**UNIVERSIDAD NACIONAL JOSE FAUSTINO SÁNCHEZ CARRION**

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

**TESIS**:

# "MODELO CATEGÓRICO DE LA LOGICA BIVALENTE"

Para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática Aplicada

PRESENTADO POR:


Bachiller: MORENO JULCA YOLIÑO MILER

ASESOR: Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT


**Huacho – Perú**

**2021**

**INTERPRETACIÓN CATEGÓRICA PARA EL CÁLCULO DE SECUENTES DE LA LÓGICA INTUICIONISTA**

# TESIS DE PREGRADO

**ASESOR:** Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT

**UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SANCHEZ CARRIÓN**

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT

Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

**ASESOR**

Mo. ISIDRO JAVIER RIOS PEREZ

**PRESIDENTE**

Mo. HECTOR ALEXIS HERRERA VEGA

**SECRETARIO**

Mo. CRISTIAN MILTON MENDOZA FLORES

**VOCAL**

## DEDICATORIA

A mis padres por todo su apoyo incondicional y a los profesores de la escuela profesional de Matemática Aplicada.

MORENO JULCA, YOLIÑO MILER

**AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer en primer lugar a Dios por darme el aliento de vida, la fuerza necesaria esencial para mi existencia; en segundo lugar, a mi madre Emilia Julca Ayala por encaminar mi vida con su infinito amor. Hoy que culmine mis estudios universitarios veo materializado las decisiones tan sacrificadas e incondicionales de mi madre, su apoyo moral y su infinita paciencia.

Finalmente, y por ello no menos importante, quiero agradecer a mi asesor Mg Juan Carlos Broncano Torres por su guía e indicaciones en el desarrollo de esta investigación y como olvidar a mis compañeros que estuvieron en mi lado brindándome apoyó en el transcurso de esta aventura que ha sido elaborar mi tesis.

También quiero agradecer a la comisión de grados y títulos de la escuela académico profesional de Matemática Aplicada, por su disposición de ayudarme en temas administrativos tan necesarios para poder cristalizar mi sueño.

MORENO JULCA, YOLIÑO MILER

ÍNDICE

## RESUMEN

**Objetivos**: El objetivo de la tesis es Construir un modelo categórico para interpretar a la lógica bivalente.

**Materiales y métodos**: Se utilizó la búsqueda de bibliografía relacionada con las categorías y la lógica bivalente.

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica y aplicativa.

Los instrumentos son la bibliografía y algunos antecedentes relacionados con la teoría de categorías y la lógica bivalente.

Después de obtener la bibliografía se procede a formular un funtor que permita analizar la lógica bivalente usando categorías.

**Conclusiones**. Después de realizar y analizar el proyecto de investigación se concluyó que la teoría de categorías con la ayuda de los funtores se logra interpretar la lógica bivalente.

**Recomendaciones**.

Se recomienda realizar nuevos trabajos en el futuro con la finalidad de que se formalice algebraicamente el proyecto de investigación haciendo uso de construcciones categóricas, los morfismos y lis funtores. Además, extender los principios de inferencia de la lógica bivalente con ayuda de las demás construcciones categóricas.

**Palabras claves:** Lógica proposicional, Funtores, lógica algebraica, Teoría de Categorías.

## ABSTRACT

**Objective:** The objective of the thesis is to build a categorical model to interpret bivalent logic.

**Materials and methods**: The search for bibliography related to the categories and bivalent logic was used.

By the type of research, this study meets the methodological conditions of theoretical and applicative research.

The instruments are the bibliography and some background related to category theory and bivalent logic.

After obtaining the bibliography, we proceed to formulate a funtor that will allow us to analyze the bivalent logic using categories.

**Conclusions.** After carrying out and analyzing the research project, it was concluded that the category theory with the help of functors is able to interpret the bivalent logic.

**Recommendations.**

It is recommended that new work be carried out in the future in order to formalize the research project algebraically using categorical constructions, the morphisms and functors. In addition, extend the inference principles of bivalent logic with the help of the other categorical constructions.

**Key words**: Propositional logic, Funtors, algebraic logic, Category Theory.

## INTRODUCCION

La lógica matemática como una rama independiente de las matemáticas es una rama profunda de gran amplitud y aplicación en otras ciencias y ha establecido relaciones matemáticas entre la lógica y las matemáticas formulándose una teoría de inferencia completamente explicita que se adecua a todos los ejemplos típicos del razonamiento deductivo en matemáticas y a las ciencias empíricas. La lógica matemática utiliza a modo de álgebra las variables llamadas proposiciones que pueden tener valores de verdad o falsedad y realiza operaciones entre ellas y además, propone y demuestra inferencias. Por otro, lado tenemos la lógica bivalente que afirma que una proposición solo puede ser verdadero o falso;

En resumen: Una **lógica** clásica es un sistema lógico que admite solo dos valores de verdad para sus enunciados (premisas y conclusión). En la **lógica bivalente**, una proposición solo puede ser verdadera o falsa, no existen valores intermedios de verdad

Teniendo presente estas ideas en la investigación tratamos de construir un modelo categórico para la lógica bivalente

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Descripción de la realidad Problemática

La lógica es uno de los campos más activos en cuanto a su reflexión filosófica, pues sus fundamentos y métodos rigen la Ciencia. Por lo tanto, el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto es imprescindible para el fundamento del quehacer científico.

Popper, K. (1959), en su artículo titulado: The Logic of Scientific Discovery, sostiene que el hombre de ciencia propone enunciados o sistemas de enunciados y los contrasta de forma metódica y usa los principios de la lógica para analizar las relaciones que se establecen entre el investigador y el objeto de la realidad objetiva que se investiga. De otro lado, el acercamiento de los métodos matemáticos para abordar los principios de la lógica se ve reflejada en la fundamentación de la lógica algebraica, pues ella es una disciplina que pretende estudiar hechos lógicos desde el marco conceptual de la matemática estructuralista, en ese sentido Boole, G. (1847), propuso una metodología de entendimiento de la lógica con el álgebra. La búsqueda de estructuras matemáticas que proporcionen el fundamento de la lógica es y ha sido incesante, tal como se puede dar fe con las siguientes investigaciones introducidas por Halmos en algebraic logic (1962) y las algebras cilíndricas de Tarski y Henkin en Cylindric Algebras (1971).

En esa línea de pensamiento, al surgir la teoría de categorías en 1945, por MacLane y Eilenberg, como una teoría general de estructuras, que proporciona un marco conceptual para analizar propiedades universales emergentes en las estructuras algebraicas, en este trabajo de investigación se propone un modelo categórico para interpretar la lógica proposicional bivalente.

### 1.2 Formulación del Problema

#### 1.2.1 Problema General

¿Es posible construir un modelo categórico para interpretar la lógica bivalente?

#### 1.2.2Problemas Específicos

¿se puede construir un modelo categórico que permita interpretar la lógica bivalente?

¿será posible usar el modelo categórico en el análisis de la lógica bivalente?

## 1.3 Objetivo de la Investigación

### 1.3.1 Objetivo General

Construir un modelo categórico para interpretar a la lógica bivalente.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

La lógica clásica y la teoría de categorías son fundamentales para formular un modelo categórico para estudiar la lógica bivalente.

Construir una categoría algebraica y un funtor para interpretar y aplicarlo al estudio de la lógica bivalente.

## 1.4 Justificación de la Investigación

Esta tesis esta direccionada al área de la lógica bivalente, la cual es usada como de fundamento de la Ciencia, pues estudia los modos de inferencias, las deducciones y los conceptos del razonamiento formal, dentro de contextos específicos. Algunas de sus aplicaciones se pueden apreciar, en la matemática, en la filosofía y teoría de la computación. Esta investigación se realiza desde una perspectiva estructural de la matemática moderna, se procura traer los beneficios de conceptos y técnicas de las estructuras algebraicas, con la finalidad de proporcionar una nueva herramienta para el estudio de la lógica bivalente y con esto se intenta contribuir a la teoría estructural de las ciencias formales, la cual trata el desarrollo de técnicas de satisfactibilidad de inferencias para mostrar que una determinada sentencia es una consecuencia lógica de un conjunto de sentencias (axiomas e hipótesis) validas. Cabe resaltar que los fundamentos de la lógica bivalente se basan en un determinado lenguaje lógico. Por otro lado, se debe resaltar que diversos estudios en lógica y computación fueron impulsados para dar un tratamiento lógico al desarrollo de programas, de tal manera que el isomorfismo de Curry-Howard revela una profunda conexión entre los principios de la lógica bivalente y los lenguajes de programación.

Finalmente, como los argumentos de la lógica bivalente usan reglas del razonamiento basado en los principios de la inferencia, los fundamentos categóricos propuestos servirán para obtener una nueva óptica de la lógica bivalente.

## 1.5 Delimitación del Estudio

La lógica es uno de los campos de la reflexión filosófica más activa de este milenio, rige el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. En particular la lógica intuicionista (o lógica constructivista) es de sumo interés por parte de la Matemática Aplicada, pues es usada en varios campos que van desde la implementación de lenguajes funcionales hasta la teoría de la recursión, pasando por la fundamentación de los lenguajes de programación, la teoría de la demostración, la teoría estructuralista de la matemática entre otras.

En los trabajos de W. Blok y D. Pigozzi (1989) se puede apreciar un estudio sobre lógicas algebrizables, y en él se establece una generalización del concepto de álgebra de Lindenbaum asociada a una lógica dada. Por lo tanto, se logra extender la asociación lógica-estructura algebraica a algunas lógicas para las cuales no era posible encontrar una estructura algebraica correspondiente. Mostrándose de forma clara los vínculos necesarios para relacionar la teoría de categorías con la lógica bivalente. Por lo tanto, estos son los campos de la ciencia que delimitan nuestra investigación.

## 1.6 Viabilidad del Estudio

En el ámbito de la matemática y las matemáticas aplicadas de hoy en día hay una aceptación cada vez mayor por la teoría de categorías, debido a que ella nos permite realizar nuevas notaciones y generar un nuevo campo visual de análisis para unificar diversas construcciones algebraicas. Por esta razón la teoría de categorías ha sido elegida para enmarcar el desarrollo de esta propuesta.

# CAPÍTULO II:

# MARCO TEÓRICO

## 2.1 Antecedentes de la Investigación

Barceló, A. (**2005**), en su libro titulado: Representación formal y (los límites de la) laicidad. En: Representación y laicidad. Editorial Fénix Editora, Sevilla, España.

Propone un análisis entre lo lógicamente razonable y el pensamiento lógico. Los principales argumentos de su propuesta radican principalmente en los principios que rigen el razonamiento basado en lógica preposicional.

Meseguer, P. (**1991**), en su artículo titulado: Verification of multi-level rule-based expert systems.

Formaliza el concepto de lógica desarrollando los principios rectores del marco conceptual de la lógica categórica. A demás extiende propiedades estructurales para verificar diversos niveles de un sistema experto.

Merma, M. (**2016**), en su tesis titulada: "Una interpretación algebraica de la lógica proposicional y de sus implicancias en fórmulas predicativas cerradas con cuantificadores.

propone una interpretación algebraica para la lógica preposicional, dicha propuesta es importante para nuestra investigación porque nos brinda un panorama amplio de la lógica bivalente.

Suppes, P. (**1974**), en su libro titulado: Estudios de filosofía y metodología de la ciencia. Madrid: Alianza Universidad.

