2×2 , 4×4 y 6×6) independientemente del número de pisos del edificio.

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar una metodología de análisis estructural global de los edificios altos utilizando el método continuo y el método de matriz de transferencia utilizando una formulación energética. Para ello, esta investigación puede contribuir a cuatro áreas de investigación en el análisis estructural de los edificios altos:

- Análisis estructural global de vigas de reemplazo.
- Análisis estructural estático del edificio alto,
- Análisis estructural dinámico del edificio alto, y

- Análisis estructural de estabilidad del edificio alto.

Las principales características de esta investigación se resumen de la siguiente manera:

1. **Vigas de reemplazo para los sistemas estructurales:** Se ha desarrollado y resuelto analíticamente y de forma cerrada el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de varias vigas de reemplazo de uno, dos y tres campos existentes en la literatura.

Se encontró que la viga sándwich generalizada (GSB) permite obtener fácilmente otras vigas de reemplazo a medida que se van descuidando algunas rigideces características y puede aplicarse a cualquier sistema estructural. Sin embargo, la viga sándwich (SWB) muy utilizado en la literatura por su simplicidad, resultó adecuado para todos los sistemas estructurales habituales en la práctica de la ingeniería estructural. Además, también se estudió vigas más complejas como el acoplamiento en paralelo de una viga Timoshenko extensible y una viga de restricción a la rotación (GCTB) de 3 campos que permite reproducir muy bien el comportamiento de los muros de corte acoplados que tienen gran peralte y donde el corte local de los muros de corte es importante y no puede descuidarse.

2. **Análisis estructural estático del edificio alto:** Se ha desarrollado y resuelto analíticamente y de forma cerrada el análisis estructural estático del edificio alto, definiendo parámetros de control como el desplazamiento máximo, la deriva de entrepiso y la deriva global. La carga lateral tiene un perfil general que depende de un solo parámetro. La solución analítica permite analizar edificios altos que son simétricos en planta (considerados como edificios sin torsión) y edificios altos que son asimétricos en uno o dos ejes que tienen un fuerte acoplamiento lateral - torsional.

3. **Análisis estructural dinámico del edificio alto:** Se ha desarrollado y resuelto analíticamente y de forma cerrada el análisis estructural dinámico del edificio alto. El parámetro de control objetivo de esta sección es el periodo fundamental del edificio. Al igual que el análisis estático también es posible analizar edificios altos con un fuerte acoplamiento lateral - torsional. Además, en el procedimiento analítico se tuvo en cuenta la inercia rotacional para evaluar su influencia dentro del comportamiento dinámico.

4. **Análisis estructural de estabilidad del edificio alto:** Se ha desarrollado y resuelto analíticamente el análisis estructural de estabilidad del edificio alto. El parámetro de

control objetivo de esta sección es la carga crítica mínima que conduce a un pandeo global del edificio. Al igual que el análisis estático también es posible analizar edificios altos con un fuerte acoplamiento lateral - torsional.

Las aplicaciones numéricas respaldan que el procedimiento analítico propuesto en este proyecto de investigación funciona notablemente bien para el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad del edificio alto. Con el propósito de generalizar el método se estudió edificios con un número mínimo de 5 pisos; sin embargo, los resultados mejoran notablemente a medida que aumentamos la altura del edificio.

6.2 CONTRIBUCIONES PERSONALES

El resultado de este proyecto de investigación tendrá un impacto y beneficio directo en el análisis estructural de los edificios altos, especialmente en la fase de análisis y diseño preliminar donde el ingeniero estructural necesita tomar decisiones rápidas, permitiendo adoptar modelos de vigas de reemplazo adecuadas sin la necesidad de recurrir a modelos tridimensionales complejos que son poco prácticos y costosos. Se consideran los siguientes aportes al análisis estructural de edificios altos:

