

**UNIVERSIDAD NACIONAL “JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN”**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA**



## **TESIS**

**PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA –  
APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA DE NÚMEROS ENTEROS EN LA  
EDUCACIÓN PRIMARIA.**

**AUTORA:**

**NELLY YANET CASTILLO BANDA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN NIVEL PRIMARIA  
ESPECIALIDAD: EDUCACIÓN PRIMARIA Y PROBLEMAS DE APRENDIZAJE**

**ASESOR:**

**Mg. NILO TELLO PANDAL**

**HUACHO – PERÚ**

**2018**

**PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA –  
APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA DE NÚMEROS ENTEROS EN LA  
EDUCACIÓN PRIMARIA**

## **DEDICATORIA**

A mis padres por su gran apoyo que me brindan y a mis maestros por suenas enseñanzas y consejos.

# INDICE

CARATULA.....	1
DEDICATORIA .....	3
INDICE.....	4
RESUMEN .....	6
INTRODUCCIÓN .....	8
<b>I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>9</b>
1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA .....	9
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	18
1.2.1. PROBLEMA GENERAL .....	18
1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS .....	18
1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	19
1.3.1. OBJETIVO GENERAL.....	19
1.3.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	19
1.4. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN .....	19
<b>II. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>21</b>
2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	21
2.2. BASES TEÓRICAS .....	27
2.3. DEFINICIONES CONCEPTUALES.....	32
2.4. MODELOS DIDÁCTICOS BASADOS EN LA MANIPULACIÓN DE OBJETOS FÍSICOS.....	34
2.5. PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN EL NIVEL PRIMARIA.....	36
2.6. FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS.....	55
2.5.1. HIPÓTESIS GENERAL .....	55
2.5.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS.....	56
<b>III. METODOLOGÍA.....</b>	<b>57</b>
3.1. DISEÑO METODOLÓGICO.....	57
3.2. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS .....	58
3.3. POBLACIÓN Y MUESTRA.....	59
3.4. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES .....	60
3.5. ESTRATEGIA METODOLÓGICA .....	61
3.6. TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN .....	62
<b>IV. RESULTADOS .....</b>	<b>63</b>
4.1. APLICACIÓN DEL RECURSO DIDÁCTICO PROPUESTA A UNA REALIDAD EDUCATIVA .....	63
4.2. EVALUACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE.....	67

4.3.	DESCRIPCIÓN DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS EN LAS EVALUACIONES.....	70
4.4.	APRECIACIÓN CUALITATIVA DE LOS RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES.....	72
4.5.	REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE LAS EVALUACIONES .....	73
<b>V.</b>	<b>DISCUSIÓN.....</b>	<b>74</b>
<b>VI.</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>77</b>
6.1.	CONCLUSIONES .....	77
6.2.	RECOMENDACIONES.....	78
<b>VII.</b>	<b>FUENTES DE INFORMACIÓN .....</b>	<b>80</b>
6.1.	FUENTES BIBLIOGRÁFICAS.....	80
6.2.	ARTÍCULOS CIENTÍFICOS .....	81
6.3.	FUENTES ELECTRÓNICAS.....	82
	ANEXOS .....	83

## RESUMEN

La presente investigación trata de la experimentación, en una realidad educativa, de la propuesta de un modelo didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros (positivos y negativos) en el 6to grado de primaria.

Este modelo didáctico se basa en la manipulación de objetos físicos consistentes en un conjunto de rondanas, de 4 cms de diámetro de colores distintos ambas caras, una para los números positivos y la otra cara para los números negativos, bajo reglas o algoritmos apropiados que conlleven precisamente al aprendizaje de la estructura cognitiva de las operaciones de adición y sustracción de números enteros.

Dos fueron los propósitos que persiguieron esta investigación: una, si el modelo propuesto permite un aprendizaje mucho más fácil que otros modelos usados como es la recta numérica y; otra, si el modelo permite un aprendizaje más temprano, como es el 6to grado de primaria, en vista que según el diseño curricular nacional lo propone recién en el 1ro o 2do grado de secundaria.

La experimentación se llevó a cabo en 7 sesiones de 2 horas cada una, en el 6to grado de primaria del colegio Horacio Zevallos Games N°21544 de la Villa – Sayán. Los resultados obtenidos fueron muy alentadores, pues se comprobó que el modelo propuesto sí permite un aprendizaje rápido y menos confuso que otros modelos usados y; sobre todo, sí posible enseñar este tema más temprano en el 6to grado de primaria.

**Palabras claves:** Modelos didácticos – adición y sustracción – números enteros – 6to grado de primaria

## ABSTRAC

The present investigation deals with the experimentation, in an educational reality, of the proposal of a didactic model for teaching and learning the addition and subtraction of whole numbers (positive and negative) in the 6th grade of primary school.

This didactic model is based on the manipulation of physical objects consisting of a set of washers, 4 cm in diameter of different colors, both sides, one for positive numbers and the other side for negative numbers, under appropriate rules or algorithms that entail precisely to the learning of the cognitive structure of the operations of addition and subtraction of whole numbers.

There were two purposes that pursued this research: one, if the proposed model allows learning much easier than other models used such as the number line and; another, if the model allows an earlier learning, such as the 6th grade of primary school, considering that according to the national curricular design it is proposed only in the 1st or 2nd grade of secondary school.

The experimentation took place in 7 sessions of 2 hours each, in the 6th grade of the Horacio Zevallos Games School No. 21544 of the Villa - Sayan. The results obtained were very encouraging, since it was proved that the proposed model does allow a quick and less confusing learning than other models used and; Above all, it is possible to teach this topic earlier in the 6th grade of primary school.

**Keywords:** Teaching models - addition and subtraction - whole numbers - 6th grade of primary

## INTRODUCCIÓN

Uno con los mayores tropiezos con los que se cruzan nuestros escolares es con los números enteros, es decir con los números negativos y los positivos en sus interacciones en las distintas operaciones aritméticas que se dan; de allí que sea de mucha preocupación de los especialistas en procurar crear estrategias adecuadas para su enseñanza y aprendizaje sobre todo de las operaciones de adición y sustracción.

En el Diseño Curricular Nacional los números enteros están programados en el nivel 6, que corresponde al 1° y 2° grados de secundaria de la EBR, bajo la competencia N°23: Resuelve problemas de cantidad. Pero, cada vez hay mayor tendencia como ocurre en otros países que su enseñanza y aprendizaje debe ser más temprano desde el 5to o 6to grado de primaria, como viene ocurriendo en algunos I.E. privadas a nivel nacional.

La estrategia más común que se sigue para la enseñanza y aprendizaje de la aritmética de los números enteros es el modelo de los desplazamientos (derecha – izquierda, arriba – abajo, etc.) con ayuda de la recta de los números enteros.

En la presente investigación se explora y experimenta con relativo éxito un modelo didáctico que se propone, mucho más sencillo de manejar que el modelo de los desplazamientos, bajo el enfoque lógico – manipulativo de objetos físicos y tangibles especialmente para los escolares de primaria. Este consiste en un conjunto de rondanas bicolors, una para los negativos y otra para los positivos, que se manipulan bajo reglas determinadas para cada una de las operaciones que se dan en el conjunto de los números enteros.

El fundamento teórico e empírico en los que se basan los modelos didácticos diseñados con objetos físicos y tangibles es que cuando más sentidos participan en un aprendizaje estos serán más eficaces, favorables y duraderos en el tiempo; además de favorecer sus propias experiencias y reflexiones del escolar hacia un autoaprendizaje.



# CAPITULO I:

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Hasta hace más de 5 años atrás la aritmética de los números enteros (adición, sustracción, multiplicación y división de números positivos y negativos) era de tratamiento exclusivo a partir del primer grado de secundaria, pero ahora ya se está tratando a partir del 6° grado de primaria, incluso en algunos colegios particulares se inician en el 5to grado, hallándose una fuerte resistencia por parte de los escolares a su aprendizaje sobre todo cuando se tiene que realizar operaciones con números negativos.

Los escolares del 5to y 6to grado de primaria ya están muy familiarizados con la aritmética de los números naturales (enteros positivos incluido el cero), lo que quiere decir que en su estructura cognitiva ya está enraizada las siguientes propiedades fundamentales:

- La suma  $a + b$  de 2 números naturales siempre es mayor o igual que cualquiera de los sumandos  $a, b$ .
- La diferencia  $a - b$  de 2 números naturales solamente es posible cuando  $a$  es mayor o igual que  $b$ .

Pero ahora, la aparición o inclusión de los números negativos hace que ya no se cumplan de manera general estas propiedades. Entonces, ¿Cómo hacer entender a los escolares de primaria que se inician en el aprendizaje de la aritmética de los números enteros que ahora hay sumas que equivalen a restas y, hay restas que equivalen a sumas? De hecho, que estas situaciones, causan confusión y desaliento en los escolares.

Aparte de los aprendizajes de los algoritmos para el cálculo aritmético en el conjunto de los números enteros el escolar debe saber relacionar hechos

concretos de la vida real con los números enteros. ¿Qué hechos del acontecer cotidiano se pueden representar con números positivos y negativos? ¿Qué situaciones del acontecer se representa con cero?

Históricamente, los conceptos de números positivos y números negativos surgen por necesidad de operar con conceptos relativos tales como: “derecha e izquierda”, “arriba y abajo”, “ganancia y pérdida”, “sobre el nivel del mar y por debajo del nivel del mar”, “temperatura sobre cero y abajo cero”, etc. La relatividad de estos conceptos está íntimamente ligado al concepto del cero, pues tiene sentido lógico preguntarse:

¿A la izquierda o derecha de qué?

¿Hacia arriba o hacia debajo de qué?

¿Pérdida o ganancia en relación a qué?

¿Temperatura bajo cero o sobre cero respecto a qué?

¿Sobre el nivel del mar o bajo el nivel del mar respecto a qué?

Es obvio que las respuestas a estas interrogantes está muy relacionado al número cero, que actúa como un elemento referente o neutro para que tenga sentido la existencia de los conceptos “arriba”, “abajo”, “derecha”, “izquierda”, “pérdida”, “ganancia”, etc.

Ahora bien, estos conceptos cotidianos de “arriba y abajo”, “izquierdos y derechos” y, demás conceptos referidos anteriormente, son conceptos opuestos o contrarios teniendo como base algún punto de referencia representado por el número entero cero. Este hecho ha generado el concepto del operador aritmético “opuesto de” (cuyo signo es “-”), concepto que el escolar debe de manejarlo e incorporarlo a su estructura cognitiva. Así tenemos que “arriba” es opuesto de “abajo” y viceversa, “izquierda” es opuesto de “derecha” y viceversa, “ganar” es opuesto de “perder” y viceversa, etc. Dicho simbólicamente y usando el signo - del operador “opuesto de”, tenemos:

$-(izquierda) = derecha; -(derecha) = izquierda$

$-(pérdida) = ganancia; -(ganancia) = pérdida$

$-(abajo) = arriba; -(arriba) = abajo$

Es más, si se aplica doblemente el operador “opuesto de” se regresa a la situación inicial:

$$-[-(izquierda)] = -[derecha] = izquierda$$

$$-[-(derecha)] = -[izquierda] = derecha$$

Ahora, si se aplica triplemente el operador “opuesto de” se regresa únicamente al opuesto de la situación inicial:

$$-(-(-(izquierda))) = -(-(-derecha)) = -(izquierda) = derecha$$

$$-(-(-(-derecha))) = -(-(-izquierda)) = -(derecha) = izquierda$$

Relacionando estas propiedades y aplicándolo a cualquier número entero  $Z$  tenemos:

$$-(-Z) = Z$$

$$-(-(-Z)) = -Z$$

Generalizando esta propiedad del operador “opuesto de” se puede decir que si se le aplica un número par de veces a un número entero  $Z$  obtenemos como resultado el propio número  $Z$ . Y, si se aplica un número impar de veces se obtiene como resultado  $-Z$ .

Por otro lado, cuando se quiere comparar 2 números naturales  $a, b$  a través del concepto “menor que”, el escolar de primaria sabe que “ $a$  es menor que  $b$ ” cuando es posible encontrar un número natural  $k$ , que no sea cero, de tal modo que:

$$a + k = b$$

Pero cuando el escolar se inicia en la aritmética de los números enteros (negativos y positivos) ya no le resulta fácil hallar ese otro entero  $k$  positivo cuando  $a, b$  son enteros cualesquiera.

Este problema de hallar  $k$ , al querer comparar 2 números enteros  $a, b$  ocasiona serias dificultades al escolar, por ejemplo cuando quiere ordenar un conjunto de números enteros de menor a mayor o viceversa. Esta dificultad le hace creer, por ejemplo, que  $-5$  es menor que  $-9$  o que  $25$  es menor que  $-25$ . No se percata que en ninguno de estos casos ejemplo es posible hallar un  $k$  positivo de tal modo que se cumpla:

$$-5 + k = -9 \text{ o } 25 + k = -25$$

En cambio, en las comparaciones correctas  $-9$  es menor que  $-5$  y,  $-25$  es menor que  $25$ , si es posible hallar ese entero  $k$  positivo tal que:

$$\begin{aligned} -9 + k &= -5 \text{ con } k = 4 \\ -25 + k &= 25 \text{ con } k = 50 \end{aligned}$$

Continuando con el análisis de las dificultades que conlleva el aprendizaje de la aritmética de los números positivos y negativos se han revisado varios textos de matemática que hacen uso los escolares del 5to y 6to de primaria. Entre los textos más representativos tenemos el de la colección Corefo (edición julio 2017), en cuyo texto que corresponde al 5to grado de primaria inicia con la enseñanza de los números enteros (pág. 215-220) haciendo uso de estrategias didácticas basadas en los conceptos de “antes de cristo” y “después de cristo” o “arriba” y “abajo”, “temperaturas bajo cero y sobre cero” para representar números negativos y positivos, además hace uso de la recta numérica para representar la ubicación y orden de los números enteros: el cero como punto de referencia, a su izquierda los números negativos y a su derecha los números positivos. En el texto que corresponde al 6to grado de primaria (pág. 217-222) se enfatizan en estas estrategias didácticas para representar los números enteros, además en ambos textos se exponen los algoritmos (reglas) para sumar y restar números enteros, los cuales conviene copiarlos literalmente.

Algoritmo para la adición de números enteros:

*Si los sumandos tienen el mismo signo se suman los valores absolutos y se coloca el mismo signo.*

*Si los sumandos tienen el signo diferente se restan sus valores absolutos y se coloca el signo del que tiene el mayor valor absoluto.*

Algoritmo para la sustracción de números enteros:

*Se adiciona el minuendo con el opuesto del sustraendo y se aplica la regla (algoritmo) de la adición.*

Al respecto, si bien es cierto que es totalmente oportuno y válido el uso de los recursos didácticos basados en los conceptos cotidianos de “arriba”, “abajo”, “izquierda”, “derecha”, “abajo cero”, “sobre cero”, etc. Y que son útiles para la representación y explicación del origen de los números enteros, por lo menos en los inicios de su aprendizaje; sin embargo no es oportuno el uso temprano de los algoritmos de la adición y sustracción vistos anteriormente y que son propuestos y usados en todos los textos de matemática del nivel primario. Se requiere otro algoritmo más sencillo.

En resumidas cuentas, se puede decir que toda la dificultad que significa aprender la aritmética de los números enteros radica en el poco entendimiento del papel que juegan los números negativos en su interrelación con los números positivos. Para corroborar esta situación se aplicó una pequeña prueba de conocimientos a una muestra de 20 escolares del 4to año de media de la I.E. Horacio Zevallos Gamez – La Villa (N°21544) de Sayán, grado en el que se supone ya manejan bien las operaciones de adición y sustracción de números enteros y sus aplicaciones a problemas sencillos de la vida cotidiana.

Los resultados obtenidos con esta muestra de estudiantes efectivamente corroboran el poco o nulo manejo adecuado de los números negativos.

Los reactivos aplicados en esta pequeña prueba de conocimientos fueron los siguientes:

1. Escribe el símbolo “<” (es menor que) ó el símbolo “>” (es mayor que) dentro del círculo, según corresponda:

a) 172 ○ 175

b) 283 ○ 271

c) -283 ○ 271

d) -172 ○ -175

2. Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

a)  $19 + 26 =$

b)  $-19 + 26 =$

c)  $19 + -26 =$

d)  $-19 + -26 =$

3. Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

a)  $48 - 15 =$

b)  $15 - 48 =$

c)  $-48 - 15 =$

d)  $-15 - (-48) =$

4. Marca con una aspa (X) la respuesta correcta al siguiente problema:  
Juan vive a media cuadra (se entiende que una cuadra tiene aproximadamente 100 metros) de una de las calles de Sayán. En cierto momento salió de su vivienda y caminó en línea recta 20 metros a la derecha de su vivienda, luego avanzó en línea recta 30 metros en sentido opuesto y, finalmente 10 metros en sentido contrario a éste.  
¿Dónde se encuentra Juan?

a) A 10 metros a la derecha de su casa

b) A 10 metros a la izquierda de su casa

c) A la entrada de su casa

5. Marca con una aspa (X) la respuesta correcta en el siguiente problema:

Carlos tiene ahorrados 100 soles como producto de sus propinas. Quiere comprarse un celular cuyo costo es superior a los 300 soles. Como no le alcanza sus propinas ahorradas su papá le regaló otros 100 soles y luego se prestó de su hermano 150 soles. ¿Cuál es la operación aritmética que mejor expresa el real estado financiero de Carlos?

- a)  $100 + 100 + 150 = 350$
- b)  $100 + 100 + (-150) = -50$
- c)  $100 - 100 + 150 = 150$

Los resultados observados en los 3 primeros reactivos fueron:

REACTIVO	SUBREACTIVOS	FRECUENCIA ABSOLUTA DE ACIERTOS	FRECUENCIA PORCENTUAL DE ACIERTOS
1	a	18	90%
	b	17	85%
	c	6	30%
	d	1	5%
2	a	20	100%
	b	15	75%
	c	10	50%
	d	3	15%
3	a	17	85%
	b	12	60%
	c	6	30%
	d	2	10%

Haciendo un comentario a estos resultados, reactivo por reactivo, tenemos:  
 Reactivo 1: Observando los porcentajes de aciertos en cada sub reactivo se nota que en la comparación de números naturales los porcentajes son altos, pero en cuanto entran a tallar los números negativos, el porcentaje de aciertos disminuye drásticamente.