Sostiene que los principios de la lógica proposicional, obedecen de alguna manera a cierta regularidad lingüística anteriores al razonamiento propio de la matemática. Sustenta sus argumentos modelando los principios lógicos dentro de estructuras matemáticas.

Además, tenemos las siguientes tesis

## 2.2 Bases Teóricas

Para modelar algebraicamente los fundamentos de la lógica proposicional bivalente con ayuda de la teoría de categorías es necesario proporcionar instrumentos de corte teórico propicios para su fundamentación.

### 2.2.1 Sistemas Formales

Según Wikipedia, un sistema formal es un sistema abstracto compuesto por un lenguaje formal, axiomas, reglas de inferencia y a veces una semántica formal, que se utiliza para deducir o demostrar teoremas y dar una definición rigurosa del concepto de demostración.

### 2.2.2 Lógica Proposicional

Según Wikipedia, la lógica proposicional es un sistema formal cuyos elementos son proposiciones y cuyas constantes lógicas, están representadas por operaciones sobre estas; con la finalidad de formar proposiciones de mayor complejidad.

### 2.2.3 Teoría de Categorías

Según Wikipedia, la teoría de categorías es un estudio matemático que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos.

### 2.2.4 Sistemas Axiomáticos

Según Wikipedia, un sistema axiomático consiste en un conjunto de axiomas que se usan, mediante deducciones para demostrar teoremas.

### 2.2.5 Teoría de categorías.

Mathematics will perish before the end of this century if the present trend for senseless abstraction-I call it: theory of the empty set-cannot be blocked up.

**Según la Carta de Siegel a Mordell. (1964).**

#### 2.2.5.1 Definición de categoría

El matemático alemán George Cantor(1845-1918) y el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) inventaron la teoría de conjuntos con la finalidad de establecer condiciones de existencia y unicidad de los objetos matemáticos dentro de un contexto dado. Sin duda alguna esta teoría tuvo un papel importante en la fundamentación de la matemática. Cabe resaltar que esta teoría, hace posible el estudio de los objetos matemáticos a través de sus partes constitutivas (método analítico). De otro lado, como la matemática moderna se presenta de forma estructurada, la comprensión de los objetos matemáticos requiere de una nueva óptica totalizadora que englobe la acción de estos con su entorno (método sintético); en ese contexto surge la teoría de categorías como alternativa de comprensión del marco estructuralista que el método axiomático propone.

Esta teoría proporciona a los matemáticos un lenguaje y por lo tanto una forma de razonamiento general, expresado en términos de propiedades universales con ayuda de diagramas conmutativos con la finalidad de establecer regularidades a través del comportamiento del objeto matemático. En esta sección se considera algunas definiciones expuestas en la tesis de J. Broncano (2018).

**Definición** (Categoría). Esta difinicion a sido tomada ( )Una categoría (C) consta de una clase de objetos, obj(C), cuyos elementos son denotados por A, B, C,...etc., tal que para todo par (A; B) G obj(C) x obj(C), existe una clase de morfismos $Hom_C$ (A; B) (posiblemente vacío) de modo tal que para toda A, B, C $\in$ obj (C) y todo f $\in$ $Hom_C$ (A; B) y g $\in$ $Hom_C$ (B; C), existe un morfismo llamado composición de $Hom_C$ (A; B) x $Hom_C$ (B; C) $\rightarrow$ $Hom_C$ (A; C) el cual será denotado por g o f $\in$ $Hom_C$ (A; C), los cuales satisfacen dos axiomas:

**Axioma 1.**

Para cada A $\in$ obj(C), existe $I_A$ $\in$ $Hom_C$ (A; A), llamado morfismo identidad, tal que para f $\in$ $Hom_C$ (A; B) y g $\in$ $Hom_C$ (C; A) se cumple f o $I_A$ = f y $I_A$ o g = g.

**Axioma 2.**

Dado los morfismos f $\in$ $Hom_C$ (A; B), g $\in$ $Hom_C$ (B; C) y h G $Hom_C$ (C; D). se verifica h o (g o f) = (h o g) o f.

**Observación.** En adelante, obj(C) y $Hom_C$ (A; B) son clases para evitar algunas paradojas de la teoría de conjuntos.

**Definición (Diagrama).** Sea la categoría C. Un diagrama es una colección de vértices y arcos, etiquetados de manera coherente con objetos y morfismos. Tal como se puede apreciar.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

**Definición (Diagrama conmutativo).** Un diagrama en la categoría C es llamada conmutativa si, para cualquier par de vértices A y B todas las rutas en el diagrama desde A hasta B son iguales (en el sentido de que cada ruta en el diagrama determina morfismos compuestos iguales). Por ejemplo, si para todo g'' ∈ $Hom_C$ (P'; A) y f'' ∈ $Hom_C$ (P'; C) , f o f'' = g o g'', entonces existe un único h ∈ $Hom_C$ (P'; P) tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Es decir, g'' = f'' o h y f'' = g' o h.

**Observación** Los diagramas se empelan para establecer y demostrar propiedades de las construcciones categóricas; tales propiedades a menudo se expresan diciendo que un diagrama en particular conmuta gracias a la existencia de un único morfismo que cumple tal o cual condición.

**Ejemplo Categoría de conjuntos** (Set). Si definimos:

- La clase de objetos obj (Set) como la clase formada por todos los conjuntos.
- Por $Hom_{set}$ (A; B) a la clase de todas las funciones de A en B.
- La composición como la composición usual de funciones. entonces Set es una categoría.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

**Axioma 1.**

Dados f ∈ $Hom_{set}$ (A; B), g ∈ $Hom_{set}$ (B; C) y h ∈ $Hom_{set}$ (C; D) demostraremos que

$h\ o\ (g\ o\ f)\ =\ (h\ o\ g)\ o\ f$.

En efecto; si a G A entonces, por definición de composición se tiene:

$\big(h\ o\ (g\ o\ f\ )\big)(a) = \ h\ ((g\ o\ f)\ (a)\ )\ =\ h\ (g\ (f\ (a))\ )\ =\ (h\ o\ g)\ (f\ (a))\ =$ $((h\ o\ g)\ o\ f)\ (a)$. Es decir, $h\ o\ (g\ o\ f)\ =\ (h\ o\ g)\ o\ f$.

**Axioma 2.**

Para cada $A\ \in\ obj\ (Set)$, demostraremos que existe $I_A\ \in\ HomC\ (A;\ A)$ tal que $f\ o\ I_A\ =\ f$ y $I_A\ o\ g\ =\ g$. Para todo f ∈ $Hom_{Set}$ (A; B) y g ∈ $Hom_{Set}$ (C; A)

En efecto; $I_A$ existe por definición de la aplicación identidad; además verifica

$(f\ o\ I_A)(a)\ =\ f\ (I_A(A))\ =\ f\ (a), (I_A\ o\ g)(c)\ =\ \ I_A\ (g(c))\ =\ g(c),$ para todo $a\ \in\ A$ y todo c G C respectivamente.

**Definición (Categoría pequeña).** $C$ se llama pequeña si y solo si obj (C) es un conjunto.

**Ejemplo Categoría Carcaj** (CA). Un carcaj es una cuádrupla ordenada CA = ($C_0$, $C_1$, s, t) formada por dos conjuntos, Co = {i, k,….., j} (el conjunto de vértices) y $C_1$ = { α , β ,...., γ } (el conjunto de caminos); y dos aplicaciones s,t : $C_1 \rightarrow\ C_0$ que asocian a cada camino α ∈ $C_1$ su inicios s(α) y su fin t(α). Por lo tanto, un carcaj se puede considerar un grafo orientado (que puede tener lazos y caminos múltiples).

**Notación.**

El esquema α : i → j en CA significara: el camino dirigido α que inicia en el vértice i y termina en el vértice j. Luego un camino dirigido (de longitud n) de i a j en CA es una sucesión de vértices y caminos

(j | $\alpha_n$, $\alpha_{n-1}$,……., $\alpha_i$| i) con n $\geq$ 0 que verifica:

inicio de α 1 = i

final de α 1 = inicio de α 2

final de α 2 = inicio de entonces, MatrR es una categoría localmente pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

final de αn = j.

y para el caso n = 0 se tiene $i = j$. Luego asociamos a cada vértice i su camino trivial $e_i = (i \,||\, i)$, el cual debe ser interpretado intuitivamente como permanecer en el vértice i. Luego si definimos:

La clase de objetos obj(CA) como el conjunto $C_0$

La clase de todos los morfismos $Hom_{CA}$ como el conjunto C1.

La composición de dos caminos se hace por concatenación cuando esto es posible. Es decir, $(j\,|\beta_p, \beta_{p-1},\ldots\ldots, \beta_1|k)$ o $(l\,|\alpha_n, \alpha_{n-1},\ldots\ldots, \alpha_1|\, i)$ vale cero si $k \neq l$, y vale $(j\,|\beta_p, \beta_{p-1},\ldots\ldots, \beta_1, \alpha_n, \alpha_{n-1},\ldots\ldots, \alpha_1|)$ en el caso k = l.

entonces, CA es una categoría pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

**Axioma 1.**

La asociatividad de la composición es evidente por definición.

**Axioma 2.**

**Definición. (Categoría localmente pequeña).** La categoría C se llama localmente pequeña si para cualquier par ordenado de $objetos\,(A, B)$; $Hom\, C(A;\, B)$ es un conjunto.

**Ejemplo Categoría de matrices** ($Matr_R$). Sea R un anillo conmutativo y $M_{mxn}(R)$ el conjunto de matrices con entradas en R. Si definimos:

- La clase de objetos obj($Matr_R$) como la clase formada por todos los enteros positivos.
- La clase de todos los morfismos $Hom_{MATRR}(m; n)$ como la clase de todas las matrices A G $M_{mxn}(R)$.
- La composición como el producto matricial; es decir, para todo $A \in Hom_{MatrR}(m; n)$ y $B \in Hom_{MatrR}(p; m)$, implica que B o A = $AB \in Hom_{MATRR}(p; n)$.

Entonces, $Matr_R$ es una categoría localmente pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

**Axioma 1.**

La composición entre morfismos se hereda de la asociatividad del producto entre matrices.

**Axioma 2.**

Para cada $m \in obj(Matr_R)$ se propone como morfismo identidad $I_m \in Hom_{MATRR}(m; m)$, a la matriz identidad de orden m.

En efecto, de la teoría básica de matrices sabemos que para toda $A \in Hom_{MATRR}(m; n)$ se cumple $A \circ I_m = AI_m = A$. Análogamente, para toda $B \in Hom_{MATRR}(n; m)$ se cumple $I_m \circ B = I_mB = B$.

**Definición (Categoría pre-orden).** Una categoría C es pre- orden si, para cualesquiera A y B, $Hom_C(A; B)$ es vacío o unitario.

**Observación** Toda categoría pre-orden es localmente pequeña.

**Ejemplo Categoría 0.** Es aquella categoría sin objetos, ni morfismos. Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque están universalmente cuantificadas sobre conjuntos vacíos.

**Ejemplo Categoría 1.** Es aquella categoría que tiene un único objeto, y un único morfismo (el morfismo identidad de ese objeto). Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque la composición es trivial.

**2.2.5.2 Principio de Dualidad.**

La teoría de dualización aplicada a la axiomática categórica permite estudiar sólo un aspecto de los problemas planteados, pues los resultados que se obtengan serán cierto si y sólo si lo son sus respectivos duales. La formulación que aquí se ofrece es informal e imprecisa, para aquellos lectores que deseen mayor precisión se debe exigir una aplicación metódica de la lógica formal; por lo tanto, para aquellos interesados podrán hallar información precisa en el libro de MacLane (1971): Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York.