- Miranda (1999) propuso un perfil de carga lateral general dependiente del parámetro a y resolvió el análisis estructural estático de una viga de reemplazo tipo CTB clásico. En este proyecto de investigación se ha continuado con esa investigación realizando el análisis estructural estático de trece vigas de reemplazo de uno, dos y tres campos. Por lo tanto, el análisis estructural estático aproximado del edificio alto sujeto a una carga lateral con perfil general ha sido resuelto.
- Potzta (2002) propuso la viga sándwich equivalente para representar al edificio alto y desarrolló las relaciones que conducen a las rigideces características de la viga de reemplazo equivalente. En este proyecto de investigación se ha continuado con la investigación y se ha propuesto la viga sándwich generalizada equivalente para representar al edificio alto y se ha desarrollado las relaciones que conducen a sus rigideces características.

- Bozdogan (2010) desarrolló el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de una viga de reemplazo tipo sándwich generalizado (GSB1) utilizando el método de matriz de transferencia y Moghadasi (2015) desarrolló el análisis estructural estático y dinámico de la viga de reemplazo tipo sándwich generalizado (GSB1) utilizando el método de elementos finitos unidimensionales. En este proyecto de investigación se ha resuelto el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de la viga de reemplazo tipo sándwich generalizado (GSB) de forma cerrada utilizando el método continuo.
- Chesnais (2010) propuso y desarrolló el análisis estructural dinámico de la viga de reemplazo tipo sándwich generaliza (GSB2). En este proyecto de investigación se ha continuado con la investigación y se desarrollado el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de la viga de reemplazo tipo sándwich generaliza (GSB2) de forma cerrada con el método continuo y se ha utilizado el método de matriz de transferencia para los edificios con variabilidad estructural en altura.
- Moghadasi (2015) propuso y desarrolló el análisis estructural estático de la viga de reemplazo CTB de uno, dos y tres campos sujeta a una carga lateral uniformemente distribuida en la altura. En este proyecto de investigación se ha continuado con la investigación y se desarrollado el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de la viga de reemplazo CTB de uno, dos y tres campos de forma cerrada con el método continuo y se ha utilizado el método de matriz de transferencia para los edificios con variabilidad estructural en altura.
- Se ha desarrollado el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de vigas de reemplazo conocidas en la literatura como la viga de flexión (EBB), viga de corte (SB), viga Timoshenko (TB), acoplamiento en paralelo de viga de flexión y viga de corte (CTB) y la viga sándwich (SWB). Además, se ha desarrollado el análisis estructural estático, dinámico y de estabilidad de vigas no muy conocidas en la literatura pero que fueron presentadas por Bozdogan (2010), Moghadasi (2015), Migliorati y Mangione (2015) y Chesnais (2010) como la viga sándwich generalizada (GSB1 y GSB2), viga sándwich generalizada modificada (MGSB), acoplamiento en paralelo de dos vigas modificada (MCTB), acoplamiento en paralelo de dos vigas generalizado (GCTB) de uno, dos y tres campos.

- Se han derivado y solucionado las ecuaciones diferenciales para el análisis estático de las vigas de reemplazo y en consecuencia del edificio alto. Generalmente en la literatura se desarrollan ecuaciones para cada caso en especial como la carga uniforme, la carga triangular, etc.; sin embargo, en este proyecto de investigación se ha generalizado el perfil de la carga lateral.
- Se han derivado y solucionado las ecuaciones diferenciales para el análisis dinámico de las vigas de reemplazo considerando las inercias rotacionales. Un tema poco estudiado pero que tiene una influencia importante para el análisis dinámico.
- Se han derivado y solucionado las ecuaciones diferenciales para el análisis de estabilidad de las vigas de reemplazo y en consecuencia del edificio alto. Un tema poco estudiado pero muy importante debido a la elevada esbeltez que presentan algunos edificios altos.
- Se ha desarrollado un programa informático para realizar el análisis estructural global de los edificios altos. Este programa realiza el análisis estático, dinámico y de estabilidad de las vigas de reemplazo y por lo tanto del edificio alto. Posteriormente se ha verificado la eficiencia del programa en las aplicaciones numéricas.

