

**UNIVERSIDAD NACIONAL
JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN**



FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA Y METALÚRGICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO QUÍMICO

**MODELIZACIÓN DE LA DIFUSIÓN MOLECULAR TRANSITORIA
EN EL SECADO DE UN SISTEMA**

AUTOR

LIZ ALMENDRA MILLA VEGA

ASESOR

Ing. ISRAEL NARVASTA TORRES

CIP 146766

HUACHO, PERÚ

2019

**MODELIZACIÓN DE LA DIFUSIÓN MOLECULAR TRANSITORIA
EN EL SECADO DE UN SISTEMA**




**DR. BERARDO BEDER RUIZ SANCHEZ
PRESIDENTE**



**M(O). VICTOR RAUL COCA RAMIREZ
SECRETARIO**



**ING. EDELMIRA TORRES CORCINO
VOCAL**



**ING. ISRAEL NARVASTA TORRES
ASESOR**

DEDICATORIA

A mis padres, que son las personas más importantes en mi vida, por quienes día a día persisto en alcanzar cada meta trazada.

AGRADECIMIENTO

A Dios; por haberme dado una segunda oportunidad de vida, donde me ha permitido llegar hasta este momento tan importante de mi formación profesional. Por la fortaleza, por guiar mi camino.

A mi abuela, que siempre confió en mí, aunque ahora no este físicamente, fue mi motor y motivo para lograr una de mis metas.

A mis padres: Viviana y Florentino; por su amor, trabajo, sacrificio durante todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.

A mis hermanos: Vanessa y Rodolfo, por su apoyo incondicional.

A Karina una gran amiga, compañera de vida.

En el camino encuentras personas que iluminan tu vida, que con su apoyo alcanzas tus metas de mejor forma y con mejores decisiones; gracias a sus consejos, a su amor y paciencia, motivo por el cual, agradezco por la ayuda a concluir esta meta.

Lista de símbolos:

De coeficiente de difusividad eficaz (m^2/s)

D0 Factor de pre-exponencial de la ecuación de Arrhenius (m^2/s)

Ea: Energía de activación (kJ/mol)

l: espesor promedio de la rodaja (m)

w (0): Humedad inicial del producto (kg H₂O/kg producto húmedo)

w(s), w(e): Humedad de equilibrio del producto (kg H₂O/kg materia húmeda)

w(x,t): Humedad del producto a tiempo t y en el punto x (kg H₂O / kg materia húmeda)

w(x,t)b.s: Humedad del producto en base seca a tiempo t y en el punto x (kg H₂O/kg producto seco)

erf(n): función error

n: valor de la erf(n), se lee en tabla de la función error.

∇ : gradiente ($\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$)

Resumen

El presente estudio, el proceso de difusión del agua durante el secado de rodajas de manzana, experimentalmente se obtuvo el comportamiento del proceso de secado a 45°C y a 55°C; teóricamente se utilizó el modelo de Grank para resolver la ecuación de la segunda ley de Fick de la difusión, se encontró que el modelo matemático simplificado de Grank si es eficaz para calcular la difusión; sin embargo a medida que la humedad disminuye el proceso se hace más lento y entre el 20% y 16% pierde su eficacia, probablemente porque la resistencia del tejido del material se hace más resistente a la difusión. Se concluye que el modelo teórico es eficaz para casos como el del presente estudio.

Palabras Clave: Humedad, difusividad, rodaja, secado, deshidratado

Summary

The present study, the process of diffusion of water during the drying of apple slices, experimentally obtained the behavior of the drying process at 45 ° C and 55 ° C; theoretically the Grank model was used to solve the equation of the second law of Fick of the diffusion, it was found that the simplified mathematical model of Grank if it is effective to calculate the diffusion; However, as the humidity decreases, the process slows down and between 20% and 16% loses its effectiveness, probably because the resistance of the fabric of the material becomes more resistant to diffusion. It is concluded that the theoretical model is effective for cases like the one in the present study.