Reactivo 2: Cuando se trata de sumar enteros positivos hay un 100% de aciertos; pero cuando se trata de sumar positivos con negativos o negativos con negativos los porcentajes disminuyen notablemente.

Reactivo 3: Cuando se trata de restar donde el minuendo es mayor que el sustraendo el porcentaje de aciertos es alto; pero cuando la situación cambia el porcentaje de aciertos declina drásticamente. Incluso comparando los resultados del reactivo 2 (sumas de enteros) con los resultados del reactivo 3 (restas de enteros) los porcentajes de aciertos son inferiores en el reactivo 3. Al parecer la operación de sustracción de enteros es más complicada que la operación de adicción de enteros para los escolares.

Respecto a los resultados obtenidos en los reactivos 4 y 5 son los siguientes:

<b>REACTIVO</b>	<b>ACERTÓ</b>	<b>NO ACERTÓ</b>	<b>NO RESPONDIÓ</b>
4	3 (15%)	15 (75%)	2 (5%)
5	2 (5%)	14 (70%)	4 (20%)

El reactivo 4 es un típico problema de desplazamientos a la derecha (+) y a la izquierda (-). Para hallar la solución la operación a efectuarse es:  $20 + (-30) + 10 = 0$ . La respuesta es c). Solo un 15% acertaron.

El reactivo 5 es un típico problema donde se aplican números enteros. Las “deudas” se consideran negativos y los “haber” se consideran positivos. La respuesta es b), solo un 5% acertaron.



En conclusión, lo que arroja esta pequeña prueba de conocimientos aplicado a modo de diagnóstico a una muestra de escolares, que se supone manejan correctamente los números enteros y sus propiedades, es que cuanto mayor participación tienen los números negativos en los problemas de la vida real es más complicado hallar las soluciones correctas; incluso es más difícil plantearlas.

¿Cuáles son las razones hipotéticas por los que se da esta situación de la poca comprensión de los números negativos en su interrelación con los números positivos?

Un primer factor puede ser el inicio tardío de la enseñanza – aprendizaje de los números enteros y sus propiedades. En efecto, oficialmente de acuerdo al Currículo Nacional la aritmética de los números enteros y sus aplicaciones se encuentra ubicada en la competencia n° 23: RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD y, específicamente se halla en el ciclo 6 que corresponde al 1° y 2° grado de educación secundaria. Es decir, de manera oficial en el Perú la enseñanza – aprendizaje de los números enteros recién empieza en la secundaria.

En cambio, en los colegios particulares se viene enseñando desde hace unos 5 años atrás desde el 5° y 6° grado del nivel primario, lo cual a nuestro entender está muy bien, porque cuando un concepto se aprende más temprano éste se interioriza y se adapta mejor en la estructura lógica cognitiva del escolar, lo cual hace que este aprendizaje sea más duradero y de por vida.

Un segundo factor, hipotético importante es el uso inapropiado de estrategias y recursos didácticos para el inicio de la enseñanza – aprendizaje de los números enteros, que se aplican en la actualidad. Por ejemplo, el algoritmo usado para la adición de números enteros basado en el concepto de “valor absoluto” es confuso y poco práctico para los escolares que se inician en estos aprendizajes.

Es este segundo factor que ha servido de motivación, para plantear y desarrollar la presente tesis, para proponer un modelo didáctico sencillo, de carácter físico, visual y manipulativo, que interiorizara de manera eficaz, y eficiente la aprehensión de la estructura lógica operativa de la adición y sustracción de los números enteros, lográndose así incorporarla de por vida en la estructura cognitiva del escolar y no tener dificultades más adelante.

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

### **1.2.1. PROBLEMA GENERAL:**

¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria?

### **1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS:**

- a) ¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros en el nivel primaria?
- b) ¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros en el nivel primaria?
- c) ¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para el planteamiento y solución de problemas con números enteros en el nivel primaria?

## **1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.3.1 OBJETIVO GENERAL:**

Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria.

### **1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- a) Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros en el nivel primaria.
- b) Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros en el nivel primaria.
- c) Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para el planteamiento y solución de problemas con números enteros en el nivel primaria.

## **1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**

En concordancia con la realidad problemática expuesta anteriormente en la sección 1.1 del presente proyecto de tesis titulado: Propuesta de un modelo didáctico para la enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria, su ejecución está plenamente justificado porque pretende llenar un vacío en cuanto no se posee un modelo didáctico sencillo para la introducción e inicio al aprendizaje del concepto de “número entero”, aprendizaje de las

operaciones de adición y sustracción de números enteros y planteamiento y solución de problemas con números enteros.

El propósito del presente trabajo es facilitar y hacer más comprensible el proceso de enseñanza – aprendizaje de dos operaciones fundamentales en el campo matemático: la adición y sustracción de números enteros (números negativos, el número cero y los números positivos).

## **CAPITULO II: MARCO TEÓRICO**

### **2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN**

Villarreal, Y. (2014) de la Universidad especializada de las Américas – Panamá, realizó la investigación: “Estrategias didácticas utilizadas por los docentes, para la enseñanza de los números enteros en sexto grado de la escuela Juan T. del Busto de Chitré”. Justifica su investigación manifestando: “Los estudiantes hoy en día presentan un alto grado de dificultad al trabajar con números enteros, por los que es necesario determinar las estrategias didácticas de enseñanza y aprendizaje más apropiadas para contrarrestar dichas dificultades en los estudiantes” y, además se plantea el siguiente problema: ¿De qué manera el docente a través de talleres y actividades prácticas contribuiría a estimular la resolución de problemas en los estudiantes del 6to grado de la escuela Juan T. del Busto de Chitré para que pueda tener un mejor desempeño en su vida diaria?

Esta investigación la efectúa en base a las observaciones realizadas al grupo del 6to grado de dicha escuela donde los estudiantes muestran un bajo nivel en la resolución de problemas con números enteros que se plantean en las clases de matemática.

También se resalta en esta investigación que son pocos los profesores que se preocupan en utilizar diversos juegos y actividades dinámicas, como recursos didácticos, para que les permita un mejor resultado en la comprensión y razonamiento de sus alumnos en la solución de problemas con números enteros.

Gallardo, A. y Hernández, A. (2017). Son autores de la investigación: “Emergencia de los números enteros”. Inciden a modo de reflexión de la importancia del número cero y los números negativos, conceptos que han probado ampliamente su utilidad, pero que hay oscuridad para su real comprensión. Hacen un recuento de las múltiples estrategias didácticas que se han propuesto, a través de los tiempos, para la enseñanza de los números negativos, el cero y los números positivos. Resaltan las ventajas y desventajas de cada una de estas estrategias o métodos.

Proponen una clasificación de todos estos métodos: Métodos de equilibrio y métodos de desplazamientos. En los de equilibrio tenemos: Fichas de colores, deudas y haberes, pérdidas y ganancias, cargas eléctricas positivas y negativas, goles a favor y goles en contra. En los métodos de desplazamientos tenemos: Temperaturas sobre cero y bajo cero, abajo y arriba, izquierda y derecha.

Hacen referencia a los resultados de otras investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje y frecuentes errores que cometen los alumnos en el aprendizaje de los números enteros.

Así, refieren la investigación realizada por Kuchemann (1981) quien propuso a un grupo de alumnos de 14 años un cuestionario de sumas, restas, y multiplicación de números enteros, hallándose que una mayoría tuvieron éxito en las sumas y multiplicaciones, pero no así en las restas.

Otra investigación realizada por Bell (1982), a grupos de escolares de 15 años, comprobó que el 80% suman correctamente, pero solo el 40% realizan correctamente las restas.

También hacen mención a otro investigador, Murray (1985); quien examinó a alumnos de secundaria y comprueba que el 85% aciertan en las multiplicaciones, 75% aciertan las sumas y el 46% aciertan las restas.

Bernal, C. (Los Santos – Panamá - 2011) realizó la investigación titulada: “Introducción a los Números Enteros”. En esta investigación de tipo descriptivo hizo énfasis en la necesidad de usar métodos y recursos para la

enseñanza – aprendizaje del algebra de números enteros, relacionados con el entorno vivencial de los escolares, basados en los conceptos de “arriba y abajo”, “por debajo y por encima del nivel de mar”, actividades que según su propuesta permite a los escolares construir sus propios aprendizajes. También propone actividades y problemas sobre desplazamientos sobre una recta, usando los conceptos de “izquierda y derecha”, que según su parecer favorece a las siguientes capacidades:

- Razonar sobre la importancia y la relación estrecha que existe entre los números enteros con diversas situaciones del entorno.
- Interpretar estas diversas situaciones del entorno y traducirlas de manera simplificada utilizando los números enteros.
- Establecer el signo positivo (+) o negativo (-), del desplazamiento considerando como posición inicial el cero en cualquier representación gráfica de los números enteros.
- Describir sucesiones de desplazamientos para trasladarse de una final atravesando entre ellas otras no colineales.
- Proporcionar argumentos para justificar por qué un número entero es menor o mayor que otro.

Bustamante, E. (U.N. de Colombia – 2015), en su trabajo titulado: “El juego como estrategia didáctica en la enseñanza de los números enteros basado en aprendizajes significativos”, recopila el desarrollo de una experiencia de aprendizaje teórico – práctico, para alcanzar competencias básicas para diseñar, desarrollar e interpretar procesos de investigación en el campo educativo, en un contexto concreto.

Concretamente desarrolla la experiencia investigativa: “Estrategias didácticas para la enseñanza de operaciones básicas con números enteros a partir del juego en estudiantes del séptimo grado de la Institución Educativa Normal Superior Santa Teresita del Municipio de Sopetran, Antioquia”, en la que le permitió al autor caracterizar, problematizar, teorizar y plantear las estrategias didácticas necesarias, desde la perspectiva de

una experiencia significativa teniendo como base el juego.

Las principales estrategias que utiliza Bustamante, E. son:

- La línea del tiempo, que viene a ser una línea recta que sirve para registrar y ordenar datos cronológicos como fechas y periodos de tiempo de forma clara y sencilla. En ella debe haber un punto referencial que divide a la línea del tiempo en 2 partes: antes del cero (negativo) y después del cero (positivo). Los escolares deben crear líneas del tiempo relacionados a sus vidas. Por ejemplo, el punto cero puede ser la fecha de su nacimiento.
- La recta numérica, en la que ubica un punto para indicar el cero, luego a su izquierda se ubican los números negativos y a su derecha los números positivos.

En esta recta, el escolar hace desplazamiento a la derecha (+) y desplazamientos a la izquierda (-), partiendo desde el origen cero, registrando el punto (número) final del conjunto de desplazamientos.

- Polígono de desplazamientos, son polígonos de varios lados incluidos sus diagonales. Se coloca un número entero positivo en uno de sus vértices (salida) y se colocan números enteros positivos y negativos en los segmentos que forman los lados del polígono y sus diagonales, en los demás vértices del polígono y los puntos de intersección de las diagonales se dejan círculos en blanco, en los que los escolares irán colocando el número entero que le corresponde al desplazamiento efectuado hasta el punto o círculo, y; así sucesivamente, el escolar irá avanzando hasta llegar al círculo final (llegada) en el que colocará el número resultado de todos los desplazamientos efectuados hasta la llegada.

El propósito de estos juegos es favorecer el desarrollo de elementos del pensamiento numérico en el escolar a través de estrategias que permitieran expresar con números enteros la información acerca de situaciones



relativas y prácticas mediante la lúdica matemática y potenciar una formalización de estos objetos matemáticos que permita su manipulación operatoria en dos operaciones fundamentales la adición y sustracción.

Posteriormente, todos estos juegos los propone a través de Tics especiales que se prestan a actividades lúdicas.

Finalmente, aplica instrumentos apropiados para determinar los resultados de los aprendizajes basados en estos juegos lúdicos. La conclusión que fue estas estrategias resultados eficaces.

Rojas, J.- Ariza, A. (Colombia, Bogotá – 2013) realizaron la investigación: “Propuesta Didáctica para la enseñanza de los números enteros”. Este trabajo pretende evidenciar la importancia que tiene la enseñanza de los números enteros, siendo este de bastante complejidad, el cual debe buscar por diversos medios generar un aprendizaje significativo en los escolares. Para este propósito optaron como metodología la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la misma que permite, a través de ciertas actividades, que el escolar construya sus propios aprendizajes.

La teoría de situaciones didácticas de Brousseau (TSDB) es un modelo de interacción de un modelo de interacción de un sujeto en cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”. Para que esto funcione, el profesor ya ha planeado la situación didáctica de modo que existan momentos en que los alumnos interactúan con el problema, presenten conflictos cognitivos, se propicie la discusión y el debate y, también hagan preguntas.

Finalmente, los autores llegan a la conclusión de que la teoría de situaciones didácticas de Brousseau permite potenciar cualquier

aprendizaje de manera significativa, dependiendo de la habilidad de cada persona. Mucho dependerá de la habilidad del docente para generar estas situaciones didácticas.

Castillo, C. (Colombia-2004); es autor de la tesis: “Aprendizaje de la Adición y sustracción de Números enteros a través de objetos físicos”, para obtener la maestría en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

El objeto de éste trabajo que diseñar e implantar objetos físicos para la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en los estudiantes del 7° grado de I.E Alfonso López Pumajero de la ciudad de Palmira (Colombia). Castillo nos Dice:

*Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.*

Para el propósito de la investigación construyeron dos modelos de objetos físicos de aprendizaje (OFA): Uno llamado el “Tren de los Números Enteros” y otro llamado “Bicolores de conteo”. El primer OFA simula pistas de trenes con carriles que “sube” para números “positivos” y con carriles que “bajan” para números “negativos”.

Desplazamientos de trencitos de juguete, en bajadas y/o subidas, representan las operaciones de adición o sustracción, según sea el caso.

El segundo OFA lo constituyen palillos de colores, negro para los enteros positivos y rojo para los enteros negativos. Para representar la operación de adición se usa la regla: “Un palillo negro se anula con otro palillo rojo”.

Para la validación de estos objetos físicos de aprendizaje se utilizó dos grupos de alumnos: Uno de control y otro experimental. Los resultados en el grupo experimental, con quienes se utilizó los OFA, fueron muy significativos respecto al grupo de control a quienes se les enseñó la suma y resta de los números enteros con estrategias didácticas tradicionales.

## 2.2 BASES TEÓRICAS

### 2.2.1 Construcción axiomática de los números enteros.-

Sea  $N = \{0,1,2,3, \dots\}$  el conjunto de los números naturales y,

Sea  $N \times N = \{(a, b)/a \in N \text{ y } b \in N\}$  el producto Cartesiano de  $N$  con  $N$

Definamos en  $N \times N$  la relación  $R$  del siguiente modo:

$$(a; b) R (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Así por ejemplo,  $(4; 3)$  está relacionada con  $(8; 7)$  porque sucede que  $4 + 7 = 3 + 8$ ; en cambio  $(5; 3)$  no está relacionada con  $(7; 2)$  porque sucede que  $5 + 2 \neq 3 + 7$ .

Esta relación  $R$  es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Propiedad reflexiva:

$$(a; a) R (a; a) \Leftrightarrow a + a = a + a$$

Propiedad simétrica:

$$\text{Si, } (a; b) R (c; d) \Leftrightarrow (c; d) R (a; b)$$

$$a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a$$

Propiedad Transitiva:

$$\text{Si, } (a; b) R (c; d) \text{ y } (c; d) R (e; f) \Leftrightarrow (a; b) R (e; f)$$

$$a + d = b + c \text{ y } c + f = d + e \Leftrightarrow a + f = b + e$$

Y como se sabe toda relación de equivalencia en un conjunto  $A$  no vacío produce clases de equivalencia; esto es, se produce una partición de  $A$ .

En efecto, la relación  $R$  en  $N \times N$  genera clases de equivalencia:

$$\text{Clase } (0; 0) = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), \dots\}$$

$$\text{Clase } (1; 0) = \{(1; 0), (1; 2), (2; 3), (3; 4), \dots\}$$

$$\text{Clase } (0; 1) = \{(0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4), \dots\}$$

$$\text{Clase } (2; 0) = \{(2; 0); (3; 1); (4; 2); (5; 3), \dots\}$$

$$\text{Clase } (0; 2) = \{(0; 2); (1; 3); (2; 4); (3; 5), \dots\}$$

..... y así sucesivamente.

Para mayor simplicidad a cada una de estas clases se les puede representar

$$\text{Clase } (0; 0) \equiv 0$$

$$\text{Clase } (1; 0) \equiv 1$$

$$\text{Clase } (0; 1) \equiv -1$$

$$\text{Clase } (2; 0) \equiv 2$$

$$\text{Clase } (0; 2) \equiv -2$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$\text{Clase } (100; 0) \equiv 100$$

$$\text{Clase } (0; 100) \equiv -100$$

..... y así sucesivamente.

Al conjunto de las infinitas clases equivalentes, así generadas, se les representa por  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , el cual recibe el nombre de: Conjunto de números enteros.