6.3 RECOMENDACIONES

- Desarrollar programas informáticos basados en el análisis global de edificios altos teniendo en cuenta la interacción suelo - estructura.
- Realizar una clasificación de las vigas de reemplazo en función de los parámetros estructurales del edificio que permita al ingeniero elegir la viga de reemplazo adecuada para el análisis. Esto es importante para edificios que presentan algunas rigideces que no son del mismo orden de magnitud y que pueden ser descuidadas.
- Evaluar la aplicación del método continuo y el método de matriz de transferencia al modelamiento de estructuras que presentan periodicidad en su longitud como vías férreas, estructuras de madera, etc.
- El cálculo de la rigidez al corte global de los sistemas estructurales y del edificio es un tema delicado que requiere estudios para obtener ecuaciones cerradas. Un enfoque desarrollado por Franco (2021) es la construcción de un modelo numérico de un solo piso.

- Evaluar la aplicación del análisis estructural estático y dinámico utilizando el método continuo en edificaciones de albañilería confinada de cuatro y cinco pisos muy utilizado en el Perú.
- Realizar el análisis estructural global de edificios medios y altos que presentan dispositivos de disipación de energía utilizando el método continuo y el método de matriz de transferencia.
- Una hipótesis fundamental fue el considerar diafragmas rígidos en las losas de entrepiso. Se sugiere ampliar el estudio para los edificios que presentan losas de entrepiso con grandes aberturas y/o que son considerados como diafragmas flexibles.
- El análisis estructural global de las vigas de reemplazo y del edificio alto se ha desarrollado en el análisis lineal. Se sugiere ampliar el estudio en el análisis no lineal.
- Es conocido en la literatura que los centros de rigidez y de corte en edificios de varios pisos generalmente no son coincidentes debido a que su ubicación no solo depende de las características geométricas sino también de las fuerzas laterales. Se sugiere estudiar la eficiencia del procedimiento analítico propuesto ubicando el centro de rigidez y/o de corte en el centro de torsión mínimo definido como el lugar de referencia ficticio donde la suma total de los cuadrados de las rotaciones del piso de torsión del edificio sometido a las fuerzas de inercia lateral es mínima.

7 REFERENCIAS

7.1 FUENTES DOCUMENTALES

- Anesi, R. (2018). *A Synthetic Approach to Tall Building Design with Respect to Horizontal Effects*. Tesis de maestría, Politécnico di Milano, Italia.
- Aydin, S. (2016). *Çok Katli Yapıların Sistem Kritik Burkulma Yüklerinin Diferansiyel Transform Metodu ile Belirlenmesi*. Tesis de Maestría, Instituto Universitario de Ciencia y Tecnología Kırklareli, Turquía.
- Beck, H. (1956). Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel des Vierendelträgers. *Der Bauingenieur*, 31, 436–443.
- Biot, M. (1932). *Transient oscillations in elastic systems*. Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de California, Pasadena, California.
- Biot, M. (1933). Theory of Elastic Systems Vibrating under Transient Impulse with an Application to Earthquake-Proof Buildings. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 19(2), 262-268.
- Bozdogan, K. (2010). *Çok katlı yapıların taşıma matrisi yöntemiyle statik dinamik ve stabilite çözümlenmesi*. Tesis de doctorado, Universidad del Egeo, Turquía.
- Cammarano, S. (2014). *Static and Dynamic Analysis of High-Rise Buildings*. Tesis de doctorado, Politecnico de Torino, Italia.
- Capuani, D., Merli, M., & Savoia, M. (1994). An Equivalent Continuum Approach for Coupled Shear Wall. *Engineering Structures*, 16(1), 63-73.
- Chesnais, C. (2010). *Dynamique de milieux réticulés non contreventés Application aux bâtiments*. Tesis de doctorado, Escuela Central de Lyon, Francia.
- Chitty, L. (1947). On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by cross bars. *Philosophical Magazine Series*, 38(285), 685-699.
- Chitty, L., & Wan, W. (1948). Tall buildings structures under Wind Load. *Proceedings 7th International Conference for Applied Mechanics*, 1(22), 254-268.
- CTBUH. (2013). Tall Building in Numbers. *CTBUH Journal*, 3, 42-43.
- De la Llera, J. C., & Chopra, A. K. (1994). *Accidental and Natural Torsion in Earthquake and Design of Buildings*. Report N° UCB/EERC 94-07, Universidad de California Berkeley , Earthquake Engineering Research Center.