**Definición (Concepto categórico).** Un concepto categórico es el que se puede definir mediante una sentencia dentro de la categoría.

**Definición (Principio de Dualidad).** Si la sentencia categórica P es válida en la categoría C, entonces su enunciado dual $P^{OP}$ también es válida en C.

**Proposición** Si C es una categoría, entonces $C^{op}$ también lo es y es llamada categoría dual.

- $obj(Cop) := obj(C)$. Por lo tanto $A^{op} := A$ para todo A G obj(C).
- $Hom_{CoP}(B; A) := Hom_C(A; B)$. Luego $f^{op} : B^{op} \to A^{op}$ es un morfismo en $C^{op}$ si y sólo si $f : A \to B$ es un morfismo en C.
- La composición es inducida por C y se define de la siguiente manera:

$f^{op}$ o $g^{op} := (g \text{ o } f)^{op}$ para todo f G $Hom_C$ (A; B) y todo $g \in Hom_C(B; C)$.

**Demostración:** Se verificará los axiomas de categoría.

**Axioma 1.**

Por definición de composición en $C^{op}$ y la asociatividad de la composición en C, se tiene.

$h^{op}$ o($g^{op}$ o $f^{op}$) = $h^{op}$ o(f o g)$^{op}$ = ((f og)o h)$^{op}$ = (f o(g o h))$^{op}$ = ($h^{op}$ o $g^{op}$) o $f^{op}$

**Axioma 2.**

Como C es una categoría, para todo $A \in obj(C^{op})$, f G HomC(B; A) y $g \in Hom_C$ (A; C) existe $I_A \in Hom_C$ (A, A) tal que $I_A$ o f = f y g o $I_A$= g, luego ($I_A$ o f)$^{OP}$ = $f^{op}$, (g o $I_A$)$^{OP}$ = $g^{op}$, $I^{op}_a$ o $f^{op}$ = $f^{op}$ y $g^{op}$ o $I^{op}_A$ = $g^{op}$. □

**Observación** Por definición de categoría opuesta es evidente que $(C^{op})^{op} = C$.

### 2.2.5.3 Estructuras Abstractas

#### 2.2.5.3.1 Objetos Categóricos.

**Definición (Objeto inicial).** Cierto objeto de una categoría es llamado objeto inicial si desde el parte exactamente un único morfismo a cada uno de los demás objetos de la categoría.

**Notación.**

Se representa un objeto inicial por 0'.

**Ejemplo** En la categoría $Grp$, donde los objetos $obj(Grp)$ son grupos y clase de morfismos $Hom_{\{obj\}}(Grp)(A;\ B)$ para todo $A, B\ \in\ obj(Grp)$ son los homomorfismos entre grupos, se demuestra que cualquier grupo trivial es un objeto inicial.

En primer lugar, demostraremos que si {e} es el grupo trivial, entonces {e} es un objeto inicial.

En efecto; si B es un grupo cualquiera, entonces existe un homomorfismo $f\ :\ 0\ \rightarrow$ B. tal que $f\ (e)\ =\ e'$ y es evidente que es único.

De manera recíproca, demostraremos que, si A es un objeto inicial, entonces A = {e}. Para tal efecto, usaremos la demostración por contradicción. Es decir; si asumimos que A ≠ {e} y es un objeto inicial, entonces llegaremos a una contradicción.

Como A ≠ {e} admite por lo menos un elemento diferente de elemento nulo e, es decir A = {z,…………}, luego para cierto grupo B = {x,y,…….} con x = y es posible definir los homomorfismos f, g : A → B como f (z) = x y g(z) = y para todo z ∈ A; los cuales obviamente son diferentes pues x = y. Por lo tanto, bajo estas condiciones A no puede ser un objeto inicial.

**Definición (Objeto final).** Cierto objeto de una categoría es llamado objeto final si a él llega exactamente un único morfismo de cada uno de los demás objetos de la categoría.

**Notación**.

Se representa un objeto inicial por 1.

**Ejemplo** En la categoría Set, C es un objeto final si y sólo si es un conjunto unitario.

En efecto; demostraremos que si C = {*} es un conjunto unitario y A un conjunto cualquiera, entonces C es un objeto final. Consideremos los siguientes casos.

a) Si A = 0, es evidente que existe un único $f\ :\ A\ \rightarrow\ \ C$ llamada función vacía.

b) si A = 0, entonces existe un único $f\ :\ A\ \rightarrow\ \ C$ llamada función constante f (z) = *; para todo z G A.

Por lo tanto, C es un objeto final.

De manera recíproca, demostraremos que, si C es un objeto final, entonces C es un conjunto unitario.

Para verificar tal aseveración, usaremos su afirmación contrapositiva. Es decir, si C no es un conjunto unitario, entonces no es un objeto final. Para tal fin, consideremos los siguientes casos.

a) si C = ∅, entonces no existe f ⊂ A x C, pues cada elemento de A no tendría imagen en C. Por lo tanto C no es un objeto final.

b) si existieran x, y G C con x ≠ y, dado cualquier conjunto A ≠ ∅, es posible definir por lo menos dos funciones distintas f, g : A → C. Por lo tanto C no es un objeto final.

**Definición (Objetos isomorfos).** En toda categoría C, dos objetos A, B son isomorfos si para f G Hom C(A; B) existe g G Hom C(B; A) tal que g o f = IA, f o g = IB.

**Lema.**Si 1 y 1' son objetos finales, entonces son únicos salvo isomorfismo.

**Demostración:** En efecto; si 1 y 1' son objetos finales, entonces existe un único h' ∈ $Hom_C$(1'; 1) y un único h' ∈ $Hom_C$(1'; 1), tal que h o h' : 1' → 1' y h' o h : 1 → 1. Luego por consecuencia de la unicidad de h y h' se tiene h o h' = $I_{1'}$ y h' o h = $I_1$.

**Lema** Si 0' y 0'' son objetos iniciales, entonces son únicos salvo isomorfismo.

**Definición (Objeto cero).** Cierto objeto en una categoría se llama objeto cero, si es un objeto que simultáneamente es inicial y final.

**Notación.**

Se representa un objeto cero por 0

**Observación** Existen algunas categorías que no tienen objeto cero como es el caso de Set.

Cuando una categoría C tiene objeto cero para cualquier par de objetos (A; B) siempre $HomC(A;\ B)$ es diferente del vacío, pues siempre existe el morfismo composición.

$$A \to\ 0 \to\ B$$

**Lema** En toda categoría, el objeto cero es único salvo isomorfismo.

#### 2.2.5.3.2 Morfismo Cero

**Definición (Morfismo cero a izquierda).** $f : A \rightarrow B$ es morfismo cero a izquierda si $f\ o\ g = f\ o\ h$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in Hom\ C(C;\ A)$.

**Definición (Morfismo cero a derecha).** f : A → B es morfismo cero a derecha si g o $f = h\ o\ f$, para cualquier $C \in obj\ (C)$ y cualesquiera $g, h \in HomC(B;\ C)$.

**Observación** Todo morfismo con dominio 0' es morfismo cero a derecha y todo morfismo con condominio 1 es morfismo cero a izquierda.

**Definición (Morfismo cero).** $f : A \rightarrow B$ es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha.

**Proposición** Si C es una categoría con objeto cero, entonces para cada par de objetos $A, B \in obj(C)$ existe un único morfismo cero en $Hom\ C(A;\ B)$; denotado por $0^B{}_A$.

**Definición (Categoría con morfismo cero).** Si para todo $A, B \in obj\ (C)$ existe $0AB :$ $A \rightarrow B$ que verifica cada uno de los siguientes ítems:

a) h o $0^B{}_A = 0^C{}_A$, para todo C e obj(C) y h e $Hom_C$(B; C);

b) $0^B{}_A$ o h' = $0^B{}_C$, para todo C e obj(C) y h' e $Hom_C$(C; A). entones se dice que la categoría C posee morfismos cero.

**Observación** En toda categoría la colección de morfismos cero {$0^B{}_A$} es única.

**Proposición** Toda categoría con objeto cero es una categoría con morfismos cero.

#### 2.2.5.3.3 Ecualizador y Coequalizador

**Definición (Equalizador).** El Equalizador de $f, g : A \rightarrow B$ es el par (D, h), donde, el morfismo $h : D \rightarrow A$ satisface $f\ o\ h = g\ o\ h$ y el objeto D es universal respecto de esta propiedad. Para todo morfismo $f' \in HomC(C;\ A)$ que satisface $f\ o\ f' = g\ o\ f'$, existe un único $h' \in HomC(C;\ D)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dotted, "h'"] \arrow[ur, "f'"'] & & \end{tikzcd}$$

**Proposición** Si $(D, h)$ y $(D', h')$ son equalizadores de $f, g \in HomC(A;\ B)$ entonces D es isomorfo a D' y el isomorfismo conmuta con los morfismo h y h'.

**Demostración:** El resultado es consecuencia de la definición de equalizador.

**Proposición** Si $f' : D' \rightarrow D$ es isomorfismo y es un equalizador de $f, g\ G\ Hom\ C(A$; B) entonces $(D', h\ o\ f')$ es un equalizador para f y g.

**Proposición** El núcleo (ker(f),K) del morfismo $f : A \rightarrow B$ es el equalizador de $f, 0 \in HomC(A;\ B)$.

**Lema** Toda categoría ∈ con objeto cero si tiene equalizador, entonces tiene núcleos.

**Definición (Coequalizador).** El coequalizador de $f, g : A \rightarrow B$ es el par $(E, h)$, donde el morfismo $h \in HomC(B;\ E)$ satisface la igualdad $h\ o\ f = h\ o\ g$ y el objeto E es universal respecto de esta propiedad. Para todo $h' \in HomC(B;\ C)$ con $h'\ o\ f = h'\ o\ g$ existe un único $f' \in HomC(E;\ C)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & E \arrow[d, dotted, "f'"] \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

### 2.2.3.5.4 Pushout y Pullback

**Definición (Pullback).** Un Pullback para los morfismos $g : A \rightarrow B\ y\ f : C \rightarrow B$ ocurre si y solo si, los morfismos f' y g' satisfacen las siguientes propiedades:

a) Conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

b) Para todo $g'' \in HomC(P';\ A)$ y $f'' \in HomC(P';\ C)$ si $f\ o\ f'' = g\ o\ g''$, existe un único h ∈ Hom$_C$(P'; P) tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Es decir, $g'' = f' \, o \, h$ y $f'' = g' \, o \, h$.

**Lema** Dado el Pullback para $g : A \to B$ y $f : C \to B$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Es otro Pullback para f y g, entonces existe un único isomorfismo $h \in HomC(P; P')$ tal que $f' = f" \, o \, h$ y $g' = g" \, o \, h$.

**Definición (Pushout).** Un Pushout para $g : A \to C$ y $f : A \to B$ ocurre si y sólo si, los morfismos f' y g' satisfacen las siguientes propiedades.