Para un mejor tratamiento a este conjunto se le puede partir en 3 partes:

$$z = -z \cup \{0\} \cup +z$$

Donde:

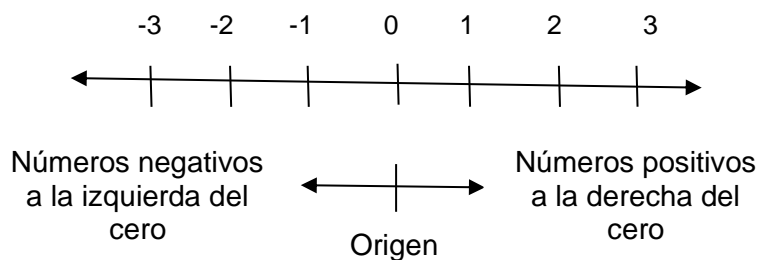
$$-z = \{\dots, -3, -2, -1\}: \text{Conjunto de enteros negativos}$$

$$\{0\}: \text{Conjunto con elemento cero}$$

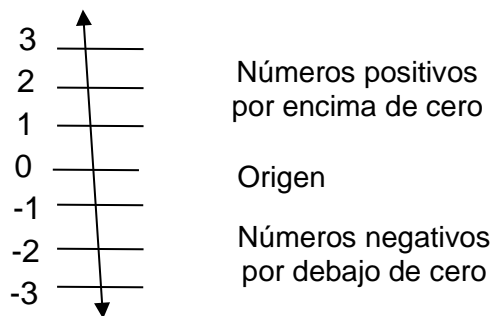
$$+z = \{1, 2, 3, \dots\}: \text{Conjunto de enteros positivos}$$

## 2.2.2 CONSTRUCCIÓN EMPÍRICA DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.-

Esta construcción, basada en la experiencia cotidiana, se basa en los conceptos de “longitud”, “a la izquierda de”, “a la derecha de”, “arriba de”, y “debajo de”. Pero, para que tengan sentido estos conceptos tiene que haber “un punto de inicio” u “origen”, el cual es costumbre denotarlo con el entero cero. Así, de manera natural se construye la recta numérica horizontal:



Ahora la recta numérica vertical es:



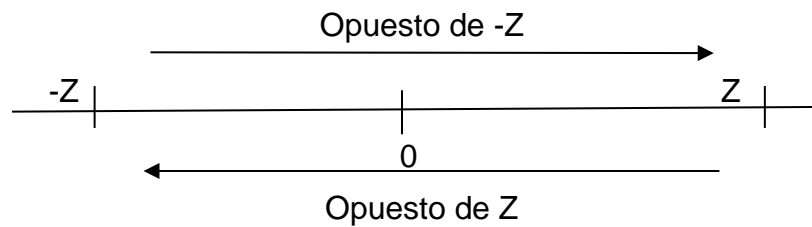
## 2.2.3 OPUESTO DE UN ENTERO Y VALOR ABSOLUTO.-

### a) Opuesto de un entero $Z$ :

Sea  $Z = (a; b)$  un entero cualquiera según la definición axiomática de número entero, llamamos opuesto de  $Z$  a la expresión:  $-Z = (b; a)$

Si se aplica doblemente se refiere a la situación original:  $-(-Z) = (a; b)$ , el cual se lee: el opuesto del opuesto de  $(a; b)$  es el propio  $(a; b)$ ;

Ahora si  $Z$  es un entero cualquiera con la definición empírica entonces su opuesto se denota por  $-Z$ ; esto quiere decir que si  $Z$  es negativo su opuesto es positivo y, si  $Z$  es positivo su opuesto es negativo. Para mejor entendimiento véase el siguiente diagrama:



Si aplicamos el operador “opuesto de” (-) un número par de veces a un número entero  $Z$  se obtiene como resultado el mismo entero  $Z$ . y, si aplicamos un número impar de veces se obtiene como resultado  $-Z$ .

Ejemplo:

$$-\left(-\left(-(-7)\right)\right) = 7$$

$$-\left(-\left(-(-(-7))\right)\right) = -7$$

### b) Valor absoluto de $Z$ :

Sea  $Z$  un entero cualquiera; llamamos valor absoluto de  $Z$  a la siguiente expresión:

$$|Z| = \begin{cases} Z; & \text{si } Z \geq 0 \\ -Z; & \text{si } Z < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|47| = 47 \text{ y } |-47| = -(-47) = 47$$

## 2.2.4 OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.-

### a) Adición:

En la definición axiomática de números enteros, la adición es una operación en la que a cada par de enteros se le asigna otro entero, bajo la siguiente regla:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

Ejemplo:

$$(7; 21) + (15; 8) = (22; 29)$$

$$-14 + 7 = -7$$

La adición goza de las propiedades de cerradura conmutativa, asociativa, tienen elemento opuesto y tienen elemento neutro que es el cero (0).

En cambio, en la definición empírica de número entero, para la adición se usa la siguiente regla:

- i. Si los sumandos tienen el mismo signo se adicionan sus valores absolutos y se coloca el mismo signo a la suma.
- ii. Si los sumandos tienen distinto signo se restan sus valores absolutos y se coloca el signo del que tienen el mayor valor absoluto a la suma resultante.

Ejemplos:

$$-17 + -25 = -42$$

$$-17 + 25 = 8$$

$$17 + (-25) = -8$$

### b) Sustracción.-

Es la operación en la que hay un minuendo (a) y un sustraendo (b) en la que se obtiene como resultado una diferencia (d).

Según la definición axiomática de número entero, la regla para la sustracción es:

$$(a; b) - (c; d) = (a; b) + (d; c)$$

Ejemplo:

$$(23; 15) - (27; 9) = (23; 15) + (9; 27) = (32; 42)$$

$$8 - (18) = 8 + (-18) = -10$$

En cambio, en la definición empírica de número entero la regla para sustraer es:

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo.

$$18 - 23 = 18 + (-23) = -5$$

$$-27 - (-17) = -27 + 17 = -10$$

La sustracción de números enteros es cerrada, pero no goza de las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro ni elemento opuesto.

## 2.3 DEFINICIONES CONCEPTUALES

### a) DIDÁCTICA

La Didáctica es la rama de la pedagogía que se encarga de buscar métodos y técnicas para mejorar la enseñanza –aprendizaje, definiendo las pautas para conseguir que los conocimientos lleguen de una forma más eficaz a los educandos.

La Didáctica permite abordar, analizar y diseñar esquemas y planes destinados a plasmar las bases de cada teoría pedagógica.

La Didáctica es la disciplina que sienta los principios de la educación y sirve a los docentes a la hora de seleccionar y desarrollar contenidos, persigue el propósito de ordenar y respaldar tanto los modelos de enseñanza como el plan de aprendizaje.



Se llama acto didáctico a la circunstancia de la enseñanza para cual se necesitan ciertos elementos: el docente (quien enseña) el discente (quien aprende) y el contexto de aprendizaje.

En la actualidad existen 3 modelos didácticos bien diferenciados: el normativo (concentrados en los contenidos), el incitativo (focalizado en el alumno) y el aproximativo (centrado en la construcción que el alumno haga con sus nuevos conocimientos).

#### **b) COMPETENCIA**

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21),” La Competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético”.

“Ser competente supone comprender la situación que se debe afrontar y evaluar las posibilidades que se tiene para resolverla. Esto significa identificarlos conocimientos y habilidades que uno posee o que están disponibles en el entorno, analizar las combinaciones más pertinentes a la situación y al propósito, para luego tomar decisiones; y ejecutar o poner en acción la combinación seleccionada”.

#### **c) CAPACIDADES**

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21) “las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas”.

“Es importante considerar que la adquisición por separado de las capacidades de una competencia no supone el desarrollo de la competencia”.

Ser competencia es más que demostrar el logro de cada capacidad por separado: es usar las capacidades combinadamente y ante situaciones nuevas”.

**d) ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 22), los estándares de aprendizaje “Son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la educación básica, de acuerdo a la secuencia que sigue la mayoría de estudiantes que progresan en una competencia determinada. Estas descripciones son holísticas porque hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas”.

Los estándares figuran en el Currículo Nacional tienen 8 niveles según el nivel educativo, los ciclos y grados educativos.

**e) DESEMPEÑOS**

Son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). Son observables en una diversidad de situaciones o contextos. No tienen carácter exhaustivo, más bien ilustran algunas actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel.

**2.4 MODELOS DIDÁCTICOS BASADOS EN LA MANIPULACIÓN DE OBJETOS FÍSICOS**

Existe diversas investigaciones en las que se proponen modelos didácticos para operar con números enteros (positivos, negativos y el cero) basados en la manipulación de objetos físicos bajo reglas operativas previamente establecidas, dependiendo su manejo del tipo de modelo.

Los resultados obtenidos en todas estas investigaciones es que al trabajar

u operar con objetos físicos (palitos de colores, bolitas, chapitas, redondas, trencitos, etc.) producen un efecto psicológico especial en los escolares, sobre todo en aquellos que recién inician el aprendizaje de los números enteros como es el caso del 5to o 6to grado del nivel primario, induciendo hacia un aprendizaje más consistente y duradero en el tiempo y; lo más importante es que la manipulación de los objetos del modelo permite a los escolares construir sus propios aprendizajes, según sus propias habilidades y capacidad en una primera fase de aprendizaje, para después pasar a una segunda fase de aprendizaje: la abstracción de los conceptos transmitidos y deducidos vía el manejo simbólico de estos conceptos y sus propiedades. Por ejemplo, en una primera fase con ayuda del material didáctico aprenden a sumar números enteros y una vez aprendido la estructura operativa de la adición de enteros manipulando objetos físicos pasan a una segunda fase el de realizar las misma sumas pero de modo simbólico, solo usando numerales.

Al respecto, cabe aquí volver a referirnos al antecedente ya citado anteriormente, nos referimos al investigador Castillo, C. (Colombia, 2004) autor del trabajo: “Aprendiendo la adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos” quien nos dice:

*“Para que los niños logren entender el significado de los números enteros, además de su uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre acciones y vayan construyendo sus propios significados.”*

Lo manifestado por Castillo, C. concuerda con lo que nos dice Piaget: “Los modelos didácticos contruidos con objetos físicos es siempre un medio para promover aprendizajes iniciales de un concepto determinado, pero nunca debe ser un fin en sí mismo”.

En suma, son muchas las ventajas que tienen los modelos didácticos elaborados en base a objetos físicos para el aprendizaje de la aritmética de los números enteros, las que se pueden resumir en lo siguiente:

- Son instrumentos motivadores que permiten ver, tocar, coger y mover objetos para captar y deducir propiedades operativas partiendo del manejo de reglas operativas sencillas que permiten acciones irreproducibles en la pizarra o en la hoja de cálculo.
- Las construcciones realizadas por los escolares permanecen en el tiempo para volver a ellas durante el repaso.
- Permiten adaptarse a la heterogeneidad del grupo, resultando imprescindible para los escolares con necesidades especiales.
- Permiten al escolar experimentar por su propia cuenta fomentando el desarrollo de la autonomía de los mismos, mientras busca respuestas de forma independiente y espontánea, es decir, permiten construir sus propios aprendizajes.

## **2.5 PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN EL NIVEL PRIMARIA**

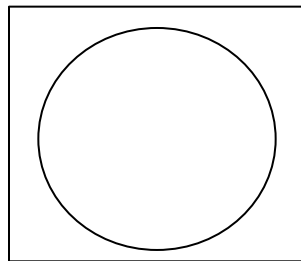
Este modelo que se propone es muy sencillo de elaborarlo. Se basa en un conjunto de número variable de rondanas de cartón o plástico de 4 cms de diámetro. Una de las caras se pinta de color naranja la que representará a la unidad positiva (+1) y, la otra cara se pinta de color celeste la que representará a la unidad negativa (-1).

Para el propósito de esta tesis se han preparado 50 rondanas de este tipo las que deben ir depositados en una caja o taper transparente. Para operar o manipular estas rondanas, con los colores antes explicados, se recomienda 2 fases, pero antes convendremos en representar una rondana naranja (+) simplemente con el signo + y, una rondana celeste simplemente con el signo - :

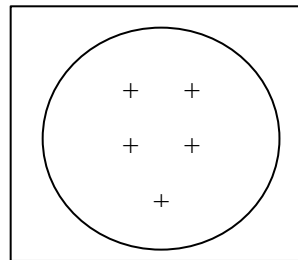
### **Fase cualitativa:**

El escolar de 5to o 6to grado de primaria se familiariza con el material (y mejor si el propio escolar los elabora) realizando representaciones u operaciones sencillas tales como:

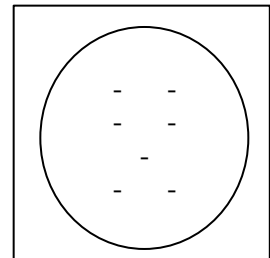
- a) Representar números positivos y negativos. Previamente se conviene con ellos que la superficie de la mesa sin ninguna rondana sobre ella representa el cero entero. Para representar un número entero cualquiera se usará un conjunto de rondanas encerradas con una circunferencia de cartulina o plástico sobre la mesa.



Superficie vacía  
representa el entero  
cero (0)



Representa al  
entero +5 o  
simplemente 5



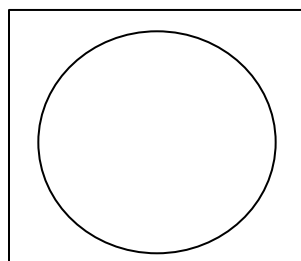
Representa el  
entero negativo  
-7

- b) Calcular el valor absoluto de un número entero cualquiera con la siguiente regla:

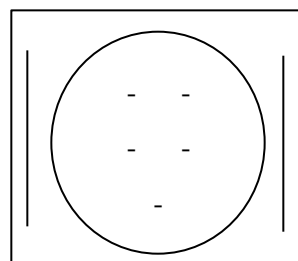
“El valor absoluto de un entero está dado por la cantidad de rondanas que representan a este número, sin importar el signo”.

Para indicar el cálculo de un valor absoluto se usará barras de cartulina o de plástico.

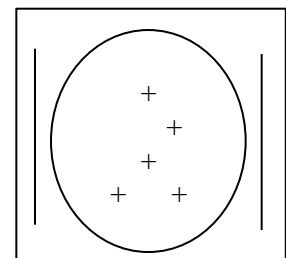
Ejemplos:



$$|0| = 0$$



$$|-5| = 5$$

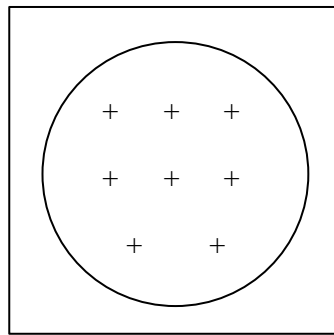


$$|+5| = 5$$

NOTA: A estas alturas es necesario convenir con el escolar que cualquier entero positivo de la forma  $+Z$  se simbolizará simplemente por  $Z$ .

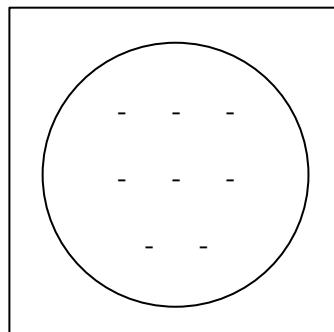
- c) Representar cantidades relacionadas a conceptos de la vida cotidiana (tengo, debo, izquierda, derecha, abajo, arriba, etc.)

Ejemplo 1.- Representar la situación: “tengo 8 soles”



$$+_8 = 8$$

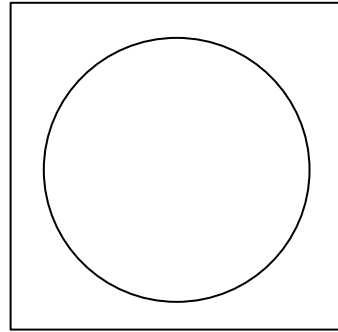
Ejemplo 2.- Representar la situación: “Debo 8 soles”



$$-_8$$

Situaciones como las representadas en los 2 ejemplos anteriores permiten al escolar visualizar e interiorizar que no es lo mismo “tener 8 soles” que “deber 8 soles”

Ejemplo 3.- Representar la situación: “Ni debo ni tengo”

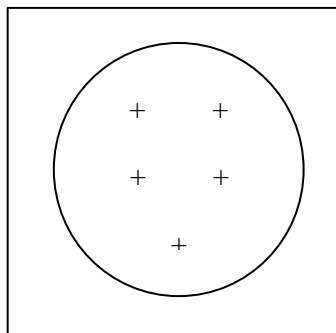


0 (Cero)

Situaciones como “ni debo ni tengo”, “ni abajo ni arriba”, “ni a la izquierda ni a la derecha” permiten visualizar é interiorizar al escolar en la existencia de situaciones neutras o existencia del cero (0) entero.

- d) Representar números positivos y negativos. Previamente se conviene con ellos que la superficie de la mesa sin ninguna rondana sobre ella representa el cero entero. Para representar un número entero cualquiera se usará un conjunto de rondanas encerradas con una circunferencia de cartulina o plástico sobre la mesa.

Ejemplos:



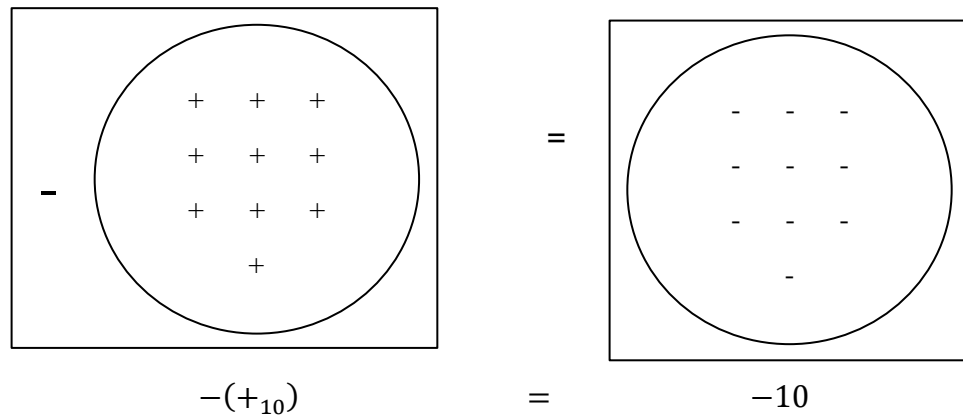
5 rondanas de color naranja

Representan a  $+_5$  o simplemente 5

e) Hallar el opuesto de un número entero.-

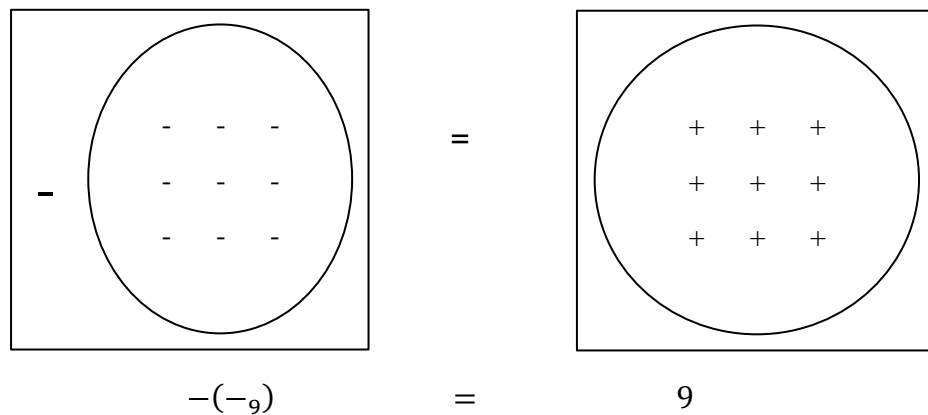
Como ya se sabe el opuesto de un entero positivo es otro pero negativo, con la propiedad de que ambos tienen el mismo valor absoluto (el mismo número de rondanas).