- Dinh, H. (2020). *Comportement dynamique de bâtiments : réduction de modèles et impact de l'ajout d'amortisseurs linéaires visqueux*. Tesis de doctorado, Escuela Nacional de Obras Públicas del Estado, Francia.
- Espezúa, C. (2009). *Análise de Edifícios Altos Submetidos a Terremotos Pela Técnica Do Meio Continuo*. Tesis de maestría, Universidad de Sao Paulo - Sao Carlos, Brazil.
- Franco, C. (2021). *Modélisation multi-échelle de la réponse sismique des bâtiments: couplage homogénéisation et éléments multifi*. Tesis de doctorado, Universidad Gustavo Eiffel, Francia.
- Gere, J. M., & Lin, Y. K. (1958). Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross Section. *Journal of Applied Mechanics, Transactions, A.S.M.E.*, 80, 373.
- Gjerlow, H., & Knutsen, C. (2017). Autocrats and Skyscrapers: Modern White Elephants in Dictatorships. doi:Gjerløw, Haakon and Knutsen, Carl Henrik, Autocrats and Skyscrapers: Modern White Elephants in Dictatorships (April 2017). V-Dem Working Paper 2017:44, Avhttp://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2951762
- Gluck, J. (1970). Lateral Load Analysis of Asymmetric Multi-Storey Structures. *Journal of the Structural Division*, 96(2), 317-333.
- Gluck, J., & Gellert, M. (1972). Three Dimensional Lateral Load Analysis of Multistory Structures. *IABSE publications*, 32(1). doi:https://doi.org/10.5169/seals-24942
- Glück, J., Gellert, M., & Danay, A. (1972). Dynamics of asymmetric multistory structures. *IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen*, 32. doi:http://doi.org/10.5169/seals-24943
- Gonzales Soto, P. (1983). Acoplamiento Torsional en Edificios de Doble Simetría. *IDIEM*, 22.
- Gonzales Soto, P. (1987). Oscilaciones Torsionales en Estructuras de Varios Pisos con Doble Simetría. *El Ingeniero Civil*, 50.
- Gungor, Y., & Bozdogan, K. (2021). An approach for dynamic analysis of steel plate shear wall systems. *Grđevinar*, 73(12), 1173-1270. doi:https://doi.org/10.14256/JCE.3293.2021
- Hans, S. (2002). *Auscultation dynamique de batiments et modelisation par homogénéisation contribution a l'analyse de la vulnerabilite sismique*. Tesis de doctorado, Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas de Lyon, Francia.
- Hegedűs, I., & Kollár, L. (1984). Buckling of sandwich columns with thick faces subjecting to axial loads of arbitrary distribution. *Acta Technica Scientiarum Hungaricae*, 97, 123–132.
- Heidebrecht, A., & Stafford, S. (1973). Approximate Analysis of Open Section Shear Walls Subject to Torsional Loading. *Journal of the Structural Division*, 99(2), 2355-2375.
- Hoenderkamp, J. (1983). *A general hand method of analysis for tall building structures subjected to lateral loads*. Tesis de doctorado, Universidad de McGill, Canadá.