Keywords: Moisture, Diffusivity, slice, dried, dehydrated

ÍNDICE

DEDICATORIA.....	iii
AGRADECIMIENTO.....	iv
Lista de símbolos:	v
Resumen	vi
ÍNDICE.....	vii
INDICE DE TABLA.....	ix
INDICE DE FIGURAS	x
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO I: GENERALIDADES	13
1.1. Antecedentes del secado	13
1.2. Planteamiento y formulación del problema	16
1.2.1. Planteamiento del problema	16
1.3. Objetivos	17
1.3.1. Objetivo general:	17
1.3.2. Objetivos específicos	17
1.4. Importancia y justificación de la investigación	17
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	18
2.1. Sistema de secado.....	18
CAPÍTULO III: MATERIALES Y MÉTODOS	31

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	38
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	47
CAPITULO VI: REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	48

INDICE DE TABLA

Tabla 1: definiciones de cada término de la ecuación (0).....	19
Tabla 2: Ecuaciones de difusión en estado no estacionario para distintas geometrías considerando gradiente de concentración sólo en $-x$ ó $-r$	27
Tabla 3: Parámetros iniciales de manzana Golden Delicious.	33
Tabla 4: Influencia de T sobre la Difusividad de la manzana	39
Tabla 5: Cálculo con el modelo teórico de la humedad de las rodajas de manzana en base seca a diferentes tiempos de exposición al secado a 45°C.....	40
Tabla 6: Cálculo con el modelo teórico de la humedad de las rodajas de manzana en base seca a diferentes tiempos de exposición al secado a 55°C.....	40
Tabla 7: Obtención experimental de la humedad de rodajas de manzana a 45°C a diferentes tiempos.	42
Tabla 8: Obtención experimental de la humedad de rodajas de manzana a 55°C a diferentes tiempos.	43
Tabla 9: Humedades en base seca teórico y experimental a 45°C a diferentes tiempos. ...	44

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Balance de masa en un volumen de control.....	19
Figura 2: esquema de difusión en pared estancada	27
Figura 3: Gráfico de la disminución de la concentración volátil con el tiempo a lo largo de un espesor Z. (Geankoplis, C. J. , 2006).	29
Figura 4: Comportamiento grafico de la función error, (Welty, J., 2010).....	30
Figura 5: Imagen del árbol de manzana Golden Delicious.(Google, 2014)	31
Figura 6: Imagen del árbol de manzana Golden Delicious, (Benitez Celia, 2012)......	32
Figura 7: Comportamiento gráfico del Ln de la difusividad del agua en la manzana en función de $(1/T) K^{-1}$	39
Figura 8: Curva de secado Teórico de la manzana a 45°C	41
Figura 9: Curva de Teórico de rodajas de manzana a 55°C	41
Figura 10: Curva secado experimental de rodajas de manzana a 45°C.	42
Figura 11: Curva de Secado experimental de rodajas de manzana a 55°C.	43
Figura 12: Curva de secado de rodajas de manzana a 45°C procedimiento experimental y teórico.....	45

INTRODUCCIÓN

En el presente estudio se abordó la deducción, el planteamiento y la solución de un modelo matemático para pronosticar los niveles de humedad con el tiempo y la temperatura. La validez del modelo empleado se realiza mediante análisis comparativo con resultados experimentales con las mismas materias primas.

Se encontró que el modelo de Grank, es eficaz para pronosticar la difusión de la humedad en rodajas de manzana, sin embargo, el proceso es lento y no permite obtener información a concentraciones de agua a partir del 20% de humedad del sólido. La difusividad efectiva es influenciada por la temperatura y el modelo que lo simula es el modelo de Arrhenius, a mayor temperatura mayor difusividad y consecuentemente mayor difusión.

Las curvas de secado mostraron que a mayor temperatura la rapidez de secado es más grande que a menores temperaturas y a altos tiempos la velocidad de secado se hace más lenta.

El estudio se realizó en seis capítulos, en el primer capítulo se estudiaron las generalidades del estudio, para conocer aspectos históricos del secado, se realizó una breve revisión de esta operación unitaria para incorporar algunos conceptos a utilizar; también se definió el problema a abordar, los objetivos que se buscan con el estudio y la importancia del mismo.

El segundo capítulo consiste en definir el marco teórico del estudio, centrado fundamentalmente en la deducción del fenómeno difusivo desde las ecuaciones de continuidad correspondientes, se obtiene el modelo simplificado, se plantea la solución matemática respectiva.