Ejemplo 1.- Hallar el opuesto del entero 10



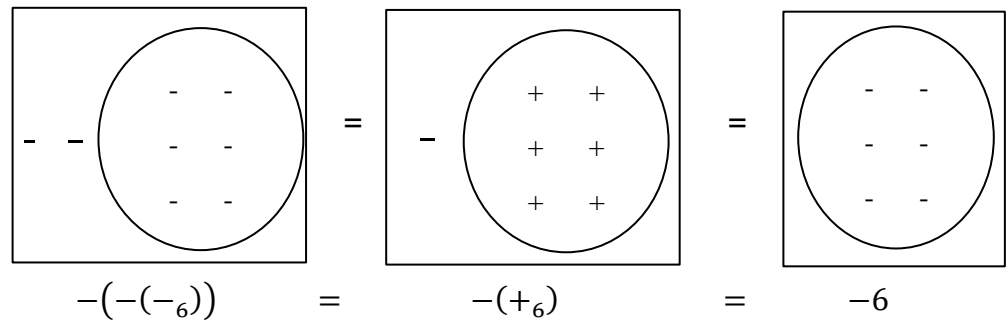
Esta operación consistió en invertir o voltear las 10 rondanas de color naranja (+) para que resulten 10 rondanas celeste (-)

Ejemplo 2.- Hallar el opuesto de -9





Ejemplo 3.- Hallar el opuesto del opuesto de -6



A través de ejercicios como los mostrados en los 3 ejemplos, el escolar debe darse cuenta que hallar el opuesto de un conjunto de rondanas es simplemente “invertir” o “voltear” las rondanas tantas veces como lo indica el operador “opuesto de”. Obviamente, el propósito que tienen estas representaciones es que quede grabado en la estructura cognitiva del escolar lo siguiente:

$$-(Z) = -Z$$

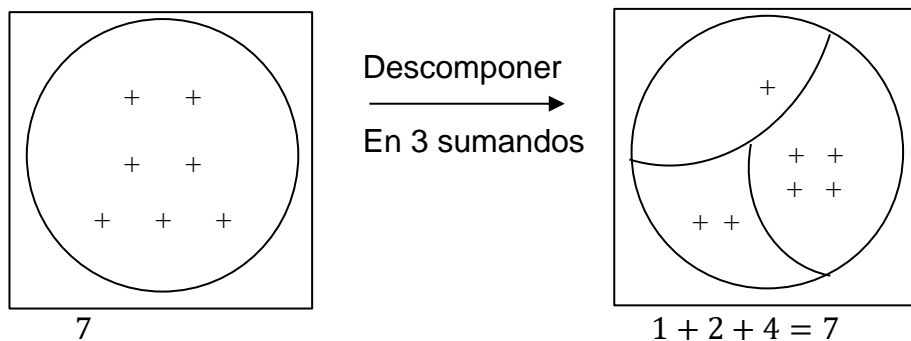
$$-(-Z) = Z$$

Además, se debe remarcar al escolar que tanto el entero  $Z$  como su opuesto  $-Z$  tienen el mismo valor absoluto.

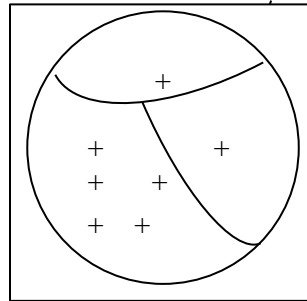
f) Descomponer un entero en sus sumandos

Este es un ejercicio que el escolar que se inicia en la aritmética de los números enteros debe de dominarlo previamente con ayuda de las rondanas.

Ejemplo 1.- Descomponer el entero 7 en 3 partes

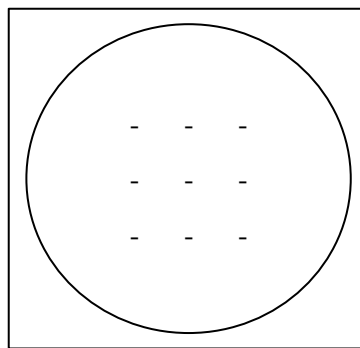


Por supuesto que esta no es la única descomposición que se puede efectuar. Lo siguiente nos muestra otra descomposición del entero 7 en 3 partes.



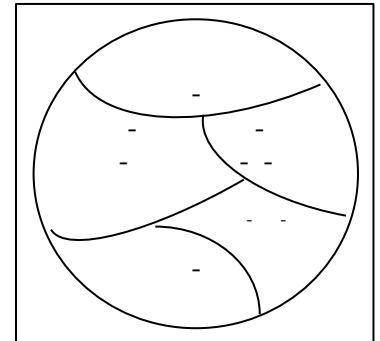
$$1 + 1 + 5 = 7$$

Ejemplo 2.- Descomponer el entero -9 en 5 partes



$$-9$$

Descomponer  
→  
En 5 sumandos



$$(-1) + (-3) + (-2) + (-2) + (-1) = -9$$

**Fase operativa:**

Una vez que sea de dominio del escolar de 5to o 6to grado de primaria la fase cualitativa anteriormente tratada, queda listo para la fase operativa de la adición y sustracción de números enteros.

La idea central de esta fase es que mediante la manipulación de las rondanas (naranjas + y celestes -), bajo reglas apropiadas, el escolar aprenda de manera significativa y duradera en el tiempo la estructura lógica de estas Z operaciones básicas de la aritmética de los números enteros,

para después en la secundaria dar énfasis al cálculo abstracto sin necesidad de apoyarse en el modelo didáctico que se propone.

a) Adición de números enteros.-

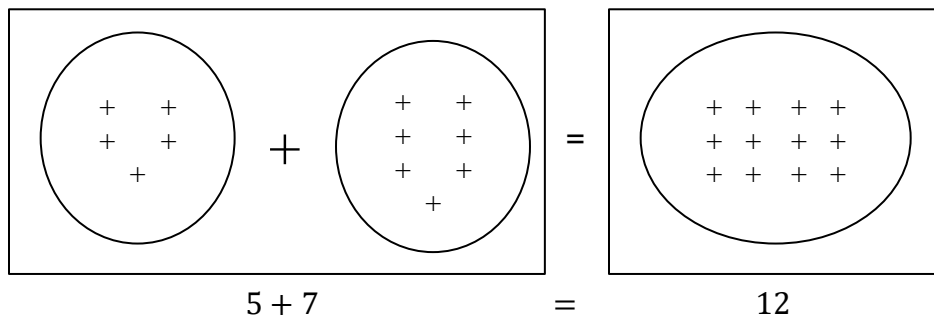
Para hallar la suma de 2 números enteros, con ayuda de las rondanas, el escolar debe usar la siguiente regla:

Si, los grupos de rondanas que representan los sumandos enteros son del mismo color (del mismo signo), estos se juntan para formar un solo grupo del mismo color, luego se cuenta la totalidad de rondanas y se coloca el mismo signo del color al resultado del conteo.

Si, los grupos de rondanas que representan los sumandos enteros son de diferente color, cada pareja de rondanas uno naranja (+) y otro celeste (-) se anulan mutuamente regresando a su caja de origen. El resultado o suma que se obtiene son las rondanas que quedan o sobran después de anularse rondanas naranjas con celestes. Si quedan naranjas estas se cuentan y se le coloca el signo positivo (+). Si quedan celestes estas se cuentan y se le coloca el signo negativo (-).

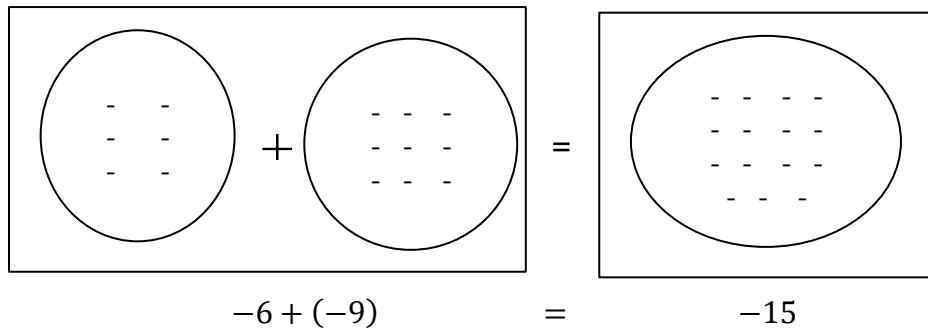
Ejemplo 1.- Hallar la suma de 5 y 7

Los enteros 5 y 7 son positivos, estos se representan con rondanas naranja. El resultado son 12 rondanas todas naranja (+).



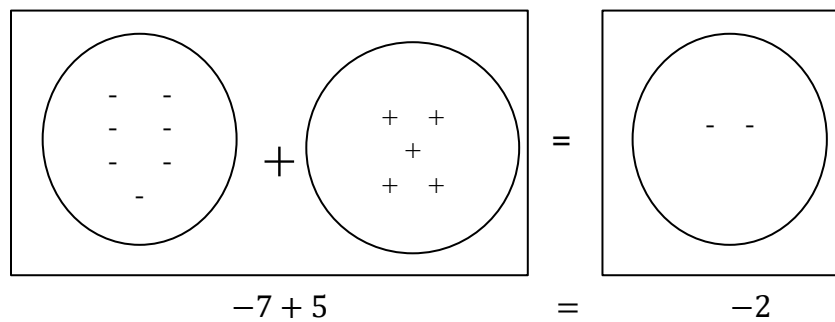
Ejemplo 2.- Hallar la suma de  $-6$  y  $-9$

Los enteros  $-6$  y  $-9$  son negativos, estos se representan con rondanas celestes. El resultado son 15 rondanas todas celestes (-).

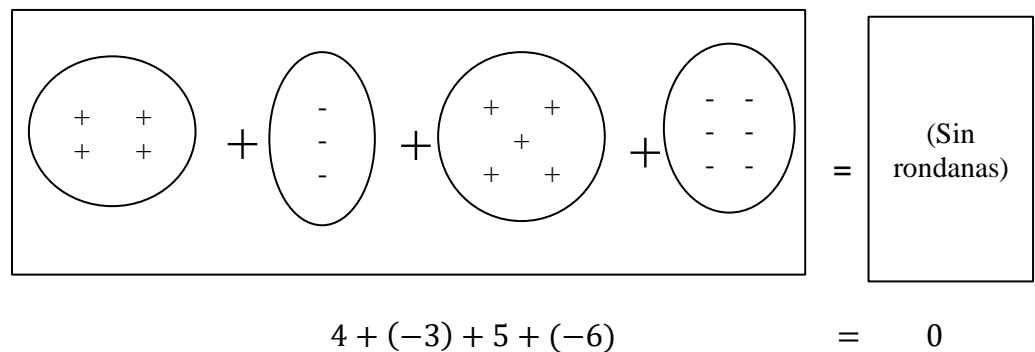


Ejemplo 3.- Hallar la suma de  $-7 + 5$

El entero  $-7$  se representan con 7 rondanas celestes (-) y el entero 5 se representan con 5 rondanas naranja. Según la regla dada las 5 rondanas naranja se anulan con 5 rondanas celestes.



Ejemplo 4.- Hallar la suma de  $4 + (-3) + 5 + (-6)$



En este ejemplo se han anulado la misma cantidad de rondanas naranja (+) con la misma cantidad de rondanas celeste (-), no quedando rondanas (cero).

Ejemplo 5.- Hallar la suma de los enteros  $-6$ ;  $-2$  y  $9$  sin utilizar rondanas.

Después de mucha práctica con ejemplos del tipo vistos en los 4 ejemplos anteriores, el escolar debe ser inducido a utilizar su propia iniciativa a calcular sumas sin utilizar rondanas, porque ya se supone que grabó en su mente la regla de la estructura lógica para adicionar números enteros. Su iniciativa le lleva a descomponer los números enteros para posibilitar la anulación de un entero  $Z$  con otro  $-Z$ ; es decir, en este ejemplo, debiera proceder a descomponer  $9$  en sus sumandos  $6 + 2 + 1$ , para luego proceder del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & -6 + (-2) + 9 \\ & -6 + (-2) + 6 + 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.- Calcular  $-172 + 58 + (-33) + 120$

Estos sumandos son un tanto altos; por más que se quisieran calcular la suma con ayuda de las rondanas sería engorrosa y llevaría mucho tiempo. Más bien es necesario inducir al escolar, en estos casos, a sumar todos los enteros negativos, luego todos los enteros positivos, para finalmente hacer la descomposición necesaria.

$$\begin{array}{r} -172+ \quad 58+ \\ - \underline{33} \quad \underline{120} \\ -205 \quad 178 \\ -205 + 178 \\ -178 + -27 + 178 = -27 \end{array}$$

Para realizar la descomposición de  $-205$  en sus partes  $-178$  y  $-27$ , debe utilizar la resta  $205 - 178 = 27$  para ayudarse, pero no perdiendo de vista que tanto  $-178$  y  $-27$  son negativos.

b) Sustracción de números enteros.-

El escolar de primaria del 5to o 6to grado, ya sabe que en toda operación de restar números naturales hay un minuendo ( $M$ ), un sustraendo ( $S$ ) y un resultado llamado diferencia ( $D$ ).

$$M - S = D$$

El escolar que aún no conoce los números enteros sabe que  $M$  debe ser mayor o igual que  $S$  y, que  $D$  mínimo puede ser cero. Pero cuando se trata de números enteros estos requisitos ya no se cumplen necesariamente, pues sucede que ahora  $M$  puede ser menor que  $S$  y que  $D$  puede ser menor que cero. Esto precisamente reta el sentido común y lógico del escolar que aún no se ha topado con números enteros.

En todas las investigaciones que se han realizado en torno a las diferentes dificultades que se presentan en el aprendizaje de las 4 operaciones básicas con números enteros es la sustracción la que presenta una mayor dificultad en su aprendizaje, pues los escolares suelen manifestar: ¿cómo voy a restar una cantidad mayor a otra menor? Y ellos mismos se responden ¡esto es imposible!, refiriéndose al caso en que  $M$  es menor que  $S$  y, peor aun cuando resulta que  $M$  es cero y  $S$  es mayor que cero, ellos exclaman: ¡es imposible! Esto sucede porque su mundo matemático del escolar, que aún no se inicia con los números enteros, está restringido a los números naturales.

Ahora, al entrar a un nuevo mundo matemático como es el conjunto de los números enteros, es necesario que lleguen a comprender y entender que ahora si es posible lo que antes pensaban que es

imposible. Precisamente, para contrarrestar las dificultades de aprendizaje de la sustracción de números enteros es conveniente utilizar recursos didácticos apropiados, como el que se propone, para que se convengan que si existen situaciones en las que el sustraendo  $S$  puede ser mayor que el minuendo  $M$ .

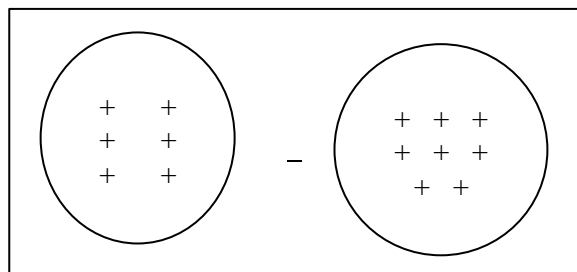
El sencillo modelo didáctico que se propone se adapta muy bien para hacer comprender al escolar de primaria el algoritmo que suele usarse para hallar la diferencia  $D$  de  $M$  y  $S$ :

$$M - S = M + (-S) = D$$

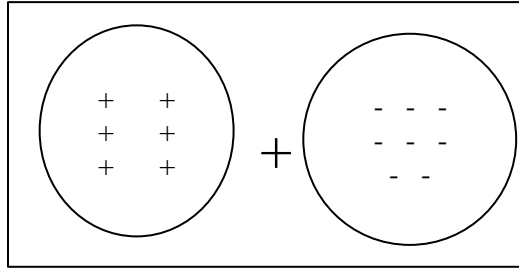
Este algoritmo nos dice que: Para restar un entero  $S$  a otro entero  $M$ , simplemente se suma al entero  $M$  el opuesto del entero  $S$ . Esto quiere decir que para representar restas con el modelo didáctico que se propone es suficiente invertir o voltear las rondanas que representan al entero sustraendo  $S$  y, luego aplicar la regla de la adición de números enteros vistos anteriormente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.- Restar 8 al entero 6

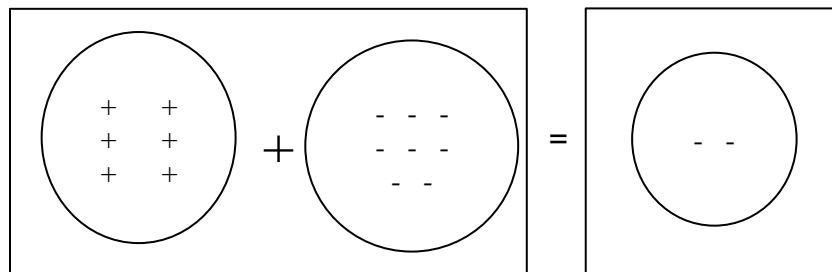
En este caso,  $S = 8$  y  $M = 6$ . Se coloca sobre la mesa 6 rondanas de color naranja (+) y, luego se coloca el signo “-” de la resta para luego colocar 8 rondanas también de color naranjada (+).



De acuerdo a la regla dada para la sustracción de enteros se cambia el signo “-” de la resta por el signo “+” de la adición y, se invierten las 8 rondanas naranjas.



Ahora se aplica la regla para la adición de números entero, en la que una rondana (+) se elimina con otra rondana (-), regresando a su caja de origen:



Se observa que después de eliminarse (tacharse) rondanas naranjas (+) con rondanas celestes (-) quedan 2 rondanas celestes (-).

La simbolización de la sustracción ilustrada en los cuadros anteriores es como sigue:

$$6 - 8 = 6 + (-8) = -2$$

Trabajando con las rondanas con ejercicios de este tipo el escolar irá aceptando poco a poco que sí es posible restar una cantidad mayor a otras menores.