- Hoerner, J. B. (1971). *Modal Coupling and Earthquake Response of Tall Buildings*. Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de California.
- Housner, G. W. (1941). *An Investigation of the Effects of Earthquake on Buildings*. Tesis de Doctorado, Instituto Tecnológico de California.
- Huang, K. (2009). *Continuum MDOF model for seismic analysis of wall-frame structures*. Tesis de doctorado, La Universidad de Ciencia y Tecnología de Hong Kong, China.
- Jacobsen, L. (1930). Motion of a Soil Subjected to a Simple Harmonic Ground Motion Vibration. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 20(3), 160-195.
- Jigorel, S. (2009). *Etude du comportement dynamique de structures periodiques par la methode d'homogeneisation des milieux periodiques discrets*. Tesis de maestría, Escuela Nacional de Obras Públicas del Estado, Francia.
- Kara, D. (2019). *Zemin Yapı Etkileşiminde Pratik Bir Yöntem*. Tesis de Maestría, Universidad de Ciencia y Tecnología Kırklareli, Turquía.
- Khan, F. (Noviembre de 1969). Recent Structural Systems in Steel for High-Rise Buildings. *In Proceedings of the British Constructional Steelwork Association Conference on Steel in Architecture*, 24-26.
- Khan, F., & Sbarounis, J. (1964). Interaction of Shear Walls and Frames. *Journal of the Structural Division*, 90(3), 285-335. doi:<https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0001091>
- Khoyali, K. (2021). *Evolución de los sistemas estructurales en edificios de altura, Obras e innovaciones de SOM: El sistema tubular*. Tesis de maestría, Universidad Politécnica de Madrid, España.
- Knutsen, C. (2011). *The Economic Effects of Democracy and Dictatorship*. Tesis de doctorado, Universidad de Oslo, Noruega.
- Kollár, L. (1986). Buckling analysis of coupled shear walls by the multi-layer sandwich model. *Acta Technica Scientiarum Hungaricae*, 99, 317-332.
- Kollár, L. (1999). *Structural Stability in Engineering Practice*. London: E & FN Spon.
- Kuang, J., & Ng, S. (2000). Coupled Lateral Vibration of Asymmetric Shear Wall Structures. *Thin Walled Structures*, 38(2), 93-104.
- Lavan, O. (2012). On the Efficiency of Viscous Dampers in Reducing Various Seismic Responses of Wall Structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 41(12), 1673-1692.
- Lavan, O., & Abecassis, D. (2015). Seismic behavior and design of wall-EDD-frame systems. *Frontiers in Built Environment*, 1. doi:<https://doi.org/10.3389/fbuil.2015.00007>
- Lawrence, K. (16 de Octubre de 1998). The World According to Trump: An Unauthorized Portrait in His Own Words. *New York Times*, pág. 119.

- Makarios, T. K. (1994). *Flexural elastic shaft of mixed high-rise buildings*. Tesis de Doctorado, Universidad Aristóteles de Tesalónica.
- Mancini, E., & Savassi, W. (1999). Tall Building Structures Unified Plane Panels Behaviour. *The Structural Design of Tall Buildings*, 8(2).
- Migliorati, L., & Mangione, M. (2015). *Replacement Beam Models in 3D Analysis of Tall Building Structural Systems*. Tesis de maestría, Politécnico di Milano, Italia.
- Mir, M., & Kyoung, S. (2007). Structural Developments in Tall Buildings: Current Trends and Future Prospects. *Architectural Science Review*, 50(3), 205-223.
doi:<https://doi.org/10.3763/asre.2007.5027>
- Miranda, E. (1999). Approximate Seismic Lateral Deformation Demands in Multistory Buildings. 125(4). doi:[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1999\)125:4\(417\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:4(417))
- Miranda, E., & Reyes, C. J. (2002). Approximate Lateral Drift Demands in Multistory Buildings with Nonuniform Stiffness. *Journal of Structural Engineering*, 125.
- Moghadasi, H. (2015). *Replacement Beam Methods in Analysis of Tall Building Structural Systems*. Tesis de doctorado, Politecnico de Milano, Italia.
- Moon, D. S. (2012). *Integrated Seismic Assessment and Design of Plan-Irregular Structures*. Tesis de Doctorado, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign.
- Ng, S., & Kuang, J. (2000). Triply coupled vibration of asymmetric wall-frame structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 126(8), 982-987.
- Nollet, M. (1979). *Behaviour of wall-frame structures: a study of the interactive behaviour of continuous and discontinuous wall-frame structures*. Tesis de doctorado, Universidad de McGill, Canadá.
- Palomo, E. (2020). *Análisis de comportamiento estructural de puentes de hamaca precolombinos: el caso del puente Q'eswachaka (Perú)*. Tesis de maestría, Universidad de Oviedo, España.
- Pârv, B. (2012). *Models of analysis and optimization for tall buildings*. Tesis de doctorado, Universidad Técnica de Cluj-Napoca, Rumanía.
- Potzta, G. (2002). *Approximate Analysis of Building Structures Subjected to Earthquakes*. Tesis de doctorado, Universidad de Tecnología y Economía de Budapest Facultad de Arquitectura, Hungría.
- Puthanpurayil, A., Lavan, O., Carr, A., & Dhakal, R. (2016). Elemental damping formulation: an alternative modelling of inherent damping in nonlinear dynamic analysis. *Bulletin of Earthquake Engineering; Dordrecht*, 14(8), 2405-2434.
- Rafezy, B. (2004). *Global Vibration Analysis of Symmetric and Asymmetric High Rise Buildings*. Tesis de doctorado, Universidad de Cardiff, Reino Unido.