El tercer capítulo consiste en la aplicación del modelo del capítulo anterior a un caso particular que es el secado de rodajas de manzana utilizando el modelo de Grank, se construye curvas de secado para diferentes tiempos a las temperaturas de 45°C y 55°C. También se realizan experimentos de secado de rodajas de manzana a 45°C y a 55°C. Se

establece la validación de los resultados del método teórico mediante la comparación con los resultados experimentales correspondientes. Así mismo se determina la influencia de la temperatura en el coeficiente de difusión del agua en la manzana.

En el Cuarto capítulo se presentan las conclusiones del estudio que establece que el secado difusivo de la manzana mediante el modelo de Grank es eficaz, sin embargo, es muy lento y más aun a tiempos prolongados.

CAPÍTULO I: GENERALIDADES

1.1. Antecedentes del secado

El secado es una de las técnicas más antiguamente utilizadas para la conservación de alimentos desde los principios de la humanidad ya que proporciona al hombre una posibilidad de subsistencia en épocas de carencia. (Fito Pedro et al, 2001). El secado se define como la remoción de humedad de un material mediante la transferencia simultánea de calor y masa. Consiste en separar pequeñas cantidades de agua hasta que esta llegue a un valor aceptablemente bajo, es una de las etapas finales de una serie de operaciones, (McCABE, W.; SMITH, J., 1956). En el contenido total de agua en un alimento, no todas las moléculas se encuentran interaccionando con la misma intensidad con el sólido, una parte es fuertemente retenida, en el proceso de secado el agua se encuentra contenida de 2 maneras: agua libre y ligada. La cantidad y manera en la que es removida el agua cambia la estructura y depende de la unión que tenga, así como también determinan las características de reconstitución. Durante el secado primeramente es removida el agua libre, ésta no cambia las propiedades del sólido durante el secado y después es removida el agua ligada, aunque remover uniones más fuertes requiere la utilización de grandes cantidades de energía. En los alimentos al reducir el contenido de humedad se previene el crecimiento de microorganismos y se minimizan las demás reacciones de deterioro. Por otra parte, se reducen su volumen y su peso, lo cual reduce los costos de empaque y transporte, además el almacenamiento puede ser a temperatura ambiente por largos períodos de tiempo. (CEUPE, 2014).

Las consideraciones fundamentales que intervienen en el proceso de secado son las siguientes: Contenido de humedad. Expresa la masa de agua por unidad de masa de sólidos secos. Contenido de humedad en el equilibrio, Cuando se seca un sólido, este

primeramente cambia de estado sus moléculas, pasando de un estado líquido a vapor de agua, formando una mezcla entre este y el aire. Al mismo tiempo ocurre una adsorción del vapor de agua en la superficie del sólido humedeciéndolo. Llegado a un tiempo, el número de moléculas que cambian a estado gaseoso es el mismo que se adsorbe en la superficie del sólido alcanzando un equilibrio entre este y el aire que lo rodea (Geankoplis, C. J. , 2006). La humedad en este momento de equilibrio recibe el nombre de contenido de humedad en el equilibrio, y es dependiente tanto de la temperatura, así como también de la variación del contenido de humedad del producto, (Geankoplis, C. J. , 2006). Isotermas de sorción. El efecto de todo proceso donde se encuentre involucradas moléculas de agua combinadas reversiblemente con los alimentos sólidos se le llaman isotermas de sorción. (Treybal, Robert E. , 1968). El contenido de humedad de equilibrio depende de la dirección en que éste vaya, ya sea que un sólido húmedo se seque por desorción o que en un sólido seco se lleve a cabo el fenómeno de adsorción. El método utilizado para ver el comportamiento de los fenómenos de desorción y adsorción se utilizan las isotermas de sorción. Las isotermas de sorción comprenden adsorción física, condensación capilar y formación de líquidos y solución de sólidos. (Treybal, Robert E. , 1968).

En la operación de Secado se distinguen 3 etapas fundamentales, que describen la manera en que el proceso se lleva a cabo en una relación de contenido de humedad respecto al tiempo. La primera etapa llamada periodo de inducción correspondiente a la fase A consiste en que el producto sea calentado y aumente su temperatura de interface, esto conlleva a que se produzca una adaptación del material a las condiciones de secado. Su duración estará en función del contenido inicial de humedad del sólido, temperatura, velocidad de aire, etc. (Fito Pedro et al, 2001) . La segunda etapa correspondiente a la fase B, se refiere a la eliminación de agua de la

superficie del sólido que tiene una velocidad menor que la del agua en el interior del sólido. Esta etapa es también llamada periodo de velocidad de secado constante, ya que la superficie del material se mantiene constantemente húmeda. (Fito Pedro et al, 2001). La rapidez de secado será igual a la de evaporación de agua y proporcional a la velocidad de flujo de calor que va desde el aire al sólido, su temperatura se mantendrá constante. Por último, pasa la etapa de velocidad de secado decreciente, donde la humedad del sólido disminuye hasta alcanzar el equilibrio. (Fito Pedro et al, 2001).