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & P
\end{tikzcd}$$

b) Para todo $f" \in Hom\, C(B; P')$ y $g'' \in HomC(C; P')$ si $f" \, o \, f = g'' \, o \, g$, entonces existe un único $h \in HomC(P; P')$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & P \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}$$

**Lema** Dado el Pushout para $g : A \rightarrow C$ y $f : A \rightarrow B$

También es Pushout de f y g, entonces existe un único isomorfismo $h \in HomC(P'; P)$ tal que $g' = h\, o\, g''$ y $f' = h\, o\, f''$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & P
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g''"] \\
C \arrow[r, "f''"'] & P'
\end{tikzcd}$$

**2.2.5.3.5 Producto y Coproducto**

**Definición (Producto).** El producto de dos objetos A,B ∈ C es el triplete $(A\, x\, B, \pi A, \pi B)$, con $A\, x\, B \in obj(C)$, $\pi A \in HomC(A\, x\, B;\ A)$ y $\pi B \in HomC(A\, x\, B;\ A)$, llamados proyecciones canónicas, los cuales cumplen la siguiente propiedad universal respecto al objeto $A\, x\, B$. Dado $C \in obj(C)$ si $f \in HomC(C;\ A)$ y $g \in HomC(C;\ B)$ entonces existe un único $h = (f, g) \in HomC(C;\ A\, x\, B)$ tal que

$0h = f, 0\, h = g$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
& & A \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[r, dotted, "h"'] \arrow[drr, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

**Proposición** Si $(A\,x\,B, \pi A, \pi B)$ es el producto de $A, B \in obj(C)$ y existe un isomorfismo $h\,E\,HomC(P';\,A\,x\,B)$, entonces $(P';\,\pi Ao{\sim}h, \pi Bo{\sim}h)$ también es un producto de A y B.

**Demostración:** Dado $C \in obj(C)$ y $f \in HomC(C;\,A)$, $g \in HomC(C;B)$, demostraremos que existe un único $h \in HomC(C;\,P')$ tal que $(\pi A\ o\ {\sim}h)\ o\ h = f$ y $(\pi B\ o\ {\sim}h)\ o\ h = g$

En efecto; como $(A\,x\,B, \pi A, \pi B)$ es el producto de $A, B \in obj(C)$ existe un único morfismo $g' \in HomC(C;\,A\,x\,B)$ tal que $\pi A\ o\ g' = f$ y $\pi B\ o\ g' = g$. Como ${\sim}h \in HomC(P';\,A\,x\,B)$ es un isomorfismo existe ${\sim}h - 1 \in HomC(A\,x\,B;\,P')$. Por lo tanto, si definimos $h = (\,{\sim}h - 1\ o\ g') \quad \in HomC(C;\,P')$, entonces existe un único morfismo $h \in HomC(C;\,P')$ tal que o $(\pi A\ o\ {\sim}h) o\ h = f$ y $(\pi B\ o\ {\sim}h)\ o\ h = g$.

**Teorema** Si $(A\,x\,B, \pi A, \pi B)$ y $(P, \pi' A, \pi' B)$ son los productos de los objetos $A, B \in C$, entonces $A \times B$ es isomorfo a P.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[d, dashed, "f'"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "f"] & B \\
 & P \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] &
\end{tikzcd}$$

**Demostración**: Del diagrama conmutativo adjunto,

**se** deduce:

$$(\pi' A\ o\ f)\ o\ f\,' = \pi' A\ o\ (f\ o\ f') = \pi' A\ o\ f\,' = \pi' A\ o\ IP'$$

$$(\pi' B\ o\ f)\ o\ f\,' = \pi' B\ o\ (f\ o\ f') = \pi' B\ o\ f\,' = \pi' B\ o\ IP'$$

Es decir, $I_{P'}$ y f o f ' hacen conmutar el diagrama, luego por la unicidad en la definición del producto se deduce $f\ o\ f' = I_P$ y de manera Simétrica se obtiene $f'\ o\ f = I_{A \times B}$. Por lo tanto, A x B es isomorfo a P.□

**Lema** Si C una categoría con objeto cero y producto y definimos $\delta_{\{jk\}} \in HomC(Aj;\,Ak)$ para cada $j, k \in \{1, 2\}$ tal que $\delta_{jk} = 0$ cuando $j \neq k$ y $\delta jj = Iaj$, entonces existen $iAj \in HomC(Aj;\,A1 \times A2)$ llamados inclusiones, tales que $\pi\,Ak$ o $i_{Aj} = \delta_{jk}, Vj, k$.

**Demostración:** La afirmación se deduce de los siguientes diagramas conmutativos y la propiedad universal de producto, se logra verificar.

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_1 \arrow[urr, "I_{A_1}"] \arrow[r, dotted, "i_1"'] \arrow[drr, "0"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_2 \arrow[urr, "0"] \arrow[r, dotted, "i_2"'] \arrow[drr, "I_{A_2}"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}$$

**Proposición.** Si C es una categoría con productos binarios, entonces para $f \in HomC(A;\ C)$ y $g \in HomC(B;\ D)$, existe un único morfismo $f \times g$ definido por

$f \times g = (f\ o\ \pi A, g\ o\ \pi B\ ) \in HomC(A\ x\ B;\ C\ x\ D)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

**Demostración:** Se deduce por la definición de producto.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] & & C \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[rr, dotted, "f\times g"'] & & C \times D \arrow[ur, "\pi_C"'] \arrow[dr, "\pi_D"] & \\
 & B \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}$$

**Observación** Por definición de producto, se cumple cada una de las siguientes proposiciones.

a) $I_A \times I_B = I_{A\times B}$.

b) $(f, g)\ o\ h = (f\ o\ h, g\ o\ h)$.

c) $(f\ x\ g)\ o\ (h\ x\ f\ ') = (f\ o\ h)\ x\ (g\ o\ f\ ')$.

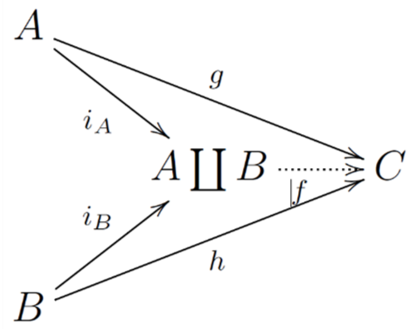
d) $(f\ x\ g)\ o(h, f\ ') = (f\ o\ h, g\ o\ f\ ')$.

**Teorema** En toda categoría, si existe $A \times (B \times\ C)$ y $(A \times B) \times C$, entonces son isomorfos.

**Teorema** En toda categoría si existen los productos binarios, entonces existe el producto para un número finito de objetos.

**Definición** (Coproducto). El coproducto de $A, B \in\ obj(C)$, es el triplete $(A[]B;\ i_A, i_B)$, donde $A]JB \in obj(C)$, $i_A \in\ HomC(A, \hat{}B)$ e $i_B \in\ HomC(B, A£JB)$, llamados inclusiones canónicas, que satisfacen la siguiente propiedad universal.

Dado $C \in\ obj(C)$, $g \in\ HomC(A, C)$ y $h\ \in HomC(B, C)$, existe un único morfismo $g\backslash Jh \in\ HomC(A£JB, C)$ tal que $f\ o\ i_A\ =\ g, f\ o\ i_B\ =\ h$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.




**Proposición** Dado el coproducto $(A£J\ B, i_A, i_B)$ de $A, B \in obj(C)$, si existe un isomorfismo $h \in Hom\ C(A\ B;\ Q)$, entonces $(Q;\ hoi_A, hoi_B)$ también es un coproducto para A y B.

**Proposición** Si $(A£JB, iA, iB)$ y $(Q, i'A, i'B)$ son coproductos de los objetos A; B, entonces A£JB es isomorfo a Q.

**Teorema** Si existen $A\ ]j\ (\hat{}C)$ y (^B) [] C, entonces son isomorfos.

**Lema** Sea C una categoría con objeto cero y coproductos, si para cada $j, k \in \{1, 2\}$, se define $JK \in Hom\ C(AJ;\ Ak)$ tal que $JK\ =\ 0$ cuando $j\ =\ k$ y $JJ\ =\ IAj$, entonces existen $nAj \in\ Hom\ C(AX\ A2$; AJ), tales que $nK\ o\ iAj\ =\ j, Vj, k$.

**Teorema** En toda categoría si existe coproductos binarios, entonces existe el coproducto para un numero finito de objetos.

### 2.2.5.3.6 FUNTOR

En toda categoría C se puede apreciar, que la clase $Hom\ C$ cobra sentido explícito cuando para todo par ordenado de objetos (A, B) se define $HomC(A, B)$. Luego si definimos $HomC(—;\ —): C \times C\ \rightarrow\ C$ se deduce que $HomC(—;\ —)$ nos permite establecer conexiones entre diversos objetos. Por lo tanto, es necesario definir la noción de preservación de estructura entre dos categorías en el sentido: objetos-

objetos, morfismo-morfismo, morfismo identidad- morfismo identidad y la misma operación de composición. En ese sentido se requiere definir a los funtores.

**Definición** (Funtor o Funtor Covariante). Sean C y D dos categorías. Un funtor covariante de C en D (denotado como $F : C \to D$) consiste en dos aplicaciones:

1.La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto A de C un objeto F(A) de D.

2.La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo $f : A \to B$ de C el morfismo $F(f) : F(A) — y\ F(B)\ de\ D$.

y satisface los siguientes axiomas:

Axioma **1.**

$$F(f\ o\ g) = F(f)\ oF(g).$$

**Axioma 2.**

Para cada $A\ G\ C, F(IA) = IF(A)$.

**Ejemplo** Sean las categorías C y Set. Si A es un objeto fijo en C, entonces $Hom\ C(A; —) : C —>$ Set es un funtor covariante. Para verificar la afirmacion se debe observar como actóa $Hom\ C(A; —)$ sobre los objetos y morfismos de C. Es decir:

$Hom\ c(A; —) : obj(C) \to obj\ (Set)$

$B \to Hom\ C(A; —)(B) = Hom\ C(A;\ B)$

$Homc(A; —) : HomC(B;\ C) \to HomF(B);\ F(C))$

$f \to Homc(A; —)(f) = HomC(A;\ f)$

con:

$Hom\ C(A;\ f) : Hom\ C(A;\ B) \to Hom\ C(A;\ C)$

$h\ Homc(A;\ f\ )(h) = f\ o\ h$

satisface los dos axiomas de funtor covariante.

**Axioma 1.**

Si $f \in HomC(B;\ C)$ y $g \in HomC(C;\ D)$, entonces $g\ o\ f \in HomC(B;\ D)$. Por lo tanto:

$Homc(a;\ g\ o\ f\ )(h)\ =\ (g\ o\ f)\ o\ h =\ go\ (f\ o\ h)$

$Homc(A;\ g)(f\ o\ h)\ Homc(A;\ g\hat{}Homc(A;\ f\ )(h)\hat{}Hom\ c(A;\ g)\ o\ Hom\ c(A;\ f\ ))(h)$

para todo $h \in\ Hom\ C(A;\ B)$.

**Axioma 2.**

Como para cada $B \in\ obj\ (C)$ existe $IB \in Hom\ C(B;\ B)$, se tiene:

$Hom\ c(A;\ IB)(g)\ =\ IB\ o\ g\ =\ g\ =\ iHome(A; B)\ o\ g$ para todo $g \in\ HomC(A;\ B)$.

**Definición (Funtor contravariante).** Sean C y D dos categorías. Un funtor contravariante de C en D (denotado como $F\ :\ C\ \rightarrow\ D$) consiste en dos aplicaciones:

1.La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto A de C un objeto F(A) de D.