- Reinhorn, A. (1978). *Static and Dynamic Torsional Coupling in Tall Buildings*. Tesis de doctorado, Instituto Tecnológico de Israel, Israel.
- Rosenblueth, E., & Holtz, I. (1960). Elastic analysis of shear walls in tall buildings. *Journal of the American Concrete Institute*, 56(6), 1209-1222. doi:<https://doi.org/10.14359/8137>
- Rosman, R. (1960). On the structural analysis of tall cross-wall buildings under horizontal load. *Der Bauingenieur*, 4, 133–141.
- Rosman, R. (1973). Dynamics and stability of shear wall building structures. *Proceedings of The Institution of Civil Engineers*, 55, 411–423.
- Rosman, R. (1974). Stability and dynamics of shear-wall frame structures. *Building Science*, 9, 55-63.
- Rutenberg, A. (1975). Approximate natural frequencies of coupled shear walls. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4, 95-100.
- Savassi, W., & Mancini, E. (2009). One-Dimensional Finite Element Solution for Non-Uniform Tall Building Structures and Loading. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 18(4), 441-453.
- Savassi, W., & Mancini, E. (2004). One-Dimensional Finite Element Solution for Tall Building Structures Unified Plane Panels Formulation. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 13(4), 315-333.
- Schmidts, H. (1998). *Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken*. Tesis de doctorado, Universidad de Stuttgart, Alemania.
- Shiu Cho, N. (1999). *Coupled Vibration of Asymmetric Structures in Tall Buildings*. Tesis de doctorado, Universidad de Ciencia y Tecnología de Hong Kong, China.
- Skelton, I. (2016). *Innovation in Construction Techniques for Tall Buildings*. Tesis de maestría, Universidad de Louhborough.
- Stafford, S., Kuster, M., & Hoenderkamp, J. (1981). A Generalized Approach to the Deflection Analysis of Braced Frame, Rigid Frame and Coupled Wall Structures. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 8(2), 230-240. doi:<https://doi.org/10.1139/l81-030>
- Takabatake, H., & Satoh, H. (2006). Simplified Analysis and Vibration Control to Super-High-Rise Buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 15(4), 363-390.
- Thambirajah, B., Swaddiwudhipong, S., Quek, S. T., Lee., & Lip, S. (1984). Approximate Analysis of Asymmetric Buildings. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, N° 9.
- Thornton, M. (2005). Skyscrapers and Business Cycles. *The Quarterly Journal of Australian Economica*, 8(1), 51-74.
- Tso, W., & Biswas, J. (1973). Analysis of Core Wall Structure Subjected to Applied Torque. *Building Sciences*, 8(21), 251-257. doi:[https://doi.org/10.1016/0007-3628\(73\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0007-3628(73)90007-8)