En el proceso de secado, la transferencia de calor y la transferencia de masa, dadas a su vez simultáneamente, se presentan por 2 razones principales: Transferencia de calor. Primeramente, la transferencia de calor es la consecuente de aportar la energía necesaria para que exista una transformación del agua en vapor, la segunda es responsable de la transferencia que hay entre la masa de vapor que se encuentra dentro y en la superficie del sólido. El calor suministrado por el aire provoca que el sólido que se está secando tenga un aumento de temperatura. En el caso de secado de alimentos se recomienda despreciar la transferencia de calor por radiación hacia la superficie sólida, así como también suponer que no existe transferencia de calor por conducción en las bandejas o superficies metálicas, sino únicamente por convección (Geankoplis, C. J. , 2006).

1.2. Planteamiento y formulación del problema

1.2.1. Planteamiento del problema

En ingeniería química, algunas operaciones de deshidratación ocurren en estados no estacionarios, sobre todo al tratarse de sólidos y líquidos, como es el caso de secado de ají, de frutas, hojas, etc. Para realizar un modelo de cálculo de esta naturaleza, existen diversas maneras de alcanzarlo, depende de la simplicidad como se aborde el tema y de la herramienta de cálculo a utilizar.

No obstante, actualmente existen programas que facilitan el proceso de análisis de los parámetros de diseño ya que permiten conocer cuál sería la incidencia en el resultado global si se afectara una o más variables. Sin embargo, esa disponibilidad no subsana el conocimiento de la operación misma, de la incidencia fundamentada de las variables en la funcionalidad del equipo y el control de la operación.

El problema es que la materia es altamente sensible a la temperatura y al tiempo de exposición en la operación de deshidratación, de allí la necesidad de formular un modelo que permita calcular estos parámetros con precisión.

Problema General:

¿Cuál es el modelo de difusión molecular transitoria en el secado de un sistema?

Problemas específicos:

- a. ¿Cuál es la forma y dimensiones del sistema de análisis?
- b. ¿Cuáles son los parámetros de análisis del sistema?
- c. ¿Cuáles son los modelos convencionales para la difusión transitoria de la humedad en el sistema?
- d. ¿Cuál es el modelo que reporta mayor eficiencia para el caso estudio?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general:

Estudiar el modelo de difusión molecular transitoria en el secado de un sistema.

1.3.2. Objetivos específicos

- a. Definir el sistema de análisis.
- b. Definir los parámetros de análisis del sistema.
- c. Conocer los modelos convencionales para la difusión transitoria de la humedad en un sistema.
- d. Obtener el modelo que reporta mayor eficiencia para el caso estudio

1.4. Importancia y justificación de la investigación

El presente estudio se justifica principalmente por la importancia que tiene determinar un modelo que permita calcular los tiempos de exposición a las condiciones de deshidratación de un sistema específico. En la óptica académica y profesional, es importante, porque permite comprender y desarrollar fundamentos teóricos de difusión de estos sistemas para así obtener el modelo que controla el sistema.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Sistema de secado

La unidad operativa consiste en un conjunto de equipos, cuyo objetivo principal es separar el agua de un sólido útil en base a su capacidad de difusión del agua y de la porosidad del sólido.

La estructura del sistema de secado:

Se trabajará para un sistema cuadrangular semiinfinito con humedad determinada inmersa en una atmosfera con características conocidas, tanto en temperaturas como en contenido de agua.

Ecuación de continuidad para una determinada especie. (Welty, J., 2010), (Geankoplis, C. J. , 2006), (Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. , 2006).

Esta ecuación se establece mediante un balance de masa en un volumen de control diferencial, del siguiente modo:

La figura que sigue representa un elemento diferencial de volumen fijo en el espacio ($\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$) a través del cual fluye por convección una mezcla binaria de A y B y por reacción química, se produce A con una velocidad r_A ($\text{g}/\text{cm}^3\text{s}$).