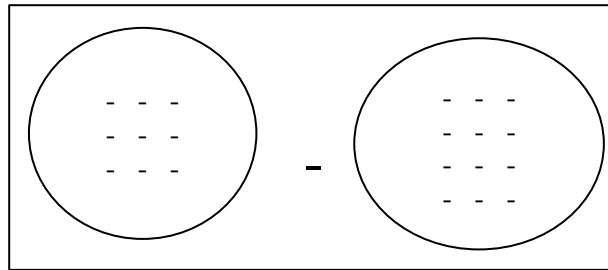
Ejemplo 2.- Efectuar la resta  $-9 - (-12)$

Este tipo de ejercicio causa mucha confusión al escolar, debido a que en un principio no distingue bien que una cosa es el signo “-” del número negativo -12 y otra cosa es el signo, “-” de la resta. Trabajando con las rondanas el escolar se irá familiarizando paulatinamente con este tipo de cálculos hasta comprenderlo



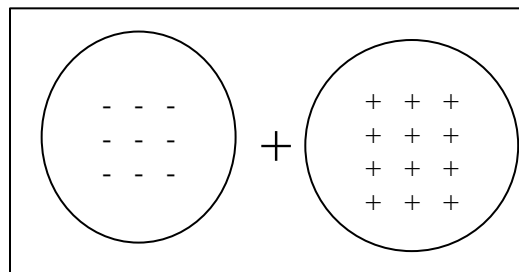
cabalmente e incorporarlo a su estructura cognitiva.

Veamos cómo se resuelve la resta planteada:



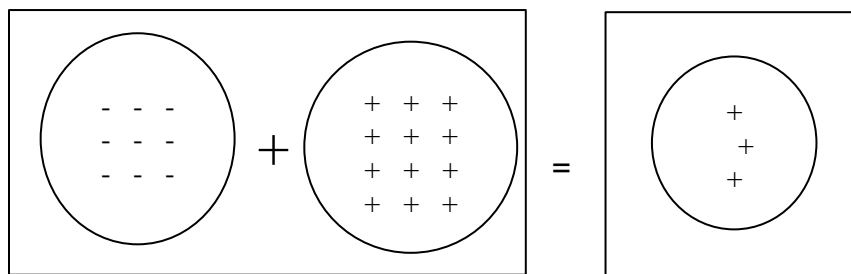
$$-9 - (-12)$$

A continuación se aplica la regla dada para la sustracción de enteros: se cambia el signo “-” por “+” y se voltean las rondanas del lado derecho:



$$-9 + 12$$

Finalmente se aplica la regla dada para la adición de enteros, es decir, se eliminan las rondanas positivas con las negativas, para después verificar cuántas rondanas quedan y cuál es su signo:



$$-9 + 12$$

=

$$3$$

Han quedado sobre la mesa 3 rondanas positivas, entonces en síntesis el resultado de este cálculo es:

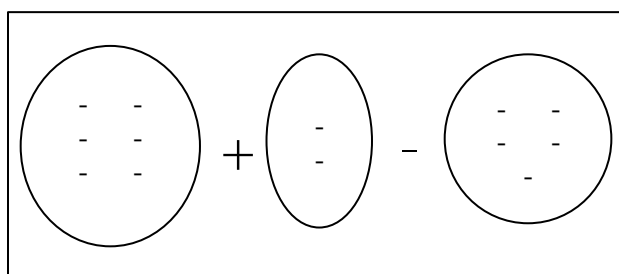
$$-9 - (-12) = -9 + 12 = 3$$

- c) Operaciones combinadas de sumas y restas con números enteros. Después de mucha práctica, con el modelo didáctico de las rondanas naranjas (+) y celestes (-), de sumas y restas por separado, ahora la secuencia siguiente es presentar al escolar de 5to o 6to grado de primaria cálculos combinados de sumas y restas. Para lograr estos cálculos la idea central es saber combinar adecuadamente las reglas dadas tanto para la suma como para las restas.

Ejemplo 1.- Hallar el resultado de la operación:

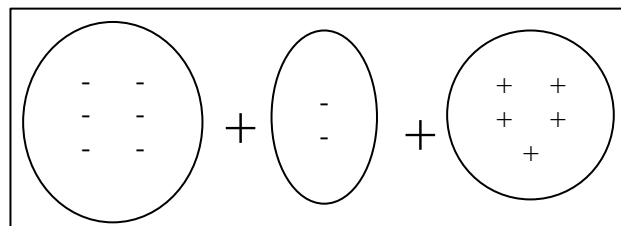
$$-7 + (-2) - (-5)$$

Se coloca sobre la mesa los grupos de rondanas que representan a los enteros -7; -2 y -5, entre cuyos espacios se colocan los signos de suma (+) y resta (-) respectivamente, cuya presentación es como la sigue:

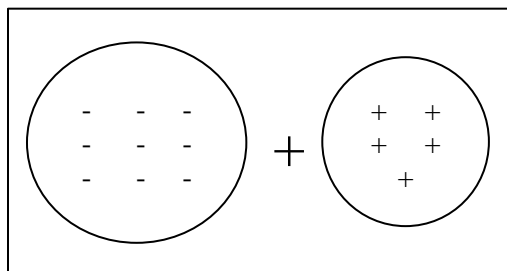


$$-7 + (-2) - (-5)$$

Reemplazando el signo de la resta por el signo de la adición e invirtiendo las 5 rondanas celestes y juntando en un solo grupo las rondanas celestes (-), y luego aplicando la regla de la adición tenemos:

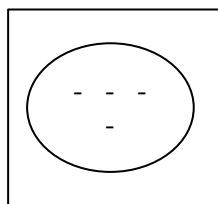


$$-7 + (-2) + 5$$



$$-9 + 5$$

Después de la eliminación quedan 4 rondanas celestes (-):

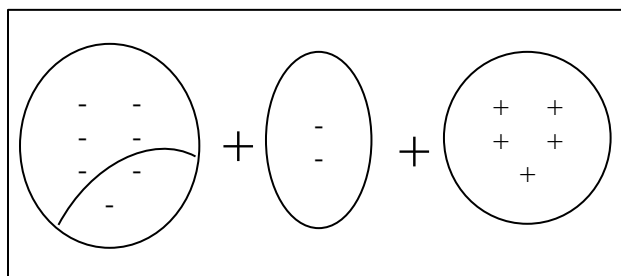


$$-4$$

El cálculo simbólico para llegar a este resultado es como sigue:

$$-7 + (-2) - (-5) = -7 + (-2) + 5 = -9 + 5 = -4$$

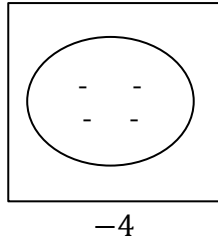
En realidad, es necesario que con ayuda de las rondanas el escolar explore y halle otras maneras para llegar al mismo resultado. Por ejemplo, el escolar podía haber procedido, después de cambiar (-) por (+) y haber invertido las 5 rondanas negativas (celestes), del siguiente modo:



Se descompone -7 en sus sumandos -5 y -2

$$-7 + (-2) + 5 = -5 + (-2) + (-2) + 5$$

Después de eliminarse un positivo (+) con otro negativo, quedan 4 rondanas negativas.



d) Operaciones de sumas y restas con signos de colección.

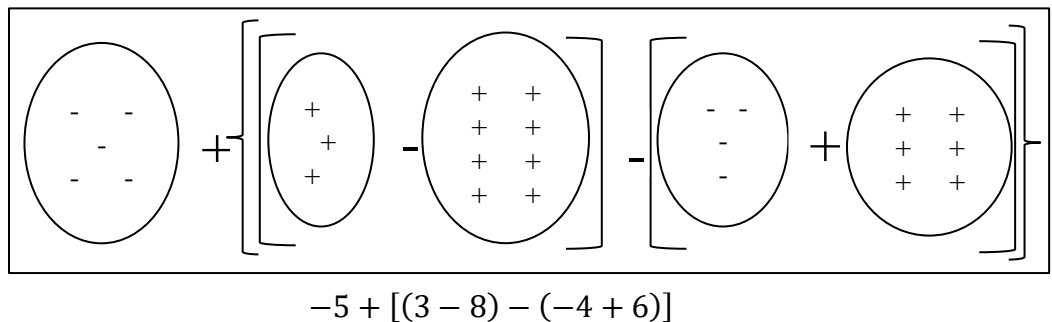
El escolar de 5to o 6to grado de primaria ya sabe manejar los signos de colección como los paréntesis y los corchetes, signos que se usan para indicar jerarquías operativas.

Así, en una operación indicada de sumas y restas combinadas con paréntesis y corchetes, el escolar promedio de primaria sabe que primero se resuelven los paréntesis y, en segundo lugar los corchetes.

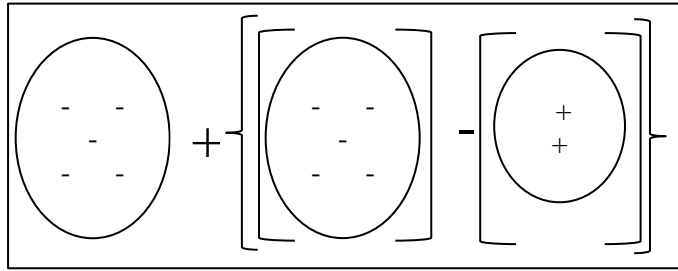
En relación a los signos de colección es recomendable introducir al escolar de 5to o 6to grado de primaria al cálculo de ejercicios sencillo usando signos de colección.

Ejemplo 1.- Resolver:  $-5 + [(3 - 8) - (-4 + 6)]$

La disposición de las rondanas que representan a estos números en esta operación indicada es tal como sigue:

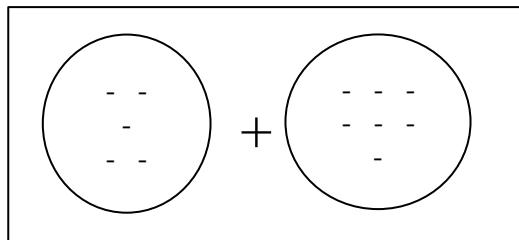


Resolviendo primero los paréntesis:



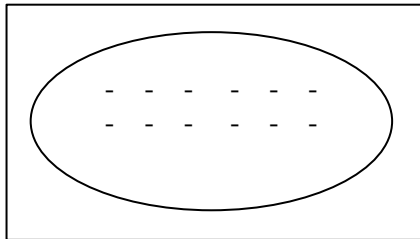
$$-5 + [-5 - (2)]$$

Resolviendo luego el corchete.



$$-5 + (-7)$$

No hay nada que eliminar, basta juntar ambos grupos



$$-12$$

En síntesis la operación simbólica es:

$$-5 + [(3 - 8) - (-4 + 6)] = -5 + [-5 + (-2)] = -5 + (-7) = -12$$

- e) Iniciación a la aplicación de sumas y restas de números enteros a situaciones reales.-

Una vez que el escolar de 5to o 6to grado de primaria ha comprendido a cabalidad la estructura lógica de las operaciones de adición y sustracción de números enteros, por supuesto que con ayuda del material didáctico propuesto, a continuación se hace

necesario que el escolar identifique situaciones reales de la vida cotidiana con las rondanas positivas (+) y las situaciones opuestas correspondientes con las rondanas negativas (-) y; con estas mismas rondanas se inician en el planteamiento y solución de problemas sencillos del entorno del escolar. Para esta identificación previa se puede usar el siguiente cuadro:

**IDENTIFICACIÓN Y REPRESENTACIÓN CON NÚMEROS ENTEROS SITUACIONES REALES DE LA VIDA COTIDIANA.**

RONDANAS NARANJA (+) NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS	RONDANAS CELESTE (-) NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS
A la derecha de	A la izquierda de
Arriba de	Debajo de
Goles a favor	Goles en contra
Tengo tantos soles	Debo tantos soles
Gané tantos soles	Gasté tantos soles
Tantos Km al Norte	Tantos Km al sur
Tantos Km al Este	Tantos Km al Oeste

**PROBLEMA:** Raúl vive a media cuadra de cierta avenida de Huacho. Salió de su casa a comprar pan y caminó 10 metros hacia su derecha en la que hay una tienda, pero como se había acabado el pan en esta tienda recordó que en la misma cuadra de su casa hay otra tienda a la que se dirigió caminando 25 metros en sentido contrario, desde la primera tienda hasta la segunda, para después regresar a su casa.

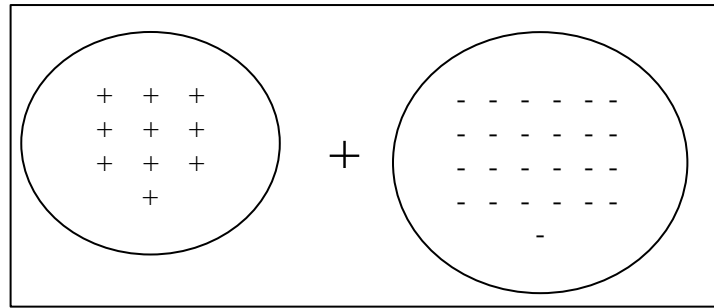
- a) La segunda tienda se encuentra ¿a la izquierda o derecha de su casa?
- b) ¿A cuántos metros de su casa se halla la segunda tienda?
- c) ¿En total, cuantos metros camino para retornar a su casa?

Solución: Usando las rondanas del modelo didáctico propuesto tenemos:

Caminó 10 metros a la derecha: 10 rondanas naranjas (+)

Caminó 25 metros en sentido contrario: 25 rondanas celestes (-)

Operación a realizar: Adición de números enteros



$$10 + (-25) = -15 \text{ metros}$$

Respuestas:

- Como el resultado de la adición realizado es -15 metros, entonces la segunda tienda se encuentra a la izquierda de su casa, por ser el entero -15 un número negativo.
- Calculando el valor absoluto de -15 es  $|-15| = 15$  metros. La segunda tienda se encuentra a 15 metros de su casa.
- En total, Raúl caminó:

Hacia la primera tienda	: $ 10m  = 10$
De la primera tienda hacia la segunda	: $ -25  = 25$
Para regresar a su casa	: $ -15  = 15$
	Total 50m.

## 2.6 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

### 2.6.1 HIPÓTESIS GENERAL

El modelo didáctico que se propone es efectivo para el inicio del proceso de enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria, en relación a otros modelos o estrategias tradicionales.

### **2.6.2 HIPÓTESIS ESPECIFICAS**

H1: El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer comprender al escolar de primaria la naturaleza de los números enteros.

H2: El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer comprender al escolar de primaria la estructura lógica operativa de adición de los números enteros y sus propiedades.

H3: El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer comprender al escolar de primaria la estructura lógica operativa de la sustracción de números enteros y sus propiedades.

H4: El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer representar, formular y resolver problemas sencillos con números enteros.



## **CAPITULO III: METODOLOGÍA**

### **3.1 DISEÑO METODOLÓGICO**

#### **3.1.1 MÉTODOS Y TÉCNICAS**

En el presente trabajo se utilizará el método científico y la técnica estadística para recoger y procesar la información obtenida, para obtener las conclusiones en torno a las hipótesis planteadas.

#### **3.1.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN**

Es una investigación de tipo aplicada o práctica pues está enfocada a la solución de un problema: contrarrestar las dificultades de aprendizaje de la aritmética de los números enteros con ayuda de un modelo didáctico basado en la manipulación de objetos físicos bajo reglas que obedecen a la estructura lógica de 2 operaciones básicas: la adición y sustracción de números enteros

#### **3.1.3 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN**

En cuanto al enfoque es de tipo cuantitativo, en razón a que se cuantificará los niveles de aprendizaje alcanzado, de los escolares del 5to o 6to grado de primaria, logrados en las operaciones de adición sustracción de enteros en el nivel primaria.

#### **3.1.4 TIPO DE DISEÑO**

El diseño a usarse es el pre-experimental pues la experiencia a realizarse es enseñar la lógica de las operaciones de adición y sustracción de los números enteros a los escolares del 5to o 6to grado que se inician en la aritmética de los números enteros, para después medir los efectos y compararlos con otras mediciones realizadas por otras investigaciones.

### **3.1.5 NIVELES O ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN**

Esta investigación es de nivel exploratorio y descriptivo, porque efectivamente se explora, a través de sucesivos ensayos y ejercicios prácticos, los efectos producidos y observados, en escolares del 5to o 6to grado de primaria, por el uso del modelo, didáctico propuesto para el aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción de números enteros y, a la vez descriptivo porque estos efectos se miden y se describen cuantitativamente a través de la estadística descriptiva.

## **3.2 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

### **3.2.1 TÉCNICAS A EMPLEAR**

Se usarán fichas de observación durante la fase exploratoria o fase I. Al final de la experiencia de utilizar el modelo didáctico se aplicara una prueba de evaluación (Fase II), en escala vigesimal, a la muestra de estudiantes de primaria seleccionados para esta ocasión. Los puntajes logrados se procesarán y se presentaran en cuadros estadísticos.

### **3.2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS**

Cada escolar de la muestra tendrá una ficha de observación en la que se ira registrando sus logros y dificultades, paso a paso, que su aprendizaje, con la finalidad de hacer correcciones en caso necesario. En cuanto a la prueba de evaluación esta tendrá reactivos, en una cantidad necesaria, considerando todos los temas tratados, como son:

- Representación de números enteros con rondanas.
- Simbolización con números enteros a grupos de rondanas.
- Determinación del opuesto de un grupo de rondanas.
- Determinación del opuesto de un número entero de manera simbólica.

- Cálculo del valor absoluto de un entero.
- Cálculo de la suma de números enteros de igual signo.
- Cálculo de la suma de números con diferentes signos.
- Cálculo de la diferencia de 2 enteros en sus diferentes casos.
- Cálculos de sumas y restas combinadas.
- Cálculo de sumas y restas con signos de colección.
- Resolución de problemas sencillos con números enteros.

### **3.3 POBLACIÓN Y MUESTRA**

La Población está constituida por todos los escolares del 6to grado de primaria del distrito de huacho matriculados en el año 2018.

La muestra está constituida por 25 escolares de primaria estudiantes del aula B de la I.E. Horacio Zevallos Gamez – La Villa – Sayán (N°21544). Es una muestra no aleatoria de tipo intencional.