2.La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo $f\ :\ A\ \rightarrow\ B$ de C el morfismo $F(f)\ :\ F(B)\ \rightarrow F(A)$ de D.

y satisface los siguientes axiomas:

**Axioma 1.**

$F(f\ o\ g)\ =\ F(g)\ o\ F(f)$.

**Axioma 2.**

Para cada $A\ e\ C, F(IA)\ =\ IF(A)$.

Los funtores que preservan la dirección de morfismos se llaman funtores covariantes y los que cambian su dirección se llaman funtores contravariantes.

**Ejemplo** Sean las categorías C y set. Si B es un objeto fijo en C, entonces $HomC(—;\ B)\ :\ C\ —>$ Set es un funtor contravariante. Para verificar la afirmación se debe observar como actúa $HomC(—;\ B)$ sobre los objetos y morfismos de C. Es decir:

$Homc(—;\ B)\ :\ obj(C)\ \rightarrow\ obj(Set)$

$A\ \rightarrow\ HomC(—;\ B)(A)\ =\ HomC(A;\ B)$

$Homc(—;\ B)\ :\ HomC(A;\ B)\ \rightarrow\ HomSE\hat{}F(A);\ F(B))$

$f\ \rightarrow\ Homc(—;\ B)(f)\ =\ Hom£(f;\ B)$

con:

$Hom\, C(f;\ B) : Hom\, C(A;\ B) \ \rightarrow\ Hom\, C(C;\ B)$

$h\ \rightarrow\ Hom\, e(f;\ B)(h)\ =\ h\ o\ f$

Se verifica que $HomC(—;\ B) : C\ \rightarrow$ Set satisface los dos axiomas de funtor contravariante:

**Axioma 1.**

Si $f\ G\ Hom\, C(C;\ A)$ y $g\ G\ Hom\, C(D;\ C)$, entonces para todo $h\ G\ Hom\, C(A;\ B)$ se cumple:

$HomC(f\ o\ g;\ B)(h)\ =\ h\ o\ (f\ o\ g)\ =\ (h\ o\ f)\ o\ g$

$HomC(g;\ B)(h\ o\ f)\ Hom\ C(g;\ B)(Hom\ £(f;\ B)(h)$^

$(Hom\ C(g;\ B)\ o\ Hom\ £(f;\ B$^ $(h)$

**Axioma 2.**

Como para cada $A\ G\ obj(C)$, existe $IA\ G\ HomC(A;\ A)$, se deduce:

$Hom\ c(IA;\ B)(g)\ =\ g\ o\ IA\ =\ g\ =\ g$ o $Inom \in (A; B)$ para todo $g\ G\ Hom\ C(A;\ B)$

Definición (Composición de funtores). Sean los funtores $F : C\ \rightarrow\ D$ y $G : D\ \rightarrow\ B$. La composición $G\ o\ F : (t\ \rightarrow\ B$ se define como: $(G\ o\ F)(A)\ =\ G(F(A$^ $y\ (G\ o\ F)(f)\ =$ ^$F(f))$.

**Observación** En toda categoría C, si definimos $I: C\ \rightarrow\ C$ como $I(A)\ =\ A$ y $I(f)\ =\ f$, cumple los siguientes axiomas:

**Axioma 1.**

$I(g\ o\ f) =\ g\ o\ f\ =\ I(g)$ oí$(f)$

**Axioma 2.**

$I(IA)\ =\ IA\ =\ Ij(A)$ Por lo tanto es un funtor y sería llamado funtor identidad.

**Proposición** Si definimos:

1. La clase de objetos obj (Cat) como la clase formada por todas las categorías.

2.La clase de todos los morfismos $Homcat(C;\ B)$ como la clase de todos los funtores entre las categorías C y B.

3.La composición como la composición definida en 4.3.5 entonces Cat es una categoría, llamada categoría de categorías.

**2.2.5.3.7 Propiedades que Preservan los Funtores**

**Definición (Funtor que preserva productos).** Se dice que el funtor $F : C —> B$ preserva productos, si $(F(A\ x\ B), F(ni), F(n2))$ es un producto de $F(A)$ y $F(B)$ en la categoría B.

**Definición** (Funtor y objeto cero). El funtor $F : C \rightarrow B$ preserva objeto cero, si $F(0)$ es objeto cero en la categoría B.

**Definición** (Funtor y morfismo cero). Se dice que el funtor $F : C —> B$ preserva morfismo cero si F(0) es un morfismo cero en la categoría B.

**Lema** Sea $F : C —> B$ es un funtor. F preserva objeto cero si y sólo si F preserva morfismos cero.

**2.2.6 LÓGICA**

Las matemáticas constituyen la ciencia de la forma y la cantidad; el razonamiento matemático es simplemente lógica aplicada a la observación de la forma y la cantidad.

**Según Edgar Allan Poe. (1809-1849), explica lo siguiente:**

El proyecto logicista (reducir la matemática a la lógica) iniciado por North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell (1872 -1970) fracaso tras la demostración del teorema de imcompletitud de Kurt Godel (1906 - 1978). Sin embargo, este fallido proyecto mostró algunas lecciones importantes; una de ellas muestra que los límites entre la lógica y la matemática no están tan claros como parecían y que existe una suerte de continuidad entre ambas disciplinas. Existe una gran cantidad investigaciones que, siguiendo la dirección del proyecto logicista, formulan interpretaciones logias de la matemática, pero hay pocos que siguen el camino inverso. Esta tesis pretende establecer la posibilidad de interpretar en términos matemáticos, específicamente algebraicos, ciertos fragmentos específicos de la lógica bivalente.

Se entiende por lógica bivalente, aquella lógica, que admite, para cada proposición, dos valores derivativos a saber: verdadero o falso. Es decir, no hay una tercera opción. Además, son válidos los siguientes dos principios:

**Principio de No Contradicción.**

Si una proposición es verdadera no, puede también ser falsa.

**Principio del Tercio Excluido.**

Si una proposición es falsa, entonces su negación es verdadera y viceversa.

En este capítulo describiremos los principios y las nociones fundamentales y necesarias para la comprensión de nuestra propuesta de investigación.

#### 2.2.6.1 Historia de la Lógica por su Objeto de Estudio

La lógica ha tenido significados diferentes, tanto en relación a sus propósitos como a sus objetos de estudio o del valor epistémico de sus conclusiones. Este proceso evolutivo ha contribuido a distinguir cuatro grandes períodos, de los cuales hablaremos a continuación:

a) **La Lógica Griega.** La cultura griega de los siglos clásicos se caracterizó, entre otras muchas cosas, por el rol destacado que tenían en su sociedad el discurso y la palabra. Los sabios y maestros de oratoria, conscientes del valor de sus enseñanzas, no desaprovecharon la oportunidad y fueron de isla en isla, de puerto en puerto, enseñando retórica, escribiendo leyes y constituciones, y, sobre todo, haciéndose inmensamente ricos.

b) **La Lógica Medieval.** Esta directamente orientada al ejercicio racional de la búsqueda de la divinidad, uno de los aportes que debemos destacar en este periodo, es que comienzan a hacerse populares las Tres Leyes de la Lógica:

- Ley de identidad. Todo ente es un ente
- Ley de contradicción. Ningún ente es y no es

- Ley del tercero excluido. Los entes son o no son.

c) **La Lógica Moderna.** Es una etapa histórica del conocimiento humano, donde el racionalismo destaca la universalidad de las verdades matemáticas, así como la alta abstracción de sus objetos y sus argumentos. Por lo tanto, se busca un simbolismo universal libre de antigüedades.

d) **La lógica Matemática.** Se caracteriza por la introducción de la matemática en la lógica, este hecho fue un paso fructífero para la lógica, porque favoreció el pensamiento analítico de sus conceptos sin considerar la preeminencia de su valor filosófico. A partir aquí en adelante la lógica experimentara un crecimiento sustantivo en sus alcances, conceptos y métodos. Asó mismo se hacen populares dos maneras de abordar el estudio de la lógica: desde el punto de vista del significado de sus símbolos (la semántica) o de su manipulación (sintaxis).

#### 2.2.6.2 ¿Qué es la Lógica?

En esta tesis asumimos que la lógica en general es el estudio del razona-miento válido o correcto y para definir una lógica en particular se debe definir un lenguaje artificial; con un alfabeto y unas reglas gramaticales de formación de expresiones bien formadas (ebf) a los cuales se les atribuye significado mediante interpretaciones semánticas.

#### 2.2.6.3 Aplicaciones de la Lógica

La lógica se ha aplicado con éxito a la matemática y a su fundamento (G. Frege, B. Russell, D. Hilbert, P. Bernays, H. Scholz, R. Carnap, T. Skolem), a la física (R. Carnap, A. Dittrich, B. Russell, E. Shannon, N Whitehead, P. Fevrier), a la biología (H. Woodger, A. Tarski), a la psicología (B. Fitch, G. Hempel), al derecho y a la etica (K. Menger, U. Klug, P. Oppenheim), a la economía (J. Neumann, O. Morgenstern), a la metafísica (J. Salamucha, H. Schoz, M. Bonchenski), así mismo sus aplicaciones a la ciencia de la computación han sido extremadamente provechosas.

#### 2.2.6.4 La Noción de Verdad

Un valor de verdad es un ente que se hace corresponder a una expresión bien formada al clasificar a esta con respecto a la verdad o falsedad, en forma intuitiva una proposición es verdadera si su contenido que transmite esta en concordancia con la realidad, en el siguiente sentido: existe un procedimiento para verificar se ella describe o no el contenido transmitido. Así mismo debe ser posible, de alguna manera, decidir se una proposición es verdadera o no. Según cuáles sean los valores de verdad que se reconocen y según las relaciones que se admitan entre ellos, determina la lógica que uno defina.

**a) Proposición**

Es una expresión que puede ser afirmada o negada

**b) Argumento**

Un argumento es un grupo de proposiciones llamadas premisas al que sigue una conclusión.

**c) Argumentos Deductivos Válidos**

Un argumento deductivo es válido si a partir de todas sus premisas ver-daderas se obtiene una conclusión verdadera.

**Observación La** verdad y la falsedad son atributos de las proposiciones, la validez y la invalidez son atributos de los argumentos. La verdad o la falsedad de la conclusión de un argumento no determina por sí misma la validez o invalidez del argumento. Más aun, el hecho de que un argumento sea válido no garantiza la verdad de su conclusión.

**a) Lenguaje Formal**

Un lenguaje formal está dado por un conjunto de símbolos que se combinan entre sí para formar expresiones bien formadas (ebfs) mediante reglas de formación especificadas con anterioridad.

**Definición (Alfabeto).** Un alfabeto A es un conjunto contable de símbolos.

**Ejemplo** El alfabeto castellano.

**Definición (Expresión).** Una Expresión es cualquier sucesión finita de símbolos construida con ayuda de un alfabeto U, incluyendo la palabra vacía A. Luego si U * = {expresiones sobre U}, entonces:

$U \ * = \ Ui \in N\ Ui$ donde $Ui \ = \ U\ x\ U\ x \ldots\ldots.\ x\ U\ y\ U0 \ = \ A.i \ \ veces$

**Ejemplo** Si U = {0,1}, entonces U * = $U_{i\in N}$ $U^i$

**Observación** Una expresión también suele definirse como una concatenación finita de símbolos de U y suele representarse mediante = $S_1S_2S_3$………$S_n$.