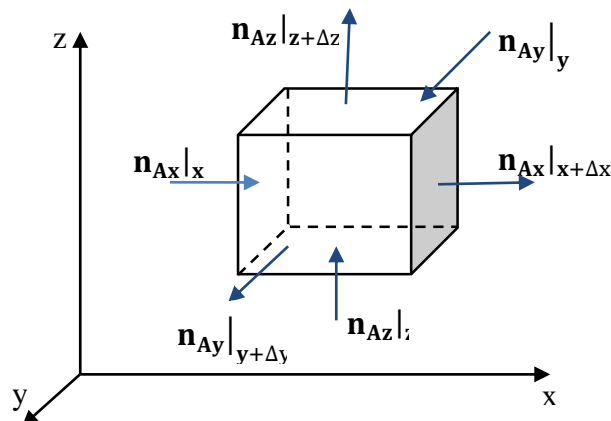


Figura 1: Balance de masa en un volumen de control

El principio de conservación de masa para la especie A, en un diferencial de tiempo (dt) establece:

$$\begin{array}{l}
 \text{Velocidad de acumulación de masa A en el diferencial de volumen } \Delta x \Delta y \Delta z \\
 = \\
 \text{Velocidad de entrada de masa A al volumen a través de las superficies } dS = \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta z = \Delta y \Delta z \\
 - \\
 \text{Velocidad de salida de masa A del volumen a través de las superficies } dS = \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta z = \Delta y \Delta z \\
 + \\
 \text{Velocidad de producción de masa A por reacción química en el volumen } \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{array} \quad (0)$$

Esta expresión se traduce matemáticamente en la siguiente tabla:

Tabla 1: definiciones de cada término de la ecuación (0)

Velocidad de acumulación de masa A en el volumen	Dirección del flujo de masa A	Flujo de masa A que entra al volumen	Flujo de masa A que sale del volumen	Velocidad de producción de masa A en el volumen
$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$	x	$\mathbf{n}_{Ax} _x \Delta y \Delta z$	$\mathbf{n}_{Ax} _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$	$r_A \Delta x \Delta y \Delta z$
	y	$\mathbf{n}_{Ay} _y \Delta x \Delta z$	$\mathbf{n}_{Ay} _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$	
	z	$\mathbf{n}_{Az} _z \Delta x \Delta y$	$\mathbf{n}_{Az} _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$	
	x	$\mathbf{n}_{Ax} _x \Delta y \Delta z$	$\mathbf{n}_{Ax} _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$	

Por tanto, de acuerdo al principio de conservación de la masa, ecuación (0), para la especie A, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = & [\mathbf{n}_{Ax}|_x - \mathbf{n}_{Ax}|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [\mathbf{n}_{Ay}|_y - \mathbf{n}_{Ay}|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z + \\
 & [\mathbf{n}_{Az}|_z - \mathbf{n}_{Az}|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y + r_A \Delta x \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \quad (1)$$

Y al dividir esta expresión por $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = \frac{\mathbf{n}_{Ax}|_x - \mathbf{n}_{Ax}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{n}_{Ay}|_y - \mathbf{n}_{Ay}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{\mathbf{n}_{Az}|_z - \mathbf{n}_{Az}|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + r_A \quad (2)$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{n}_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{n}_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{n}_{Az}}{\partial z} \right) + r_A \quad (3)$$

Este balance describe la variación de la concentración másica de A con el tiempo para una mezcla binaria y para un punto fijo en el espacio. Tal variación se produce por transporte de A (difusivo y convectivo) y por reacción química. Esta ecuación puede escribirse en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{n}_A + r_A \quad (4)$$

Análogamente, para el componente B de la mezcla, se tiene:

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{n}_B + r_B \quad (5)$$

Al sumar los balances de ambos componentes:

$$\frac{\partial (\rho_A + \rho_B)}{\partial t} = - \nabla \cdot (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) + (r_A + r_B) \quad (6)$$

Recordando que:

$$\rho_A + \rho_B = \rho \quad (7a)$$

$$\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B = \rho \mathbf{v} \quad (7b)$$

Reemplazando las tres últimas en (6), se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (8)$$

Esta es la ecuación de continuidad para la mezcla en base másica y es idéntica a la de un fluido puro. Si la mezcla es incompresible ($\rho = \text{constante}$):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

El mismo balance puede obtenerse en términos molares:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{N}_A + R_A \quad (10a)$$

$$\frac{\partial C_B}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{N}_B + R_B \quad (10b)$$

Sumándolos:

$$\frac{\partial (C_A + C_B)}{\partial t} = - \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + (R_A + R_B) \quad (11)$$

Recordando que:

$$C_A + C_B = \rho \quad (12a)$$

$$\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = \rho \mathbf{v}^* \quad (12b)$$

En general, se cumplirá que $R_A + R_B \neq 0$; excepto cuando se produzca 1 mol de A por cada mol de B que desaparece.