### 3.4 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

VARIABLE PRINCIPAL	VARIABLES SECUNDARIAS	INDICADORES DE MEDICIÓN (EVALUACIÓN)
<p>Nivel de aprendizaje alcanzado en el reconocimiento de números enteros y las operaciones de adición y sustracción.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el reconocimiento de números enteros y su representación con ayuda del material didáctico (MD).</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en la determinación del opuesto de un número entero, con ayuda del MD y, luego simbólica.</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo del valor absoluto de un número entero, primero con ayuda del MD y, luego simbólicamente.</li> <li>- Nivel de aprendizaje alcanzado en el cálculo de sumas de números enteros con ayuda del MD y, luego de manera simbólicamente.</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo de restas con ayuda del MD y, luego de manera simbólica.</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo combinado de sumas y restas con ayuda del MD y, luego simbólicamente.</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo de sumas y restas combinadas con signos de colección con ayuda del MD y, luego de manera simbólica.</li> <li>- Nivel de aprendizaje alcanzado en el planteamiento y solución de problemas sencillos con ayuda del MD.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa correctamente a los números positivos, negativos y el cero.</li> <li>- Determina correctamente el opuesto de un entero.</li> <li>- Calcula correctamente el valor absoluto de un número entero.</li> <li>- Calcula correctamente la suma de números enteros de igual signo.</li> <li>- Calcula correctamente la suma de números enteros con signos diferentes.</li> <li>- Calcula correctamente la diferencia de números enteros en sus distintos casos.</li> <li>- Calcula correctamente sumas y restas combinadas de números enteros.</li> <li>- Calcula correctamente sumas y restas combinadas de números enteros con signos de colección.</li> <li>- Plantea, resuelve, interpreta y comunica problemas sencillos con números enteros.</li> </ul> <p>Nota: La medición o evaluación de los aprendizajes es considerando en 2 fases:</p> <p>FASE I: cálculos operativos exclusivamente con ayuda del material didáctico propuesto.</p> <p>FASE II: cálculos operativos exclusivamente de manera simbólica.</p>

### 3.5 ESTRATEGIA METODOLÓGICA

La estrategia a seguirse en el desarrollo de la presente investigación es a través de 4 etapas:

Etapa I: Recopilación de Información

- a) Revisión y análisis de textos de matemática del nivel primaria.
- b) Revisión del DCN
- c) Revisión del Currículo Nacional de la Educación Básica.
- d) Revisión de diversas investigaciones en torno a la problemática de la enseñanza.

Etapa II: Diseño de material didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la aritmética de números enteros:

- a) Preparación de material de 50 rondanas de 4 cms, de diámetro, pintadas de color naranja (+) y color celeste (-), las que deben ir depositadas en un recipiente de plástico transparente.
- b) Diseño de reglas operativas para determinar el opuesto de un entero, calcular el valor absoluto, hallar sumas y restas.

Etapa III: Ensayo, exploración y aplicación del modelo didáctico (MD) propuesto.

- a) Ejecución de la Fase Cualitativa.
- b) Ejecución de la Fase Operativa.

Fase IV: Evaluación de las capacidades y desempeños.

- a) Evaluación de los indicadores para la representación de números enteros, determinación de opuestos y cálculos del valor absoluto. Primero con ayuda del material didáctico y luego de manera simbólica.
- b) Evaluación de los indicadores para las operaciones de adición y sustracción de números enteros.

### **3.6 TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN**

#### **3.6.1 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.-**

Elaboración de cuadros comparativos, gráficas y cálculo de estadígrafos necesario, con ayuda del programa SPSS-24

#### **3.6.2 ESTADÍSTICA INFERENCIAL.-**

Para correlacionar los niveles de aprendizaje de las fases I y II:

Fase I: Cálculos operativos exclusivamente con ayuda del material didáctico propuesto, usando fichas de observación.

Fase II: Cálculos operativos exclusivamente de manera simbólica, aplicando pruebas de evaluación.

## **CAPITULO IV: RESULTADOS**

### **4.1 APLICACIÓN DEL RECURSO DIDÁCTICO PROPUESTA A UNA REALIDAD EDUCATIVA**

Para los propósitos del presente trabajo, previo a la aplicación del modelo propuesto, se hizo una adaptación de la macro competencia N°23: “Resuelve problemas de cantidad” y sus correspondientes capacidades y estándares de aprendizaje que figuran en el Currículo Nacional de Educación Básica, (2016, p.134 y 135), publicado por el Ministerio de Educación, para el nivel 6 de la EBR (1° Y 2° DE Secundaria), nivel en el que recién aparece los temas relacionados a los números enteros.

Esta adaptación consistió en diseñar una competencia específica para el tema motivo del presente trabajo, sus capacidades y sus estándares de aprendizaje que se exponen en el cuadro N°01.

En cuanto a la aplicación del recurso didáctico que se propone, esta se realizó en el aula B del 6to grado de primaria, con 21 alumnos, de la I.E. Horacio Zevallos Games N°21544 ubicada en el Centro Poblado La Villa del Distrito de Sayán.

CUADRO N° 01

COMPETENCIA, CAPACIDADES Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE PARA LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS EN EL 6TO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

COMPETENCIA ESPECÍFICA	CAPACIDADES	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE
<p>Resuelve problemas de la vida cotidiana con números enteros, combinando las operaciones aritméticas de adición y sustracción y valorando la importancia del sistema de números enteros.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se inicia en la utilización de números enteros para expresar, comunicar y leer información de situaciones de la vida real.</li> <li>• Ordena números enteros negativos y positivos, incluido el cero.</li> <li>• Maneja y utiliza el concepto de “opuesto de un entero”.</li> <li>• Calcula el valor absoluto de un número entero.</li> <li>• Suma números enteros.</li> <li>• Resta números enteros.</li> <li>• Calcula operaciones combinadas de sumas y restas.</li> <li>• Plantea y resuelve problemas con números enteros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza números enteros para expresar y representar cantidades relativas a los conceptos “arriba”, “abajo”, “debo”, “tengo”, “derecha” é “izquierda”.</li> <li>• Dado un conjunto de números enteros positivos y negativos los ordena de menor a mayor.</li> <li>• Halla el “opuesto” de un número entero y maneja sus propiedades.</li> <li>• Calcula el valor absoluto de un número entero.</li> <li>• Realiza sumas con varios sumandos enteros positivos y negativos.</li> <li>• Realiza restas utilizando números positivos y negativos.</li> <li>• Calcula operaciones combinadas de sumas y restas con números enteros.</li> <li>• Resuelve problemas usando números enteros, interpreta y comunica sus resultados.</li> </ul>



Esta aplicación se hizo siguiendo un conjunto de pasos secuenciales, en 7 sesiones de 2 horas cada una divididas en 2 fases:

### **FASE I (FASE EXPLORATORIA):**

Fue una fase exploratoria y preparatoria que abarcó 3 sesiones y consistió en la ejecución de la siguiente secuencia de pasos ordenados:

- a) Presentación del material en un taper de 50 rondanas de colores celeste por un lado y naranja por el otro lado, previa motivación por parte de la profesora explicando situaciones y conceptuales de la vida cotidiana como: “tantos metros a la izquierda de”, “tantos metros a la derecha de”, “tengo tantos soles”, “tantos pisos arriba de”, “tantos pisos debajo de”, etc.; utilizando en todo momento los saberes previos de los escolares.
- b) Ilustraciones y ejemplificaciones de las referidas situaciones cotidianas utilizando las rondanas del material propuesto y su consiguiente simbolización utilizando números enteros.
- c) Introducción del concepto “opuesto de un número entero”, utilizando rondanas y su consiguiente simbolización con números enteros y verificación de propiedades.
- d) Ordenación de conjuntos de rondanas bajo el concepto “menor que” y su consiguiente simbolización.
- e) Introducción al concepto “valor absoluto” utilizando conjuntos de rondanas y su consiguiente simbolización.
- f) Representar con rondanas la descomposición de un número enteros en sus partes menores y su consiguiente simbolización como una suma de sus partes.

### **FASE II (FASE OPERATIVA):**

Esta fase abarcó 4 sesiones de 2 horas cada una, incluido evaluaciones del aprendizaje, y tuvo la siguiente secuencia de pasos:

- a) Representación con rondanas de la suma de números enteros, con la simbolización simultánea, utilizando la siguiente regla:

**Para rondanas del mismo color:**

- Si, los grupos de rondanas que representan los sumandos enteros son del mismo color (mismo signo), estos se juntan para formar un solo grupo del mismo color, luego se cuenta la totalidad de rondanas y se coloca el mismo signo del color al resultado del conteo.

**Para rondanas de distinto color:**

- Si, los grupos de rondanas que representan los sumandos enteros son de diferente color (diferente signo), cada pareja de rondanas uno naranja (+) y otro celeste (-) se anulan mutuamente y regresan a su caja o taper de origen. El resultado o suma de esta operación que se obtiene son las rondanas que quedan o sobran después de anularse rondanas naranjas con celestes. Si quedan naranjas estas se cuentan y se le coloca el signo positivo (+). Si quedan rondanas naranjas estas se cuentan y se coloca el signo negativo (-) al resultado.

- b) Representación con rondanas y su simbolización de las propiedades de la adición de números enteros.
- c) Sumar números enteros que tengan el mismo valor absoluto, previa descomposición de los sumandos en partes convenientes.
- d) Representar con rondanas la sustracción de 2 números enteros, usando el algoritmo de la sustracción:

$$M - S = M + (-S) = D$$

Donde M, S y D son números enteros, es decir pueden ser positivos, negativos e incluso cero.

Esto quiere decir que el conjunto de rondanas que representa al entero sustraendo (S) se voltean para que cambien de color (de signo) y luego se aplica la regla o algoritmo de la adición dado anteriormente.

- e) Representación con rondadas de operaciones combinadas de adición y sustracción de números enteros, seguido de la simbolización simultánea de dicha operación, usando incluso signos de colección.
- f) Planteamiento y solución con rondanas de problemas sencillo usando los conceptos puestos:

agregar - quitar

derecha – izquierda

arriba - abajo

tengo – debo

y, su consiguiente planteamiento y su solución de forma simbólica.

## **4.2 EVALUACIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE**

“La evaluación es un acto educativo donde los estudiantes y docentes aprenden de sus aciertos y errores” (p. 23 del DCNBE-MED-2016).

La evaluación de los aprendizajes de los estándares adaptados tanto para la Fase I como para la Fase II fue constante y continua, lo cual permitió realizar los reajustes y refuerzos del caso. Sin embargo, al final de cada fase se aplicaron sendas pruebas de evaluación en función a los estándares de aprendizaje y que aparecen en los Anexos 01 y 02 N°01, cuyas descripciones son las siguientes:

### **4.2.1 PRUEBA DE EVALUACIÓN N°01**

Esta prueba contiene 10 ítems referidos a la evaluación de los estándares de aprendizaje para la Fase I:

- Representación mediante rondanas del opuesto de un número entero y su correspondiente expresión simbólica relacionándolo con situaciones que se presentan cotidianamente (izquierdo – derecha, abajo – arriba, debo – tengo, etc.)
- Determinación del valor absoluto de un número entero con ayuda de las rondanas y su consiguiente simbolización.

- Representación con rondanas del ordenamiento de números enteros, de menor a mayor y su correspondiente manejo simbólico.

Cada ítem tiene 3 opciones que van en orden de dificultad. Los puntajes asignados están de acuerdo a la cantidad de respuestas acertadas para cada opción:

Tres aciertos	:	3 puntos
Dos aciertos	:	2 puntos
Un acierto	:	1 punto
Ningún acierto	:	0 puntos

De este modo, el rango de los puntajes totales que se pueden obtener en cada prueba de evaluación varía de cero a 30 puntos, rango que nos permite seccionarlo en 4 partes para una apreciación cualitativa de los aprendizajes:

De 0 a menos de 8 puntos	:	Aprendizaje en inicio
De 8 a menos de 16 puntos	:	Aprendizaje en proceso
De 16 a menos de 22 puntos	:	Aprendizaje con logros previstos
De 22 a 30 puntos	:	Aprendizaje con logros destacados

#### **4.2.2 PRUEBA DE EVALUACIÓN N°02**

Esta prueba también contiene 10 ítems referidos a la evaluación de los estándares de aprendizaje para la Fase II:

- Representación figurada de la operación de adición usando rondanas con aplicación de la regla o algoritmo correspondiente.

- Cálculo de sumas de números enteros en la forma simbólica basado en la descomposición de los sumandos según convenga.
- Representación figurada de la operación de sustracción de números enteros con ayuda del material propuesto y usando el concepto de “opuesto”.
- Cálculo de la diferencia de una sustracción en la forma simbólica en analogía con el algoritmo dado para operar con rondanas.
- Planteamiento y solución de problemas sencillos de la vida cotidiana con ayuda de las rondanas y su correspondiente planteamiento y solución de manera simbólica y, luego su respectiva interpretación.

De este modo, el rango de los puntajes totales que se pueden obtener en cada prueba de evaluación varia de cero a 30 puntos, rango que nos permite seccionarlo en 4 partes para una apreciación cualitativa de los aprendizajes:

De 0 a menos de 8 puntos	: Aprendizaje en inicio
De 8 a menos de 16 puntos	: Aprendizaje en proceso
De 16 a menos de 22 puntos	: Aprendizaje con logros previstos
De 22 a 30 puntos	: Aprendizaje con logros Destacados

### **4.2.3 EVALUACIÓN FINAL DEL PROCESO**

La evaluación del proceso de enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el sexto grado de primaria, con el modelo didáctico propuesto, se ha consolidado sumando los puntajes obtenidos en las aplicaciones de las pruebas de evaluación N° 1 y 2

correspondiente de las fases I y II. Tanto los resultados de evaluación de ambas fases más su correspondiente suma se dan en el Cuadro N°02 como los puntajes de las fases se dan en el rango de cero a 30 puntos, entonces las sumas de ambos puntajes se dan en el rango de cero a 60 puntos. Para una apreciación cualitativa, este rango se dividió en 4 partes:

- De 0 a menos de 16 puntos : Aprendizaje en inicio
- De 16 a menos de 31 puntos : Aprendizaje en proceso
- De 31 a menos de 46 puntos : Aprendizaje con logros previstos
- De 46 a 60 puntos : Aprendizaje con logros destacados

#### **4.3 DESCRIPCIÓN DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS EN LAS EVALUACIONES**

A partir de los datos presentados en el Cuadro N°02, se han calculado los principales estadígrafos descriptivos de los puntajes obtenidos por la aplicación de las pruebas de evaluación N° 1 y 2 y, su correspondiente suma. Estos estadígrafos se presentan en el Cuadro N°03.

CUADRO N°02  
RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES

SUJETO	EVALUACIÓN FASE I	EVALUACIÓN FASE 2	EVALUACIÓN DEL PROCESO (I + II)
1	25	28	53
2	28	25	53
3	10	16	26
4	16	20	36
5	24	23	47
6	5	10	15
7	18	16	34

8	17	15	32
9	25	21	46
10	13	18	31
11	23	27	50
12	28	22	50
13	7	16	13
14	22	23	45
15	22	22	44
16	15	20	35
17	20	26	46
18	24	21	45
19	4	8	12
20	18	24	42
21	19	17	36

CUADRO N°03  
ESTADIGRAFOS DE LOS PUNTAJES OBSERVADOS EN LAS  
EVALUACIONES DE LAS FASES I Y II Y; DEL PROCESO  
(CALCULOS CON EL SPSS -24)

ESTADÍGRAFOS	FASE I	FASE II	DEL PROCESO
Media	18,2	19,9	37,7
Mediana	19,0	21,0	42,0
Desviación estándar	7,1	5,2	12,6
Mínimo	4	8	12
Máximo	28	28	53
Rango	24,0	20,0	41,0
Cuartil 1	14,0	16,0	31,5
Cuartil 2	19,0	21,0	42,0
Cuartil 3	24,0	23,5	46,5

#### 4.4 APRECIACIÓN CUALITATIVA DE LOS RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES

A partir del Cuadro N°02 se han agrupado los datos según niveles de aprendizaje propuesta por el MINEDU en el DCN de la EBR.

Estos aparecen en los siguientes Cuadros con sus correspondientes gráficos.