**Definición (Longitud de una expresión).** La longitud de una expresión es el número de símbolos (incluyendo repeticiones) de A en ella.

Así por ejemplo si — = s^2s3 sn, entonces su longitud es representada por | = n.

**Definición. (Igualdad entre expresiones).** Dos expresiones — = s1s2s3 sn y 0 = r1r2r3 rn son iguales — = 0 si y solo si s = r para cada i G {1, 2, 3,..., n}.

**Definición** (Concatenación de expresiones). Dadas dos expresiones — = s1s2s3 sn y 0 = r1r2r3 rn, la concatenación entre ella es denotada por —0 y es definido como —0 = s1s2s3 sn.r1 r2r3

**Proposición** Para todo — G A*, se cumple —A = A— = —.

**Definición (Lenguaje formal).** Un lenguaje formal L es una pareja ordenada (A, E) donde A es un alfabeto y E C A* es el conjunto de expresiones bien formadas (ebfs) mediante ciertas reglas sobre el alfabeto.

**Observación** Cuando E = A* se puede obviar el lenguaje L y solo hablar del conjunto generado sobre su alfabeto.

**Ejemplo** Dado el alfabeto A = {0,1} es posible definir el conjunto de expresiones como A* = {A, 0,1, 00, 01,10,11,100,……} y así obtener por ejemplo las ebfs E = {1,10,100,1000}.

a) **Teoría Formal**

Para construir un sistema lógico es necesario crear una colección de reglas (como las creadas en gramática) denominadas " reglas de inferencia", estas indican como obtener "conclusiones" a partir de "premisas". Por tal razón es necesario tener presente el concepto de teoría formal.

**Definición (Teoría formal).** Se llama teoría formal T a cualquier subconjunto de un lenguaje formal L.

**Definición (Sistema deductivo).** Un sistema deductivo D es el par (T, R), donde:

1. T es una teoría, cuyos elementos son llamados axiomas, y
2. R es el conjunto de reglas de inferencia.

**Observación** En general un sistema deductivo es un mecanismo que sirve para generar una teoría. Además, observé que los axiomas pueden ser vistos como reglas de inferencia con cero premisas. Lo que reduce el concepto de sistema deductivo a una colección de reglas de inferencia.

**a) Sistema Formal**

**Definición (Sistema formal).** Un sistema formal F es el par (L; D) donde L es un lenguaje formal y D es un sistema deductivo con reglas de inferencia y axiomas definidos sobre L.

**Observación** En cualquier sistema formal F, el sistema deductivo es una gramática para las ebf del lenguaje pues las divide en dos categorías, aquellas que sí son consecuencia de los axiomas y las que no.

**Definición (Deducción formal).** La deducción de una ebf en el sistema formal F a partir de un argumento r es un conjunto finito y ordenado de ebfs tal que, al aplicar las reglas de inferencia de R se concluye -0.

**Definición Consecuencia formal).** Una ebf ^ es consecuencia formal de un argumento r en el sistema formal F, si existe una deducción formal de ^ a partir de r en F. Es te hecho sería denotado por r hF

**Definición (Teorema).** Una ebf es un teorema del sistema formal F si es consecuencia del vacío. Es decir, la deducción de no requiere de una premisa (solo se usan axiomas y teoremas obtenidos previamente). En este caso escribiremos 0 hF

**Semántica y Sistemas Lógicos**

En lógica las semánticas son instrumentos para dar la noción de validez y/o veracidad de las ebfs sobre L.

**Definición (Semántica).** Una semántica S se define como el par (C, =), donde C es una colección de entes similares entre sí y = es una relación de satisfactibilidad entre estos y las ebfs de L. Luego, se dice que ^ G L es satisfactible bajo S si y sólo si alguna relación específica se satisface entre algún elemento T G C y Este hecho serí denotado como =T

**Definición (Sistema lógico).** Un sistema lógico es el triple (L, D, S) donde, L es un lenguaje formal, D un sistema deductivo y S una semántico.

**Definición (Consecuencia semántico).** En un sistema lógico, la ebf — e L es consecuencia semántica de un conjunto r de premisas, representado por r = —, si cada objeto T e C de la semántica S que satisfaga a las ebfs de r también satisface a —.

**Definición (Satisfactibilidad de una teoría).** Dada una teoría T en un sistema lógico y T e C un objeto de la semántica S, se dice que T satisface a T (denotado por =TT), si =T — para cada — e T.

**Definición (Validez lógica).** Dado un sistema lógico, una ebf — e L es lógicamente válida, expresado por = —, si todo objeto de la semántica S la satisface.

**Definición. (Consistencia).** Se dice que una teoría T de un sistema lógico, es consistente si y solo si carece de contradicciones. En caso contrario se dice que la teoría es inconsistente.

**Definición (Cómpletud).** Un sistema lógico es completo respecto a alguna propiedad, si toda ebf que tenga la propiedad también es un teorema de dicho sistema lógico. En caso contrario se dice que este es incompleto.

**Definición. (Decidibilidad).** Una teoría es decididle si existe un procedimiento efectivo para determinar si una ebf es teorema o no de la teoría. Es decir, si hay un algoritmo que en una cantidad finita de pasos puede afirmar o negar la pertenencia de la ebf en la teoría.

### 2.2.5.7 LÓGICA BIVALENTE O PROPOSICIONAL

Según moreno j. yoliño m.(1979) explica que los principios de la lógica bivalente esquematizan los procesos deductivos de la razón y embarcan a la creatividad en el inmenso mar de la intuición. Moreno J. Yoliño M. (1979-?)

Según Delia Teresa Echave, et al (Op. cit., páginas: 35-37), dice que la llaman lógica proposicional, se llama así porque para ellos la proposición es el elemento general del pensamiento que se constituye de conceptos, la proposición es el contenido de su expresión verbal llamado enunciado. La lógica Proposicional es la forma más sencilla y popular de estudiar los razonamientos validos su dinámica consiste en utilizar literales para representar proposiciones, luego ligarlas por medio de conectivos y, finalmente, analizar las inferencias y razonamientos válidos a través de las relaciones extensionales entre los valores de verdad de las proposiciones y dichos conectivos. También se llama lógica bivalente pues el valor veritativo de las proposiciones son son dos: verdadero o falso.

#### 2.2.5.7.1 Sintaxis de la Lógica Proposicional

En esta sección se definirá las componentes de los sistemas formales. Los símbolos de los alfabetos tienen adjunto un número no negativo llamado ariedad el cual proporciona información respecto al modo de leerlo en el contexto del lenguaje formal que se está usando.

**Definición (Lenguaje formal proposicional).** El lenguaje formal para representar la lógica bivalente (lógica proposicional) LProp es definido por los siguientes elementos:

1.Un alfabeto U está dividido en:

a) símbolos de aridad cero, $\Omega_0$ = = {(,), $P_0$, $P_1$, $P_2$, ………} los cuales a su vez, se clasifican en símbolos de agrupación: {(;)}, y en letras proposicionales o átomos: $A_{to}$ = {$p_0$, $p_1$,$p_2$, ……. }.

b) conectores de aridad uno, $\Omega_1$ = {¬}

c) conectores de aridad dos, $\Omega_2$ = {⇒,⇔,Λ, V}. Además, estos conectivos serán llamados como:

| Conectores |
|---|
| ~ (negación) |

| |
|---|
| Λ (conjunción) |
| V (disyunción) |
| ⇒ (condicional) |
| ⇔ (bicondicional) |

*Nombres de los Conectores Lógicos.*

1.Ciertas reglas describen como construir las ebfs en $L_{Prop}$ que suelen ser llamadas también proposiciones.

$R_1$: Si p G Ato, entonces p es una proposición, es decir p ∈ $L_{Prop}$.

$R_2$: Si v es una proposición, entonces ¬v es una proposición.

$R_3$: Si v ,0 son proposiciones y o ∈ $\Omega_2$, entonces (v o 0) es una proposición

$R_4$: Ninguna otra cosa es una ebf de $L_{Prop}$.

**Teorema** Una propiedad se cumple para toda proposición de L si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1.Todas las proposiciones p ∈ $A_{to}$ cumplen la propiedad.

2.Si la proposición v cumple la propiedad, entonces ¬v cumple la propiedad.

3.Si cualesquiera dos proposiciones v y 0 cumplen la propiedad entonces también la cumplen (v Δ 0) para todo Δ ∈ $\Omega_2$ y toda proposición v ,0 ∈ $L_{prop}$.

**Demostración:** En efecto; si suponemos que todas las proposiciones de $L_{Prop}$ cumplen con la propiedad, entonces por $R_1$ todo p ∈ $A_{to}$ los cumplen. Por lo tanto se verifica (1). De otro lado, por las reglas $R_2$ y $R_3$ se verifican simultáneamente las condiciones (2) y (3). De manera recíproca, si suponemos que se cumplen las condiciones (1), (2) y (3), entonces demostraremos que toda proposición de $L_{Prop}$ la cumple.

En efecto; la demostración será hecha por inducción sobre la longitud de las proposiciones.

Si v tiene longitud uno, entonces v ∈ $A_{to}$ y por la regla $R_1$ se concluye que v cumple la propiedad. Ahora supongamos que toda v ∈ $L_{Prop}$ tiene longitud n y cumple con la propiedad, entonces por $R_2$ y $R_3$ se concluye que —v también cumple con la propiedad. Por lo tanto, para cualquier numero natural m, si la longitud de v es m, entonces la proposición v cumple con la propiedad, con lo que se verifica la afirmación.

**Lema** Todas las ebfs de $L_{Prop}$ tienen tantos paréntesis izquierdos como paréntesis derechos.

**Demostración**: Si definimos la propiedad P: tiene tantos paréntesis izquierdos como derechos, entonces demostraremos que P satisface las reglas (1); (2) y (3) del teorema anterior

1.Las letras proposicionales $\{p_0;\ p_1;p_2;\ldots\ldots\}$ tienen 0 paréntesis izquierdos y 0 paréntesis derechos. Por lo tanto, cada $p \in A_{to}$ cumple P.

2.Supongamos que $v \in L_{Prop}$ cumple P. Entonces ¬v tiene los mismos paréntesis que v, es decir ¬v cumple con P.

3.Finalmente supongamos que v, $o \in L_{Prop}$ cumplen con P. Entonces (v o o) tiene los mismos paréntesis de v,o y un izquierdo más y un derecho mis. Por lo tanto (v o 0) cumple con P.

**Definición (Axiomas).** Es un subconjunto de las ebf (proposiciones) de $L_{Prop}$ de las cuales se deducen otras proposiciones formales mediante la aplicación de las reglas de transformación del lenguaje. Los axiomas, no tienen significado ni valor de verdad. En particular, no son enunciados verdaderos y, por tanto, no se los elige por su evidencia.

**Definición (Teoremas).** Son las ebfs de $L_{Prop}$ que se deducen de los axiomas mediante la aplicación de alguna regla de transformación. Los axiomas se consideran deducibles de sí mismas, por lo tanto son teoremas. Así, el conjunto de los axiomas de $L_{Prop}$ está incluido en el de los teoremas.

#### 2.2.5.7.2 Semántica de la Lógica Proposicional.

La razón principal del estudio de la lógica proposicional es el de extensionalidad de las proposiciones, el cual dice que el valor de verdad de una proposición depende únicamente del de sus subfórmulas. Esto motiva la definición de funciones de valores de verdad que se extiendan a todo $L_{prop}$.