Para mezclas de concentración global constante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \nabla \cdot C \mathbf{v}^* + (R_A + R_B) \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{C} (R_A + R_B) \quad (14)$$

Puede verse que para mezclas de densidad molar constante el gradiente de velocidad en base molar no necesariamente es igual a cero.

Cuando se desean obtener los perfiles de concentración es necesario reemplazar \mathbf{n}_A o \mathbf{N}_A por la primera ley de Fick, por lo tanto:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\nabla \cdot \omega_A (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) + \nabla \cdot \rho D_{AB} \nabla \omega_A + r_A \quad (15)$$

Recordando que:

$$(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) = \rho \mathbf{v}$$

$$\rho_A = \omega_A \rho$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_A \mathbf{v} = \nabla \cdot \rho D_{AB} \nabla \omega_A + r_A \quad (16)$$

En términos molares:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla \cdot x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + \nabla \cdot C D_{AB} \nabla x_A + R_A \quad (17)$$

Recordando que:

$$(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) = C \mathbf{v}^*$$

$$C_A = x_A C$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla \cdot C_A \mathbf{v}^* = \nabla \cdot C D_{AB} \nabla x_A + R_A \quad (18)$$

COMENTARIOS

- Estas expresiones del balance microscópico de masa (ecuaciones de continuidad) son válidas para describir perfiles de concentración en sistemas con movimiento por convección forzada y/o difusivo ordinario.
- La única restricción es que sea en ausencia de gradientes de temperatura, presión, campo eléctrico, magnético o gravitacional.

Cuando ρ Y D_{AB} son constantes:

En este caso, el balance se transforma en:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_A \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A \quad (19)$$

Al aplicar a esta expresión las consideraciones siguientes:

- Si en el sistema fluido la densidad global ρ es constante $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, esto es propio de los líquidos.
- Que la densidad global ρ sea constante, no implica que las concentraciones másicas individuales ρ_A y ρ_B también lo sean.
- Al dividirla por M_A el peso molecular de A, se obtiene:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A \quad (20)$$

APLICACIÓN:

Esta ecuación se utiliza generalmente para estudiar la difusión en soluciones líquidas diluidas a temperatura y presión constantes.

Cuando c y D_{AB} son constantes:

Al resolver la divergencia del producto $\nabla \cdot C_A \mathbf{v}^*$. La ecuación de balance (18) se transforma en:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + C_A \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A \quad (21)$$

De acuerdo a la ecuación (14), $\nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{C}(R_A + R_B)$, entonces:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A - \frac{C_A}{C}(R_A + R_B) \quad (22)$$

APLICACIÓN:

Esta ecuación se utiliza generalmente para gases a baja presión, a presión y temperatura constantes.

Cuando la velocidad de reacción cero

- Si en el sistema en estudio no se presentan ni reacción química ($r_A = r_B = 0$) ni movimiento convectivo ($\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = 0$), entonces la ecuación anterior se convierte en la expresión de la segunda ley de Fick o Ley de la difusión:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 C_A \quad (23)$$

- a. Las ecuaciones que están expresadas en notación vectorial, son válidas en cualquier sistema ortogonal de coordenadas. En la Tabla N° 4.2, se muestran las expresiones completas para los tres sistemas de coordenadas del balance parcial microscópico de masa en función de \mathbf{N}_A y para el caso particular en que ρ y D_{AB} son constantes.