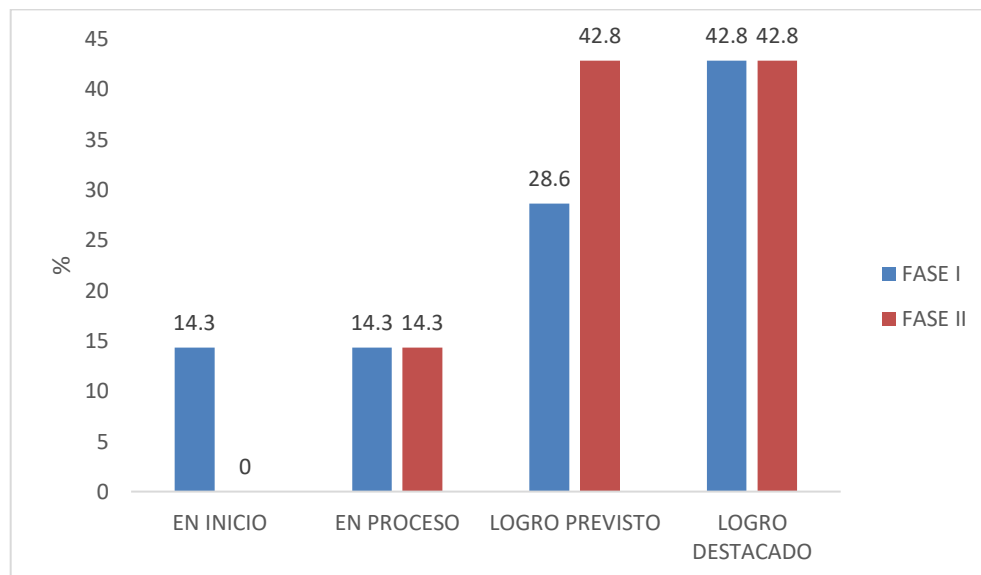
CUADRO N°4

##### NIVELES DE APRENDIZAJE OBSERVADOS EN LAS FASES I Y II

NIVELES DE APRENDIZAJE	FASE I		FASE II	
	F	F%	F	F%
En inicio (0 – 8)	3	14,3	0	00,0
En proceso (8 – 16)	3	14,3	3	14,3
Con logros previstos (16 – 22)	6	28,6	9	42,8
Con logros destacados (22 – 30)	9	42,8	9	42,9
TOTAL	21	100,0	21	100,0

GRÁFICO N°01

##### NIVELES DE APRENDIZAJE OBSERVADOS EN LAS FASES I Y II





CUADRO N°05

NIVELES DE APRENDIZAJE FASES I + FASE II

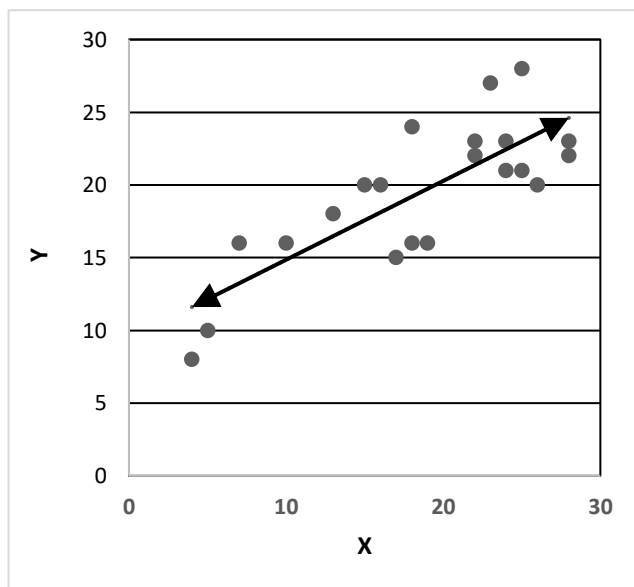
NIVELES DE APRENDIZAJE	F	F%
En inicio (0 – 16)	3	14,3
En proceso (16 – 31)	1	4,8
Con logros previstos (31 – 46)	10	47,6
Con logros destacados (46 – 60)	7	33,3
TOTAL	21	100,0

**4.5 REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE LAS EVALUACIONES**

Los puntajes observados de las evaluaciones de las fases I y II han sido analizados a la luz de la correlación y regresión lineal. En efecto, entre los puntajes X de la evaluación de la fase I y los puntajes Y de la fase II existe una correlación positiva en el orden de 0,82; resultado que tiene una significación del 1%. Además, existe una dependencia lineal entre estas 2 variables con ecuación de regresión  $\bar{y} = 0,6X + 9$ . Más detalles de éste análisis se da en el gráfico N°02.

GRAFICA N°02

REGRESIÓN Y CORRELACIÓN DE LAS EVALUACIONES EN LAS FASES I Y II



**R =**  
**0,82 (es significativa al 1%)**  
 $\bar{y} = 0,6X + 9$   
**X : Puntaje de la fase I**  
**Y : Puntaje de la fase II**

## **CAPITULO V**

### **DISCUSIÓN**

La enseñanza oficial de los números enteros y sus operaciones aritméticas, según el Currículo Nacional de la Educación Básica (aprobada con RM N°281-2016-MINEDU) en nuestro país, está programado bajo la competencia N°23: Resuelve problemas de cantidad, en el nivel 6 que corresponde al 1° y 2° año de secundaria, cuyas capacidades son: traduce cantidades y expresiones numéricas – comunica su comprensión sobre los números y las operaciones – usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo – argumenta afirmaciones sobre relaciones numéricas y las operaciones.

Esta ha sido una tendencia mundial hasta apenas unos 5 años atrás, pero últimamente la enseñanza – aprendizaje de los números enteros y sus operaciones se está dando a partir del 5to. grado de primaria, en algunos casos, y otros a partir del 6to. grado, tal como está ocurriendo en algunos colegios privados de nuestro país.

A la fecha, por lo menos en nuestro país, no hay trabajos de investigación sobre los efectos de una enseñanza temprana en los últimos grados de primaria de la aritmética de los números enteros, lo que motivó el presente trabajo, pero ya existen textos de primaria en los que se trata los números enteros y sus operaciones aritméticas utilizando estrategias didácticas basadas únicamente en el método de los desplazamientos (el mismo que se usa en la secundaria) usando la recta numérica en la que se ubica un punto que se representa el cero a cuyo lado izquierdo van los números negativos a espacios de igual longitud y, a cuyo lado derecho van los números positivos a espacios de igual longitud. Sabemos que esta recta numérica de los enteros permite representar situaciones de la vida cotidiana como “tantos metros a la izquierda de”, “tantos metros a la derecha de”, “tantos metros arriba de”,

“tantos metros debajo de”, “tantos años antes de cristo”, “tantos años después de cristo”, etc. Definitivamente no hay trabajos, por lo menos en nuestro país, que evidencien los resultados favorables de la aplicación de esta estrategia en el nivel primario basada en la construcción de la recta numérica para posicionar los números enteros y realizar operaciones con desplazamientos a la derecha y/o a la izquierda del cero y, dar como resultado de la operación la posición que ocupa en la recta el ultimo desplazamiento.

Pero partiendo del hecho de que el uso de la recta numérica como estrategia didáctica en la secundaria no es muy efectiva hecho que se sabe hace mucho tiempo, es de imaginar que tampoco sea efectiva en la primaria; de allí que sea necesario alternar con otra estrategia mucho más sencillas en su manejo y su aplicación como es el modelo didáctico que se propone basado en rondanas cuyas caras están pintadas de 2 colores diferentes: naranja para la unidad positiva (+1) y celeste para la unidad negativa (-1), los mismo que al ser manipuladas por los escolares, realmente producen aprendizajes eficaces, tal como se ha podido comprobar al ser aplicado el modelo en un aula del 6to. grado de primaria, cuyos resultados de esta aplicación se dan en el Capítulo IV: Resultados.

Los resultados muy favorables hallados en un aula del 6to. grado de primaria concuerdan con lo manifestado por el investigador colombiano Castillo (2014), autor del trabajo ***Aprendiendo la adición y la sustracción de números enteros a través de objetos físicos***, quien manifiesta:

*Para que los niños logren entender el significado de los números enteros, además de su uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre acciones y vayan construyendo sus propios significados (p.77).*

El fundamento teórico e empírico en los que se basan los objetos físicos de aprendizaje (OFA) es que cuanto más sentidos participen en un aprendizaje estos serán más eficaces, favorables y duraderos en el tiempo. En efecto, a través del presente trabajo se ha podido verificar que hacer participar el sentido del tacto manipulando las rondanas bicolors, bajo reglas operativas determinadas, combinando con los otros sentidos, hace que este material diseñado para fines

educativos sean instrumentos motivadores que permiten al escolar de primaria captar y deducir propiedades operativas que no se pueden dar en la pizarra o en las tic; es decir permiten construir sus propios aprendizajes con un asesoramiento oportuno por parte del profesor o profesora.

Cabe comentar en lo que respecta a la secuencia seguida en esta investigación para la experimentación del modelo didáctico propuesto, referido a que primero debe darse la fase cualitativa, como una situación previa que conduce a conocimientos y conceptos iniciales para entender el concepto de número entero, y después la fase cuantitativa, fase en la que trata el tema de fondo las operaciones de adición y sustracción de números enteros incluido el planteamiento y solución de problemas sencillos; es una secuencia debidamente apropiada, pues se ha demostrado que la medición de los aprendizajes logrados en ambas fases tienen una alta correlación lineal significativa, en el orden de 0,82, con el 1% de significancia; esto quiere decir que a más aprendizajes logrados en la fase cualitativa mejores aprendizajes en la fase cuantitativa. Aunque cabe decir que se ha notado durante la experiencia que los escolares presentan dificultades de aprendizaje cuando se trata de números negativos y, peor aún, cuando se relacionan estos con los números positivos.

Otro detalle que se ha notado es que el signo “menos” (-) causa mucha confusión en los niños, pues en la aritmética de los números enteros se le utiliza con 3 propósitos distintos: Para indicar la negatividad de un número, para indicar el opuesto de un número y para indicar la sustracción de 2 números.

Una limitante durante la investigación ha sido de repente las pocas horas dedicadas a la experimentación, se programaron solo 7 sesiones de 2 horas cada una; quizás a mas sesiones se hubieran logrado mejores aprendizajes.

Otra limitante ha sido que al no estar programado en el plan de estudios el tratamiento de los números enteros en el 6to. grado de primaria, se tuvo que programar sesiones extras para no chocar con la programación oficial; esto ocasionaba alguna incompreensión por parte de los padres de familia.

En suma, se ha respondido favorablemente al problema de investigación a los objetivos e hipótesis planteadas. Sí es factible la enseñanza – aprendizaje de los números enteros, con sus operaciones de adición y sustracción en el 6to. grado de

la educación primaria.

## **CAPITULO VI**

### **CONCLUSIONES Y RECOMEDACIONES**

#### **6.1 CONCLUSIONES**

A partir de los resultados hallados y su respectiva discusión se ha arribado a las siguientes conclusiones:

- Se ha podido comprobar favorablemente los objetivos de la investigación; pues, se ha verificado que el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros en sus 2 principales operaciones, la adición y la sustracción, es realmente viable y efectiva porque,
  - a) Permite o ayuda a comprender el concepto de número entero y su relación con conceptos cotidianos de la cuantificación relativa como es: “tantas unidades a la izquierda o derecha de”, “tantas unidades arriba o por debajo de”, “tengo o debo tantas unidades monetarias”, “sobra o falta tantas unidades”, etc.
  - b) Ayuda a comprender la estructura lógica y propiedades de las reglas operativas de la adición y sustracción de los números enteros y sus aplicaciones a problemas sencillos cotidianos.
- Se ha logrado niveles de aprendizaje satisfactorios, ya que el porcentaje de escolares con “logros previstos” es 47,6% y el porcentaje con “logros destacados” es 33,3%, lo que arrojan más del 80% con un aprendizaje favorable.
- Hay una fuerte correlación con una significación del 1% en el orden de  $r=0,82$ , con un coeficiente de determinación del 67,2%, entre los aprendizajes de la Fase Cualitativa (Fase I) y la Fase Cuantitativa (Fase II). Esto quiere decir que a mayores aprendizajes en la Fase I mejores

aprendizajes en la Fase II.

- El nivel promedio de aprendizaje u se encuentra por encima del mínimo promedio del aprendizaje con logros previstos, tal como se ha podido constatar estadísticamente a través de un contraste de hipótesis para u con un 5% de significancia.
- Se ha comprobado, en analogía a otras investigaciones, que los modelos didácticos o estrategias didácticas basadas en la manipulación de objetos físicos, siguiendo pautas o reglas operativas, es realmente efectiva debido a que produce un efecto psicológico positivo para el aprendizaje.
- Entre los diversos problemas de aprendizaje que puede haber en el aprendizaje de la aritmética de los números enteros el más sobresaliente es el triple uso que se le da al signo “-” (menos). Un primer uso para simbolizar números negativos, un segundo uso para simbolizar el concepto “opuesto de un número” y un tercer uso para indicar una sustracción; tal como se ha podido verificar en la presente investigación. Este hecho causa profunda confusión en el escolar.
- En suma, sí es posible la enseñanza – aprendizaje temprano de la adición y sustracción de los números enteros, por sus resultados favorables, por lo menos en el 6to grado de primaria.

## **6.2 RECOMENDACIONES**

A partir de los resultados hallados, la exposición de la discusión y las conclusiones arribadas, se recomienda lo siguiente:

- Habiéndose experimentado el modelo didáctico propuesto en una sola aula del 6to grado de primaria, y aún así con resultados favorables, se recomienda replicar la experiencia en otras aulas ya sean del 5to o 6to grado.
- Aún cuando en el diseño curricular de la EBR los números enteros se deben enseñar y aprender el 1° y 2° grados de secundaria, se recomienda iniciarla más temprano en el 5to o 6to grado de primaria.

Está demostrado que los aprendizajes tempranos son más provechosos y duraderos en el tiempo.

- Habiéndose constatado que el triple uso que se le da al símbolo o signo “-” causa mucha confusión en el escolar que empieza con los números enteros, se recomienda lo siguiente:

- a) Para denotar un número entero negativo, escribir el signo “-” pequeño en la parte superior izquierda y no mencionar la palabra “menos”, en su lugar usar la palabra “negativo”.

Ej. Incorrecto:

$-5$  : *Menos cinco*

Ej. Correcto:

$-5$  : *Cinco negativo*

- b) Para denotar el opuesto de un número entero se recomienda usar el paréntesis y escribir el signo “-” a la altura media izquierda.

Ej:

$-(7) = -7$  : Opuesto de 7 positivo es 7 negativo

$-(-7) = 7$  : Opuesto de 7 negativo es 7 positivo

- c) Para denotar una resta común escribir el signo “-” de tamaño usual a la altura media del lado izquierdo del sustraendo.

Ej:

$27 - 30 = 27 + (-30) = -3$

## **CAPITULO VII**

### **FUENTES DE INFORMACIÓN**

#### **7.1 FUENTES BIBLIOGRÁFICAS**

Bernal, C. (2011). Introducción a los números enteros. Edit. Funes. México.

Chevallard, M. (1997). Evolución de la problemática didáctica. Barcelona. España.

Castelnuevo. E. (2009). Didáctica de la matemática moderna. Edit. Trillas. México.

Hernandez, R. (2014). Metodología de la investigación. Edic. McGrau Hill (6ta. Edición). México.

Gomes, R. y otros (1997). Matemática Moderna estructurada (tomo 2). Edit. Norma. Bogotá. Colombia.

Wills, D. y otros (1997). Matemática Moderna estructurada (tomo 3). Edit. Norma. Bogotá. Colombia.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Diseño curricular de EBR. Lima. Perú.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Perú.



Miranda, A. – Fortes, C. (2007). Dificultades del Aprendizaje de las matemáticas. Edit. Aljibe. España.

Nolasco, U. (2018). IBM-SPSS24. Edic. El artista informático. Lima. Perú.

Ojeda, E. (2018). Matemática 1, secundaria. Libro del área. Guía del docente. Edic. Corefo S.A.C. – Lima. Perú.

Ojeda, E. (2018). Matemática 1, secundaria. Libro de actividades. Edic. Corefo S.A.C. – Lima. Perú.

Valderrama, S. (2014). Pasos para elaborar proyectos de investigación científica. Edic. San Marcos. Lima. Perú.

## **7.2 ARTÍCULOS CIENTÍFICOS**

Bernal, C. (2011). Introducción a los números enteros. Los santos. Panamá.

Bonilla, D. – Parraguez, M. (2007). Construcción didáctica de los números enteros desde la teoría: los modos de pensamiento. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

Bustamante, E. (2015). El juego como estrategia didáctica en la enseñanza de los números enteros basados en aprendizajes significativos. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Castillo, C. (2004). Aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros a través de los objetivos físicos. Colombia.

Cid, E. (2013). La investigación didáctica sobre los números negativos. Universidad de Zaragoza. España.

Rojas, J. – Ariza, A. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de los números enteros. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. Colombia.

Vilchez, M. (2015). Números enteros. Universidad de Granada. España.

### 7.3 FUENTES ELECTRÓNICAS

Unidad Didáctica “Los Números Enteros”

[www.educa.jcyl.es/educacyl/cm/gallery/recursos\\_atica/.../enteros/index.html](http://www.educa.jcyl.es/educacyl/cm/gallery/recursos_atica/.../enteros/index.html)

Unidad Didáctica Introducción a los números enteros - funes

[funes.uniandes.edu.co/.../Bernal%2C\\_Carlos\\_\(2011\)\\_Unidad\\_Didáctica\\_..](http://funes.uniandes.edu.co/.../Bernal%2C_Carlos_(2011)_Unidad_Didáctica_..)

Didáctica de las matemáticas en Educación Primaria

<https://www.stodocu.com...>

Números enteros I – Educ.ar

<https://www.edu.ar/recursos/14977/números-enteros-i>

Números Enteros II – Secuencia didáctica

[https://cdn.educ.ar/dinámico/unidadhtml//obtenersitio?rec\\_id=15198](https://cdn.educ.ar/dinámico/unidadhtml//obtenersitio?rec_id=15198)

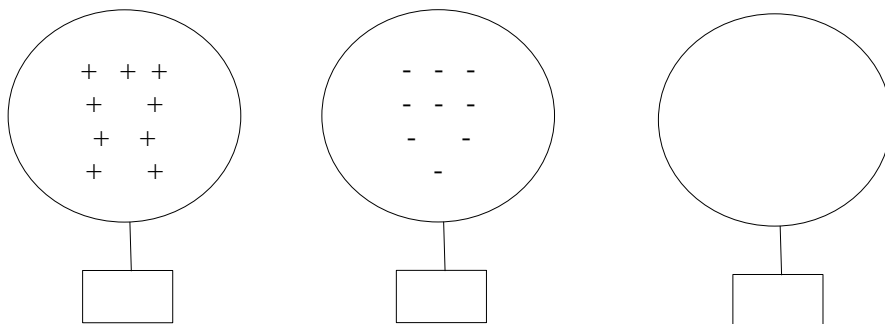
## **ANEXOS**

**ANEXO 01**  
**PRUEBA DE EVALUACIÓN PARA LA FASE I**  
**(FASE CUALITATIVA)**

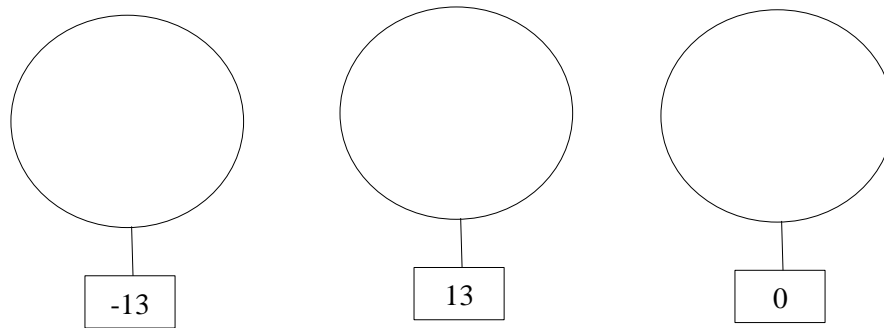
**1. Representa mediante las rondanas las siguientes situaciones.**

- a) Tengo 7 soles
- b) Debo 7 soles
- c) No debo ni tengo

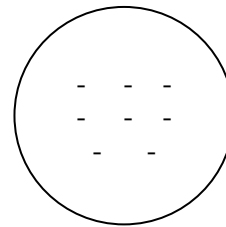
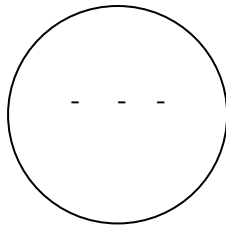
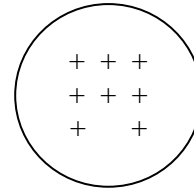
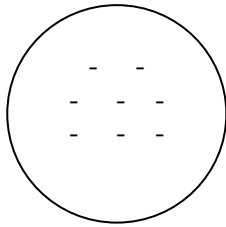
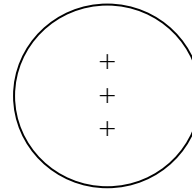
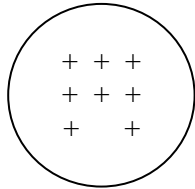
**2. Escribe en el recuadro el número entero que corresponde.**



**3. Dibuja las rondanas que corresponden a cada número entero que aparece en el recuadro.**



4. Al frente de la primera columna de la izquierda de rondanas se hallan otras rondanas. Une con línea cada rondana con su “opuesto” correspondiente.