- Tuncay, A. (2014). *Çok katlı yapılarda üniform olmayan burulma etkilerinin hesabı için bir yöntem*. Tesis de doctorado, Universidad Técnica de Estambul, Turquía.
- Wang, Q., Wang, L., & Liu, Q. (2001). Effect of Shear Wall Height on Earthquake Response. *Engineering Structures*, 23(4), 376-384.
- Westergaard, H. (1933). Earthquake-shock transmission in tall buildings. *Engineering News Record*, 111(12), 654-656.
- Yoon, Y. S. (1992). *Translational - Torsional Coupling in Asymmetric Structures*. PhD. Thesis, McGill University.

7.2 FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

- Génesis (11:4). (2019). *Biblia de Estudio Teológico RVR 1960*. Brasil: Sociedades Bíblicas en América Latina.
- Günel, M., & Ilgin, H. (2014). *Tall Buildings: Structural Systems and Aerodynamic Form*. Londres, Reino Unido: Routledge. doi:<https://doi.org/10.4324/9781315776521>
- Kollár, L. (1999). *Structural Stability in Engineering Practice*. London: E & FN Spon.
- Sarkisian, M. (2016). *Designing Tall Buildings: Structure as Architecture* (2 ed.). Nueva York, Estados Unidos: Routledge. doi:<https://doi.org/10.4324/9781315714639>
- Stafford S., B., & Coull, A. (1991). *Tall Building Structures: Analysis and Design*. University of Texas Press.
- Taranath, B. (2016). *Tall Building Design: Steel, Concrete, and Composite Systems*. Boca Raton: CRC Press. doi:<https://doi.org/10.1201/9781315374468>
- Valderrama, S. (2006). *Pasos para elaborar proyectos de investigación científica*. Lima, Perú: San Marcos.
- Vlasov, V. (1961). *Tonkostennye uprugie sterzhni (Thin-walled elastic beams)*. (I. P. Translations, Trad.) Jerusalem.
- Zalka, K. A. (2013). *Structural Analysis of Regular Multi-Storey*. CRC Press. New York London.
- Zalka, K. A. (2020). *Structural Analysis of Multi-Storey Buildings. London* (2 ed.). CRC Press.
- Zalka, K. A. (2000). *Global Structural Analysis of Buildings*. London: E & FN Spon.
- Zalka, K., & Armer, G. (1992). *Stability of large structures*. Oxford: Butterworth – Heinemann.

7.3 FUENTES ELECTRÓNICAS

- Brueghel, P. (1563). *La Torre de Babel*. Vienna, Austria. Obtenido de <https://sparkpost.files.wordpress.com/2012/11/tower-of-babel-bruegel.jpeg>
- Chapin, J. R. (1871). *Chicago en llamas - La carrera por las vidas sobre el puente de la calle Randolph*. Obtenido de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chicago-fire1.jpg>
- CTBUH. (s.f.). *Consejo de Edificios Altos y Hábitad Urbano*. Recuperado el 15 de Agosto de 2022, de <https://www.ctbuh.org/>
- Lawrence, K. (16 de Octubre de 1998). The World According to Trump: An Unauthorized Portrait in His Own Words. *New York Times*, pág. 119.
- Otis, E. G. (1861). *Dibujo de la patente del ascensor*. Obtenido de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ElevatorPatentOtis1861.jpg>
- TEDx, T. (2015). Les nouveaux matériaux. Recuperado el 15 de Agosto de 2022, de <https://www.youtube.com/watch?v=AvBjSP8hVg&t=25s>
- Trabucco, D. (s.f.). 150 años escalando el cielo: la evolución de los edificios altos. Obtenido de <https://blog.tkelevator.com/es/buildings/la-evolucion-de-los-edificios-altos/?cv=1>