La ecuación de continuidad en sistemas coordenados

$$\text{Rectangulares: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial N_{AX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{AY}}{\partial y} + \frac{\partial N_{AZ}}{\partial z} \right) = R_A$$

$$\text{Cilíndricas: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_{Ar}) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{A\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A$$

$$\text{Esféricas: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_{Ar}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{A\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_{A\phi}}{\partial \phi} \right) = R_A$$

La ecuación de continuidad de A para ρ y D_{AB} constantes:

$$\text{Rectangulares: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + V_z \frac{\partial C_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

$$\text{Cilíndricas: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(V_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial C_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

$$\text{Esféricas: } \frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(V_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + V_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial C_A}{\partial \phi} \right) = D_{AB} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \phi^2} \right) = R_A$$

Ecuación de continuidad para sistemas de varios componentes en función de las densidades de flujo

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{J}_i) + r_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Sumando todos los componentes: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\bar{\nabla} \cdot \rho \bar{V}) = 0$$

Ecuación de movimiento:

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -[\bar{\nabla} \cdot \bar{\pi}] + \sum_{i=1}^n \rho_i \bar{g}_i \quad \bar{\pi} = \bar{\tau} + P\bar{\delta}$$

Ecuación de energía:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left\{ \hat{U} + \frac{1}{2} V^2 \right\} = -(\bar{\nabla} \cdot \bar{q}) - (\bar{\nabla} \cdot [\bar{\pi} \cdot \bar{V}]) + \sum_{i=1}^n (\bar{n}_i \cdot \bar{g}_i)$$

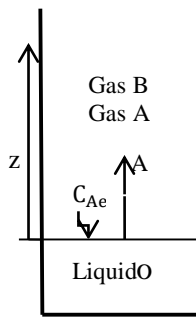
Otras ecuaciones necesarias para describir el sistema:

- Ecuación de estado: $\rho = \rho(\rho, T, x_i)$
- Ecuación termica de estado: $\hat{U} = \hat{U}(\rho, T, x_i)$
- Expresiones para las densidades de flujo: j_i, π, q
- Propiedades de transporte: $\mu, k, D_{AB} = f(P, T, x_i)$
- Cinética de las reacciones: r_i
- Campos de fuerza: g_i

Difusión simple en régimen no estacionario (Welty, J., 2010), (Geankoplis, C. J. , 2006), (Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. , 2006).

Sistema semi-infinito

Difusión de un solo componente en el seno de un material estacionario. Condiciones constantes en uno de los límites del sistema (concentración superficial fija). Por ejemplo, podría desearse describir la absorción de oxígeno del aire en la oxigenación de un lago o también la evaporación de un líquido A en el seno de un vapor estanco B. Para este caso se tiene el siguiente esquema:



HIPÓTESIS

- Estado No estacionario, entonces, $\frac{\partial C_A}{\partial t} \neq 0$
- Presión y temperaturas constantes, por lo tanto, $D_{AB} = \text{constante}$.
- Mezcla gaseosa ideal
- B insoluble en A
- Nivel de líquido constante.
- No existe reacción química
- No existe movimientos convectivos
- Difusión unidireccional.

Figura 2: esquema de difusión en pared estancada

El modelo matemático que representa este fenómeno, se obtiene del siguiente modo:

1. Ecuación de continuidad en coordenadas rectangulares

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A \quad (24)$$

- La aplicación de las hipótesis a la ecuación anterior la reduce a:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) \quad (25)$$

Tabla 2: Ecuaciones de difusión en estado no estacionario para distintas geometrías considerando gradiente de concentración sólo en -x ó -r

Sólido	Ecuación
Placa plana	$\frac{d[A]}{dt} = D_{AB} \frac{d^2[A]}{dx^2}$
Cilindro	$\frac{d[A]}{dt} = \frac{D_{AB}}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d[A]}{dr} \right)$
Esfera	$\frac{d[A]}{dt} = \frac{D_{AB}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d[A]}{dr} \right)$

Para resolver cualquiera de estas ecuaciones se necesitan dos ecuaciones de borde y las condiciones iniciales.