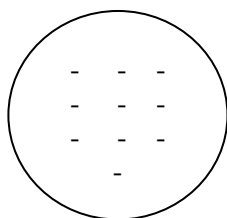
5. ¿A qué es igual las siguientes expresiones?

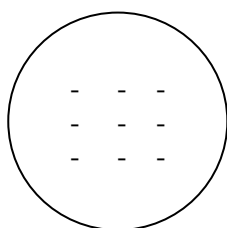
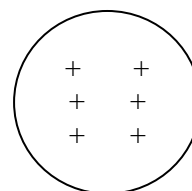
$$-(7) =$$

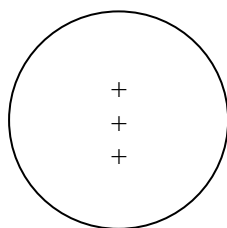
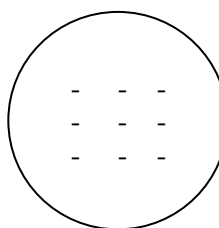
$$-(-12) =$$

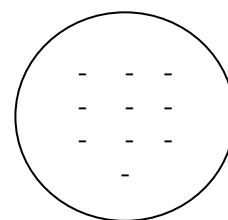
$$-(-(-25)) =$$

6. Escribe el signo < (menos) o el signo > (mayor) o el signo = (igual) en el recuadro correspondiente.









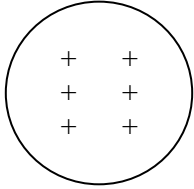
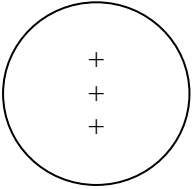
7. Escribe el signo < (menos) o el signo > (mayor) o el signo = (igual) en el recuadro correspondiente.

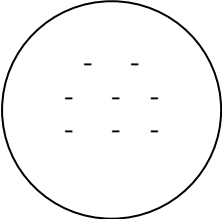
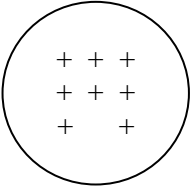
$$-17 \square - 17$$

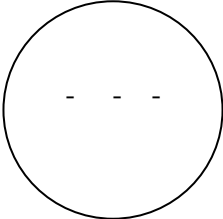
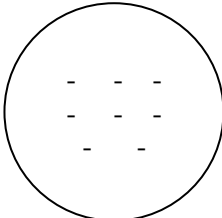
$$23 \square - 52$$

$$-45 \square - 21$$

8. Escribe el signo < (menos) o el signo > (mayor) o el signo = (igual) en el recuadro correspondiente.

-   

  - 

-   - 

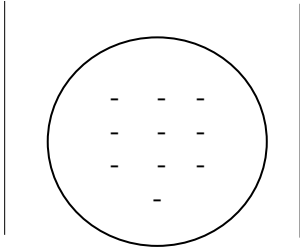
9. Escribe el signo < (menos) o el signo > (mayor) o el signo = (igual) en el recuadro correspondiente.

$$35 \square - (-35)$$

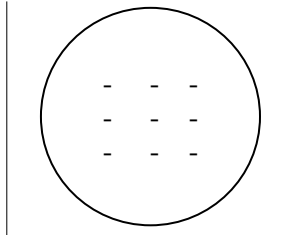
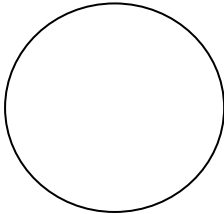
$$-(-87) \square - 92$$

$$-(-(-69)) \square - (-(-45))$$

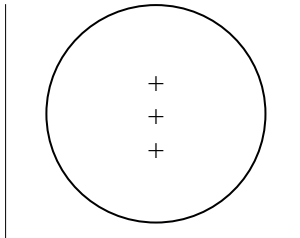
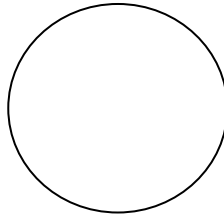
10. Dibuja en el lado derecho la cantidad de rondanas que corresponde al valor absoluto del lado izquierdo.



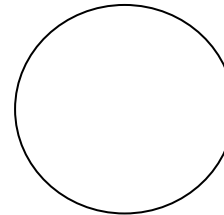
=



=



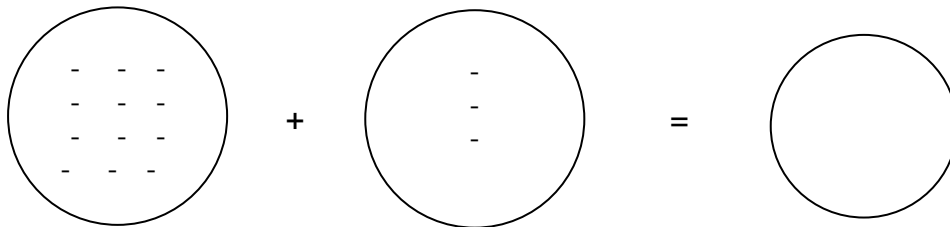
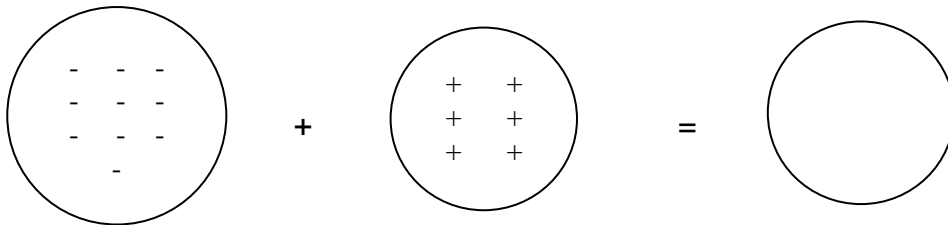
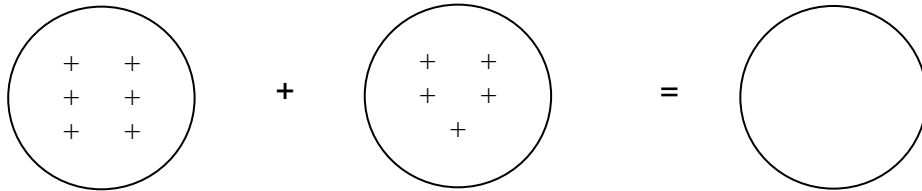
=





**ANEXO 02**  
**PRUEBA DE EVALUACIÓN PARA LA FASE II**  
**(FASE CUANTITATIVA)**

1. Dibuja las rondanas que faltan en el círculo del lado derecho.



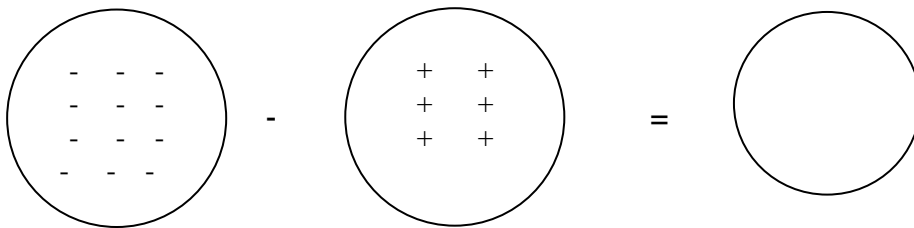
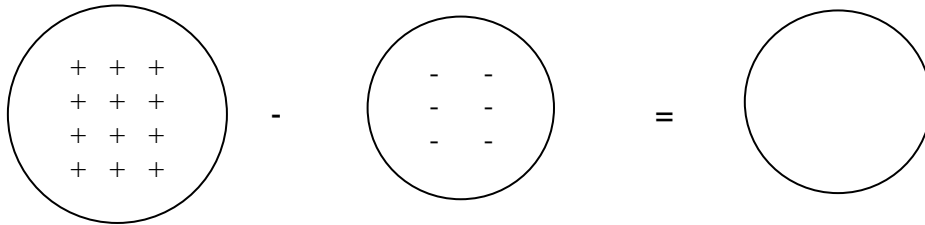
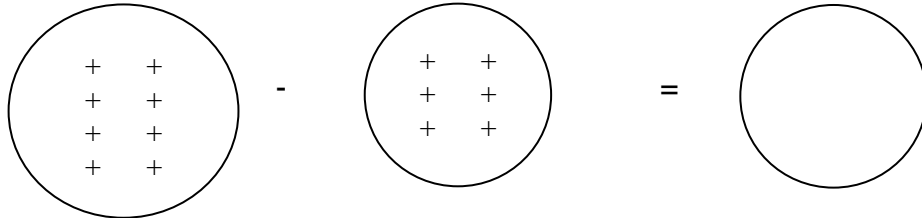
2. Escribe en el recuadro del lado derecho los resultados de cada suma.

$$-32 + (-10) = \square$$

$$38 + (-18) = \square$$

$$-10 + 70 + (-60) = \square$$

3. Dibuja las rondanas que faltan en el cuadro derecho después de realizar las siguientes restas.



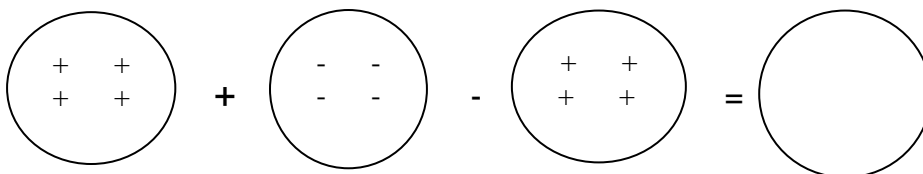
4. Escribe en el recuadro del lado derecho los resultados de cada resta.

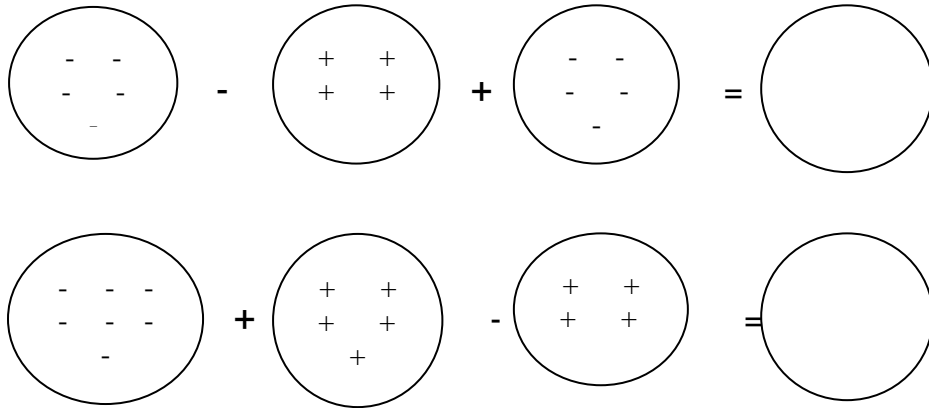
$$-32 + (-10) = \square$$

$$38 + (-18) = \square$$

$$-10 + 70 + (-60) = \square$$

5. ¿En qué consiste la asignación estadística de probabilidad?





6. Escribe en el recuadro del lado derecho los resultados de cada operación.

$$48 + 36 - 48 = \square$$

$$-36 - (-28) + 27 = \square$$

$$73 + (-50) - (-25) = \square$$

7. Escribe en el recuadro del lado derecho los resultados de cada operación.

$$100 + 50 - (30 + 15) = \square$$

$$-47 + [35 - (18 - 13)] = \square$$

$$[200 - (70 - 40)] - [-25 + (-25)] = \square$$

8. En una caja hay 50 bolos. El día lunes se sacó de la caja 25 bolos; el día martes se sacó 15 bolos y, el día miércoles se regresó a la caja 35 bolos.

Decir si es verdad (V) o falso (F) las siguientes aseveraciones.

El día lunes hay 25 bolos en la caja ( )

El día martes hay 15 bolos en la caja ( )

El día miércoles hay 45 bolos en la caja ( )

**9. Luis vive en un edificio que tiene 12 pisos y 2 sótanos (14 pisos en total). Luis vive en el 5to piso y guarda su carro en el primer sótano. Ana vive en el piso 11 del mismo edificio. Cierta día Luis bajó a limpiar su auto y luego subió a visitar a Ana.**

**Decir si es verdad (V) o falso (F) las siguientes aseveraciones.**

Ana vive 6 pisos por encima del piso de Luis ( )

Luis bajó 5 pisos para limpiar su auto ( )

Después de limpiar su auto, Luis recorrió 12 pisos para visitar a Ana ( )

**10. Juan trabaja cortando el pasto del vecino quien le paga S/. 50.00 por el trabajo. Recibe S/. 70.00 de su hermano por una deuda que le tenía y, también recibe una propina de S/. 100.00 por parte de su papá por sus buenas notas en el colegio. Después, Juan quiere comprar un par de zapatillas cuyo costo es S/.125.00 y un polo cuyo costo es S/.100.00.**

**Decir si es verdad (V) o falso (F) las siguientes aseveraciones.**

A Juan le sobra dinero para comprar la zapatilla y el polo ( )

A Juan no le sobra ni le falta dinero para comprar la zapatilla y el polo ( )

A Juan le falta 5 soles para comprar la zapatilla y el polo ( )

MATRIZ DE CONSISTENCIA

TITULO DE TESIS: PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA DE NÚMEROS ENTEROS EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	METODOLOGIA
<p><b>PROBLEMA GENERAL:</b></p> <p>¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria?</p> <p><b>PROBLEMAS ESPECÍFICOS:</b></p> <p>¿Cuánta efectividad tiene el modelo</p>	<p><b>OBJETIVO GENERAL:</b></p> <p>Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria.</p> <p><b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS:</b></p> <p>Comprobar la efectividad que tiene</p>	<p><b>HIPÓTESIS GENERAL</b></p> <p>El modelo didáctico que se propone es efectivo para el inicio del proceso de enseñanza – aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en el nivel primaria, en relación a otros modelos o estrategias tradicionales.</p> <p><b>HIPÓTESIS ESPECIFICAS</b></p>	<p><b>VARIABLE PRINCIPAL</b></p> <p>Nivel de aprendizaje alcanzado en el reconocimiento de números enteros y las operaciones de adición y sustracción</p> <p><b>VARIABLES SECUNDARIAS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en el reconocimiento de números enteros y su representación con ayuda del material didáctico (MD).</li> <li>- Nivel de aprendizaje logrado en la determinación del opuesto de un número entero, con ayuda del MD y,</li> </ul>	<p><b>TIPO DE INVESTIGACIÓN</b></p> <p>Es de tipo descriptivo y exploratorio con enfoque cuantitativo y transversal</p> <p><b>TIPO DE DISEÑO</b></p> <p>Tiene un diseño pre experimental. Para el recojo de información se utilizaron fichas de observación y pruebas de evaluación para evidenciar los aprendizajes</p>

<p>didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros en el nivel primaria?</p>	<p>el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros en el nivel primaria.</p>	<p>El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer comprender al escolar de primaria la naturaleza de los números enteros.</p>	<p>luego simbólica. - Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo del valor absoluto de un número entero, primero con ayuda del MD y, luego simbólicamente.</p>	<p><b>POBLACIÓN Y MUESTRA</b></p> <p>La población está constituida por todos los estudiantes del 6° grado de primaria</p>
<p>¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se propone para la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros en el nivel primaria?</p>	<p>Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros en el nivel primaria.</p>	<p>El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer comprender al escolar de primaria la estructura lógica operativa de adición de los números enteros y sus propiedades.</p>	<p>- Nivel de aprendizaje alcanzado en el cálculo de sumas de números enteros con ayuda del MD y, luego de manera simbólicamente. - Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo de restas con ayuda del MD y, luego de manera simbólica.</p>	<p>La muestra es de tipo intencional y está constituida por 25 estudiantes del 6° grado de primaria de la I.E. Horacio Zevallos Games</p>
<p>¿Cuánta efectividad tiene el modelo didáctico que se</p>	<p>Comprobar la efectividad que tiene el modelo didáctico propuesto para el</p>	<p>El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer</p>	<p>luego simbólicamente. - Nivel de aprendizaje logrado en el cálculo de sumas y restas combinadas con signos de colección</p>	<p>N°21544 de la Villa – Sayán.</p>

<p>propone para el planteamiento y solución de problemas con números enteros en el nivel primaria?</p>	<p>planteamiento y solución de problemas con números enteros en el nivel primaria.</p>	<p>comprender al escolar de primaria la estructura lógica operativa de la sustracción de números enteros y sus propiedades.</p> <p>El modelo didáctico que se propone es efectivo para hacer representar, formular y resolver problemas sencillos con números enteros.</p>	<p>con ayuda del MD y, luego de manera simbólica.</p> <p>- Nivel de aprendizaje alcanzado en el planteamiento y solución de problemas sencillos con ayuda del MD.</p>	
--	--	--	---	--

## **MIEMBROS DEL JURADO EVALUADOR**

---

Dra. LIDIA ALANYA SACCSA  
PRESIDENTE

---

Mg. FELIPA HINMER HILEM APOLINARIO RIVERA  
SECRETARIO

---

Mg. REGULO CONDE CURIÑAUPA  
VOCAL

---

Mg. NILO TELLO PANDAL.  
ASESOR