**Definición (Semántica).** Una semántica se define como el par ($A_{to}$, S), donde S es una relación de satisfactibilidad definida de la siguiente manera:

1. S : $L_{Prop} \rightarrow \{V\ F\}$.

2.Si S (p) = V, entonces p es verdadero y si S (p) = F, entonces p es falso.

**Definición (Evaluación de veracidad).** Una valuación o asignación de valores de verdad consiste en una función v : $A_{to} \rightarrow \{0,1\}$ que asigna a cada letra proposicional un valor veritativo.

**Definición (Razonamiento).** Es cualquier secuencia finita de proposiciones de L que tiene la siguiente estructura:

$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots. \wedge p_n \Rightarrow q$.

Donde n es un número entero positivo. A las proposiciones $p_i$, i = 0, 1,….., n se les llama premisas del razonamiento y a la proposición q, conclusión del mismo.

**Definición (Razonamiento válido).** Es todo razonamiento donde la conclusión q es verdadera cada vez que todas las premisas $p_i$, i = 0, 1, …., n lo sean.

**Observación** Un razonamiento valido también se llama inferencia y queda representado por el siguiente esquema.

$P_1$

$P_2$

.

.

.

$\underline{P_n}$

q

**Definición (Falacia).** Es un razonamiento no válido.

**Definición (Demostración).** Es un razonamiento que establece la veracidad de un teorema.

### 2.2.5.7.3 Los Conectivos Lógicos y Tablas de Verdad

Cada elemento de $\Omega_1$ y Q $\Omega_2$ son distinguibles una de otra por sus valores de verdad. Esto quiere decir que el significado de cada conectivo lógico puede ilustrarse mediante una tabla, conocida como tabla de verdad.

**Definición (Tabla de verdad).** Una tabla de verdad es un arreglo rectangular que contiene los valores veritativos de la proposición y en cada línea se muestra un posible valor.

A continuación, se presentamos la tabla de verdad asociada a cada una de las operaciones definidas en la lógica proposicional.

**1. (Negación).**

La conectiva ¬ define una función de verdad $f\neg : \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$ como:

$f\neg : \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$

$f\neg(V) = F$

$f\neg(F) = V$

el cual se puede resumir en la siguiente tabla llamada tabla de verdad.

| p | ¬q |
|---|---|
| v | v |
| f | f |

**2. (Conjunción).**

La conectiva A define una función de verdad:

$f\ ^\wedge : \{V, F\}\ x\ \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$

$como$:

$f\ ^\wedge\ : (\{V, F\})2 \rightarrow \{V, F\}$

$f \wedge (V, V) = V$

$f \wedge (V, F) = F$

$f \wedge (F, V) = F$

$f \wedge (F, F) = F$

el cual se puede resumir en la siguiente tabla llamada tabla de verdad.

| p | q | p ^ q |
|---|---|---|
| v | v | v |
| v | f | f |
| f | v | f |
| f | f | f |

**3. (Disyunción).**

La conectiva V define una función de verdad

$f v : \{V, F\} \times \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$

como:

$f \wedge : (\{V, F\})2 \rightarrow \{V, F\}$

$f \wedge (V, V) = V$

$f \wedge (V, F) = V$

$f \wedge (F, V) = V$

$f \wedge (F, F) = F$

el cual se puede resumir en la siguiente tabla llamada tabla de verdad.

| p | q | p V q |
|---|---|---|
| v | v | v |
| v | f | v |

| | | |
|---|---|---|
| f | v | v |
| f | f | v |

**4. (Implicación).**

La conectiva ⇒ define una función de verdad

$F \Leftrightarrow\colon \{ V, F \} x \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$

y tiene la siguiente tabla llamada tabla de verdad.

| p | q | p→q |
|---|---|---|
| v | v | v |
| v | f | f |
| f | v | f |
| f | f | v |

**5. (Bicondicional).**

La conectiva ⇔ define una función de verdad

$F \Leftrightarrow\colon \{V, F\}\, x\, \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$

y tiene la siguiente tabla llamada tabla de verdad.

| p | q | p↔q |
|---|---|---|
| v | v | v |
| v | f | f |
| f | v | f |
| f | f | v |

### 2.2.5.7.4 Lógica Bivalente y la N-Categoría

En esta sección estudiaremos los temas relacionados a lógica bivalente con la finalidad de buscar una interpretación categórica de la lógica.

**Definición (N-Categoría).** Una N-Categoría es una categoría pre-orden C con un funtor contravariante N : C → C, tal que.

a) C tiene objeto final 1,

b) C tiene coproductos finitos,

c) y el funtor $N^2$ = N o N es definido como $N^2(A) = A$ y $N^2(f) = f$ para cada A ∈ obj (C) y todo morfismo f en C.

d) f : A → B es un morfismos de C si y sólo si N(A) ∐ B es isomorfo al objeto final 1 para cualquier par de objetos A y B.

**Proposición** En toda N-Categoría existe objeto inicial.

**Demostración:** La existencia del objeto inicial queda garantizado al ser definido por $0' = N(1)$. A continuación verificaremos que para todo $B \in obj(C), HomC(0'; B)$ es un conjunto unitario.

Como C tiene objeto final 1, para todo $B \in obj\,(C)$ existe un único morfismo $f : N(B) \to 1$. Por lo tanto $HomC(N(1);\, N2(B)) = HomC(0';\, B)$ es un conjunto unitario, tal como se quería verificar.

**Proposición** Toda N-Categoría tiene productos binarios.

**Demostración:** Para cada A, B ∈ obj(C) definimos su producto A x B como A x B = (N(N(A) ∐ N(B)) y las proyecciones canónicas como πA = $N(i_{N(A)})$, = $N(i_{N(B)})$ donde $i_{N(A)}$, $i_{N(B)}$ son las inclusiones del coproducto N(N(A) ∐ N(B), entonces demostraremos que el triple (A x B,$\pi_A$,$\pi_B$ ) es el producto de los objetos A, B.

Para ello, demostraremos que para todo $C \in obj(C)\, si\, f \in HomC(C;\, A)$ y $g \in HomC(C;\, B)$ entonces existe un único $h \in HomC(C;\, A \times B)$ tal que $\pi_A\, o\, h = f, \pi_B\ o\, h = g$.

Como $f \in HomC(C;\ A)$ y $g \in HomC(C;\ B)$ por definición de funtor contravariante $N : C \rightarrow C$, $N(f) \in HomC(N(A); N(C))$ y $N(g) \in HomC(N(B); N(C))$respectivamente.

Luego por la propiedad universal de (N(A) $\coprod$ N(B); $i_{N(A)}$; $i_{N(B)}$), existe un único morfismo $f' : N(A) \coprod N(B) \rightarrow N(C)$.

Finalmente si aplicamos el funtor contravariante N, se comprueba que existe un único morfismo $h = N(f') : C = N2(C) \rightarrow N(N(A) \coprod N(B)$ que cumple $\pi_A\ o\ h = f, \pi_B\ o\ h = g$.

**Proposición** En toda N-Categoría el objeto N(N(A) x N(B) es isomorfo al objeto A$\coprod$B.

**Demostración:** Consecuencia directa de la definición de producto en la N-Categoría.

**Corolario** En toda N-Categoría el objeto NyN(A) x BJ es isomorfo al objeto A$\coprod$N(B).

**Proposición** A todo objeto final de la N-Categoría le corresponde el valor de verdad (V) en $L_{Prop}$.

**Demostración:** En efecto; como C es una categoría pre-orden, $HomC(A;\ 1)$ es unitario para cada $A \in obj(C)$. Por lo tanto, a 1 le llegan los morfismos de todos los demás objetos pero del no parte ninguno.

Luego si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones de $L_{Prop}$ se concluye que $\cup_{A \in obj(C)} HomC(A;\ 1)$ es equivalente a la ebf $\cup \rightarrow V$ en $L_{Prop}$ y como esta siempre es verdadera. Por lo tanto, se verifica la afirmación.

**Proposición** Todo objeto inicial de la N-Categoría le corresponde el valor de falsedad (F) en $L_{Prop}$.

**Demostración:** Como C es una categoría pre-orden, $HomC(0';\ B)$ es unitario para cada B ∈ obj (C). Por lo tanto, de 0' parten morfismos a todos los demás objetos, pero a él no le llega ninguno.

Luego si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones de $L_{Prop}$ se concluye que ($\cup_{B \in obj(C)} HomC(0';\ B)$ es equivalente a la ebf $F \rightarrow \cup$ en $L_{Prop}$ y como esta siempre es falsa se verifica la afirmación.

**Proposición** En toda N-Categoría a $(A \coprod B;\ i_A, i_B)$ le corresponde la proposición (∪ V 0) en $L_{Prop}$.

**Demostración:** En efecto; como C es una categoría pre-orden si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones, entonces a $i_A \in HomC(A, A\coprod B)$ e $i_B \in HomC(B, A\coprod B)$ les corresponden las siguientes proposiciones $\upsilon \rightarrow (\upsilon\, V\, 0)$ y $0 \rightarrow (\upsilon\, V\, 0)$ en $L_{Prop}$.

Además como el coproducto cumple la siguiente propiedad universal: Dado $C \in obj(C), g \in HomC(A, C)\, y\, h\, G\, HomC(B, C),$ existe un único morfismo $g\coprod h \in HomC(A\coprod B, C)$ tal que $f\, o\, i_A$ = g, $f\, o\, i_B = h$ se obtiene la siguiente proposición compuesta:

$((\upsilon \rightarrow \gamma)\, A\, (0 \rightarrow \gamma))$ ^ $((\upsilon\, V\, 0) \rightarrow y)$

Por lo tanto; si $(\upsilon \rightarrow \gamma)\, y\, (0 \rightarrow \gamma)$ son proposiciones validas, entonces $(\upsilon\, V\, 0) \rightarrow Y$ también lo es. Por lo tanto, se verifica la afirmación.

**Proposición** Dados los objetos $A, B$ en la N-Categoría, si existe el producto (A x B, $\pi_A$, $\pi_B$), entonces le corresponde la proposición (0 Λ 0) en $L_{Prop}$.

**Demostración:** En efecto; como C es una categoría pre-orden si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones, entonces a $\pi_A \in HomC(A \times B;\, A)$ y $\pi_B \in HomC(A \times B;\, A)$ les corresponden las siguientes proposiciones $(\upsilon\, \Lambda\, 0) \rightarrow \upsilon\, y\, (\upsilon\, \Lambda\, 0) \rightarrow 0$ en $L_{Prop}$.

Además como el producto cumple la siguiente propiedad universal: Dado $C \in obj(C)$ si $f \in HomC(C;\, A)$ y $g \in HomC(C;\, B)$ entonces existe un único $h = (f, g) \in HomC(C;\, A \times B)$ tal que $\pi_A\, o\, h = f, \pi_B\, o\, h = g$. se obtiene la siguiente proposición compuesta:

$((\gamma \rightarrow \upsilon)\, \Lambda\, (\gamma \rightarrow 0)) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\upsilon\, \Lambda\, 0))$

Por lo tanto; si (γ → υ) y (γ → 0) son proposiciones validas, entonces $\gamma \rightarrow (\upsilon\, \Lambda\, 0)$ también lo es. Por lo tanto se verifica la afirmación.

**Proposición** En toda N-Categoría al funtor contravariante $N : C \rightarrow C$ le corresponde la negación en $L_{Prop}$.

**Demostración:** En efecto; si $f{:}\, A \rightarrow B$ en C, entonces por definición de funtor contravariante se tiene $N(f) : N(B) \rightarrow N(A)$. Luego si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones, se deduce que a la proposición $v \rightarrow \phi$ se le asocia bajo el funtor N la proposición $\neg\phi \rightarrow \neg V$ en $L_{Prop}$. Por lo tanto, se verifica la afirmación.

**Proposición** En toda N-Categoría $N(A) \coprod B$ es un objeto final.

**Demostración**: Evidente por definición de N-Categoría.

**Proposición** En toda N-Categoría al objeto $N(A) \coprod B$ le corresponde la proposición $(\neg v\ V\ \phi)$ en LProp.

**Demostración:** En efecto; como C es una categoría pre-orden si interpretamos a los morfismos de C como implicaciones y a sus objetos como proposiciones, entonces por proposición 6.4.7 se deduce que a $N(A) \coprod B$ le corresponde la siguiente proposición $(\neg v\ V\ \phi)$ en $L_{Prop.}$

## 2.6. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS.

### 1. AXIOMAS.

Es un subconjunto de las ebf (proposiciones) de $L_{Prop}$ de las cuales se deducen otras proposiciones formales mediante la aplicación de las reglas de transformación del lenguaje. Los axiomas, no tienen significado ni valor de verdad. En particular, no son enunciados verdaderos y, por tanto, no se los elige por su evidencia.

### 2. LOGICA

Una lógica clásica es un sistema lógico que admite solo dos valores de verdad para sus enunciados (premisas y conclusión). En la lógica bivalente, una proposición solo puede ser verdadera o falsa, no existen valores intermedios de verdad

### 3. LÓGICA BIVALENTE

Una lógica clásica es un sistema lógico que admite solo dos valores de verdad para sus enunciados (premisas y conclusión). En la lógica bivalente, una proposición solo puede ser verdadera o falsa, no existen valores intermedios de verdad. El clásico sistema de lógica bivalente es la lógica aristotélica que se sustenta en tres principios básicos:

a) Principio de identidad: es verdad que A es idéntico a A (a sí mismo). $A = A$

b) Principio de no contradicción: A no puede ser A y no-A al mismo tiempo.

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

c)Principio del tercero excluido: A es verdadero o es falso, no hay una tercera posibilidad. $A\, v \neg A$

**4. LÓGICA PROPOSICIONAL**

Según Wikipedia, la lógica proposicional es un sistema formal cuyos elementos son proposiciones y cuyas constantes lógicas, están representadas por operaciones sobre estas; con la finalidad de formar proposiciones de mayor complejidad.

**5. FUNTOR CONTRAVARIANTE**

Sean C y D dos categorías. Un funtor contravariante de C en D (denotado como

$F : C \longrightarrow D)$ consiste en dos aplicaciones:

La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto *A* de C un objeto

$F(A)$ de D.

La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de C el morfismo $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)\ de\ D$.

y satisface los siguientes axiomas:

**Axioma 1.**

$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

**Axioma 2.**

Para cada $A \in C, F(IA) = IF(A)$.

Los funtores que preservan la dirección de morfismos se llaman funtores covariantes y los que cambian su dirección se llaman funtores contravariantes.

**6. MORFISMO CERO A IZQUIERDA.**

$f : A \longrightarrow B$ es morfismo cero a izquierda si $f \circ g = f \circ h$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in Hom\, C(C;\, A)$.

**Morfismo cero a derecha.** $f : A \longrightarrow B$ es morfismo cero a derecha si $g \circ f = h \circ f$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in Hom\, C(B;\, C)$.

**Morfismo cero.** $f : A \longrightarrow B$ es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha.

**7.N-CATEGORÍA.** Una N-Categoría es una categoría pre-orden C con un funtor contravariante $N : C \rightarrow C$, tal que.

a) C tiene objeto final 1,

b) C tiene coproductos finitos,

c) y el funtor $N^2 = N \circ N$ es definido como $N^2(A) = A$ y $N^2(f) = f$ para cada $A \in obj\ (C)$ y todo morfismo f en C.

d) f: $A \rightarrow B$ es un morfismos de C si y sólo si $N(A) \coprod B$ es isomorfo al objeto final 1 para cualquier par de objetos A y B.

## 8.TEORÍA DE CATEGORÍAS

Según Wikipedia, la teoría de categorías es un estudio matemático que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos.

## 9.SISTEMAS FORMALES

Según Wikipedia, un sistema formal es un sistema abstracto compuesto por un lenguaje formal, axiomas, reglas de inferencia y a veces una semántica formal, que se utiliza para deducir o demostrar teoremas y dar una definición rigurosa del concepto de demostración.

## 10.SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Según Wikipedia, un sistema axiomático consiste en un conjunto de axiomas que se usan, mediante deducciones para demostrar teoremas.

## 11. RAZONAMIENTO VÁLIDO

Es todo razonamiento donde la conclusión q es verdadera cada vez que todas las premisas $p_i$,i = 0,1,…………., n lo sean.

## 2.7. FORMULACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

### 2.7.1 Hipótesis General

- Es la categoría lógica una herramienta para analizar la lógica bivalente.

### 2.7.2 Hipótesis Específicos

- Los conectores lógicos son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la teoría de categorías.
- La lógica bivalente se puede caracterizar con ayuda de objetos, morfismos y funtores.

# CAPÍTULO III

# METODOLOGÍA

## 3.1 Diseño Metodológico

Esta investigación se desarrolla a partir de un estudio de caso, aplicado en el ámbito de la lógica proposicional bivalente, donde los fundamentos de la teoría de categorías son las unidades de análisis, pues se pretende construir un modelo categórico para interpretar los fundamentos del cálculo proposicional de la lógica bivalente, para tal fin utilizaremos el método teórico.

### 3.1.1Tipo de Investigación

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórico.

### 3.1.2 Nivel de Investigación

De acuerdo a la naturaleza del estudio de la investigación, reúne por su nivel las características de un estudio de nivel teórico y exploratorio.

### 3.1.3 Diseño

Por ser un tema de carácter teórico, el diseño de la investigación es de carácter básicamente explicativo basada en la discusión y el análisis crítico.

### 3.1.4 Enfoque

De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo.

## 3.2 Población y Muestra

Debido a que la investigación es teórica en la investigación no hay población ni muestra.

## 3.3 Operacionalización de Variables e Indicadores

La investigación no tiene variables dependiente ni independiente.

## 3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Se utilizó la búsqueda de bibliografía relacionada con las categorías y la lógica bivalente.

### 3.4.1Técnicas a Emplear

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica y aplicativa.

### 3.4.2 Descripción de los Instrumentos

Los instrumentos son la bibliografía y algunos antecedentes relacionados con la teoría de categorías y la lógica bivalente.

## 3.5Técnicas para el Procesamiento de la Información

Después de obtener la bibliografía se procede a formular un funtor que permita analizar la lógica bivalente usando categorías.

# CAPITULO IV.

## SUGERENCIAS CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 4.1 SUGERENCIAS

Las sugerencias de los trabajos futuros son las siguientes:

a) Por ser lógica bivalente un instrumento de base para las ciencias formales y fácticas, un trabajo futuro pendiente de nuestra propuesta sería formalizar un procedimiento para algebrizarla con ayuda de los objetos, los morfismos y las construcciones categóricas.

b) Extender los principios de inferencia de la lógica bivalente con ayuda de las demás construcciones categóricas.

c) Implementar un marco interpretativo categórico que extienda las interpretaciones de la lógica bivalente a otras lógicas como por ejemplo la modal.

### 4.2 CONCLUSIONES

**Primera. -** Se ha construido una categoría llamada N-categoría con la finalidad de utilizarla como marco de referencia para realizar interpretaciones apropiadas de la lógica bivalente.

**Segunda. -** Se ha demostrado algunas propiedades de la N-categoría con la finalidad de ser utilizados para caracterizar la lógica bivalente**.**

**Tercera. -** Se ha demostrado que se puede algebrizar los fundamentos de la lógica bivalente con ayuda de la teoría de categorías.

**Cuarta. -** Se ha propuesto una nueva óptica de análisis para los fundamentos de la lógica bivalente.

### 4.3 RECOMENDACIONES.

Podemos establecer las siguientes recomendaciones

a) Continuar con una ampliación de la tesis de tal manera que se obtenga conocimientos sobre lógica multivalente usando N-categorías,

b) Implementar en la Facultad de ciencias estudios más avanzados sombre morfismos y funtores dentro de la lógica del pensamientos y lógica matemática

**ANEXO.**

**MATRIZ DE CONSISTENCIA**

**"MODELO CATEGÓRICO DE LA LÓGICA BIVALENTE"**

| PROBLEMA | OBJETIVOS | HIPÓTESIS | METODOLOGÍA |
|---|---|---|---|
| **PROBLEMA GENERAL**<br><br>¿Es posible construir un modelo categórico para interpretar la lógica bivalente?<br><br>**Problemas Específicos**<br><br>1. ¿se puede construir un modelo categórico que permita interpretar la lógica bivalente?<br><br>2. ¿será posible usar el modelo categórico en el análisis de la lógica bivalente? | **OBJETIVO GENERAL**<br><br>Construir un modelo categórico para interpretar a la lógica bivalente.<br><br>**Objetivos Específicos**<br><br>1. ¿se puede construir un modelo categórico que permita interpretar la lógica bivalente?<br><br>2. ¿será posible usar el modelo categórico en el análisis de la lógica bivalente?<br><br>. | **HIPOTESIS GENERAL**<br><br>Es la categoría lógica una herramienta para analizar la lógica bivalente.<br><br>**HIPÓTESIS ESPECÍFICOS**<br><br>**HE 01**. Los conectores lógicos son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la teoría de categorías.<br><br>HE.02 La lógica bivalente se puede caracterizar con ayuda de objetos, morfismos y funtores<br><br>. | **TIPO DE INVESTIGACIÓN**<br><br>Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórico.<br><br>**ENFOQUE**.<br><br>De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo.<br><br>**POBLACIÓN Y MUESTRA**<br><br>Por ser una tesis netamente teórica, no hay universo, ni población ni muestra**.**<br><br>**TÉCNICAS EMPLEADAS**.<br><br>Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica y aplicativa. |

**CAPITULO V**

# FUENTES DE INFORMACIÓN

## 5.1 Fuentes bibliograficas


Awodey, S. (2010), Category Theory, Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York.

Broncano, J. (2018), Construcción de una pro-categoría abeliana. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Ingeniería. Perú. Recuperado de http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/17633

Borceux F. (1994), Handbook of categorical algebra I. Cambridge University Press.

Cignoli, R. (2000), Algebraic foundations of many-valued reasoning. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London.

Dummett, M. (1974), Intuitionistic mathematics and logic. Mathematical Institute.

Goldblatt, R. (2006), Topoi: the categorical analysis of logic. Dover Publications.

Gentzen, G. (1969), Investigations into Logical Deduction. In: SZA- BO, M. E. (Ed.). The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam: North-Holland, p. 68-213.

Hyland, M. y de Paiva, V. (1993), Full intuitionistic linear logic (ex-tended abstract). Ann. Pure Appl. Logic, 64(3), p. 273-291

Papadimitriou, C. (2003), Computational complexity. John Wiley and Sons Ltd.

Van Ditmarsch, H. y Van Der Hoek, w. (2007), Dynamic epistemic logic, volume 337. Springer Verlag.