2. Condiciones iniciales y de contorno.

- Condición inicial

$$\text{Para } t = 0 \quad C_A = C_{A0} \quad \text{para todo } z > 0 \quad (C1)$$

- Condiciones de contorno.

$$\text{A } z = 0 \quad C_A = C_{Ae} \quad \text{para } t > 0 \quad (C2)$$

$$\text{A } z \rightarrow \infty \quad C_A = C_{A0} \quad \text{para } t > 0 \quad (C3)$$

- Observación: $C_{Ae} > C_{A0}$

3. Solución de ecuación (B), con sus condiciones del ítem (3):

$$C_A = C_1 \operatorname{erf} \eta + C_2 \quad (D)$$

- Tomando en cuenta lo indicado de la función de error en el problema anterior, las condiciones límite de la ecuación (D), son:

$$\text{Cuando } t \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{erf} \eta = 1 \quad (E)$$

$$\text{Cuando } z = 0 \Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow \operatorname{erf} \eta = 0 \quad (F)$$

- Con E) y (F) en (D), se tiene:

$$\begin{cases} C_{A0} = C_1 + C_2 \\ C_{Ae} = C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_{A0} - C_{Ae}$$

Por lo tanto, ecuación (D), resulta:

$$C_A = (C_{A0} - C_{Ae}) \operatorname{erf} \left| \frac{z}{\sqrt{4D_{AB} t}} \right| + C_{Ae} \quad (G)$$

Ó:

$$\frac{C_A - C_{Ae}}{C_{A0} - C_{Ae}} = \operatorname{erf} \left| \frac{z}{\sqrt{4D_{AB} t}} \right| \quad (H)$$

Estas dos últimas ecuaciones proporcionan el perfil de concentraciones de A en función del tiempo. En la figura que sigue se presenta el gráfico de la ecuación (G):

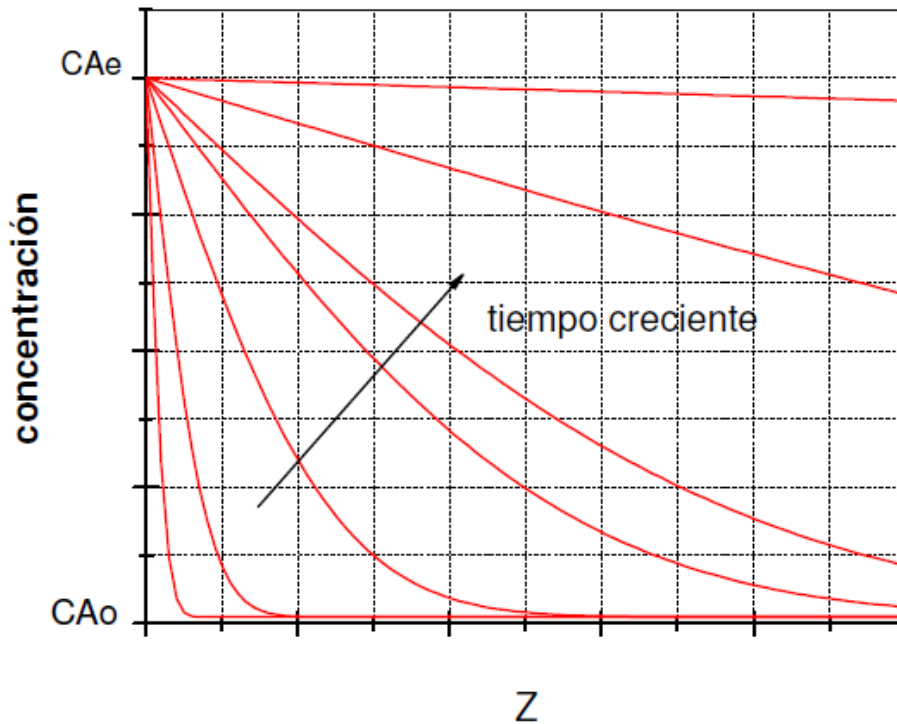


Figura 3: Gráfico de la disminución de la concentración volátil con el tiempo a lo largo de un espesor Z. (Geankoplis, C. J. , 2006).

Utilizando el modelo para el caso de secado de un sólido, el cambio de concentración que tiene lugar en la superficie no tiene tiempo para afectar todo el sistema. Es aplicable si la difusión se efectúa en un corto período de tiempo o cuando el sistema es muy grande. Se

aplica en casos en que la difusión de las especies recorre (penetran o salen) longitudes cortas dentro del sólido.

Entonces, en términos de difusión en un sólido semi infinito con una concentración constante en la superficie después del tiempo cero, la concentración en función del tiempo y la posición y el modelo se convierte en: (Welty, J., 2010), (Geankoplis, C. J. , 2006).

$$\frac{A(x,t)-A(s)}{A(0)-A(s)} = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4*De*t}}\right) \quad (26)$$

La expresión gráfica de la función de error es:

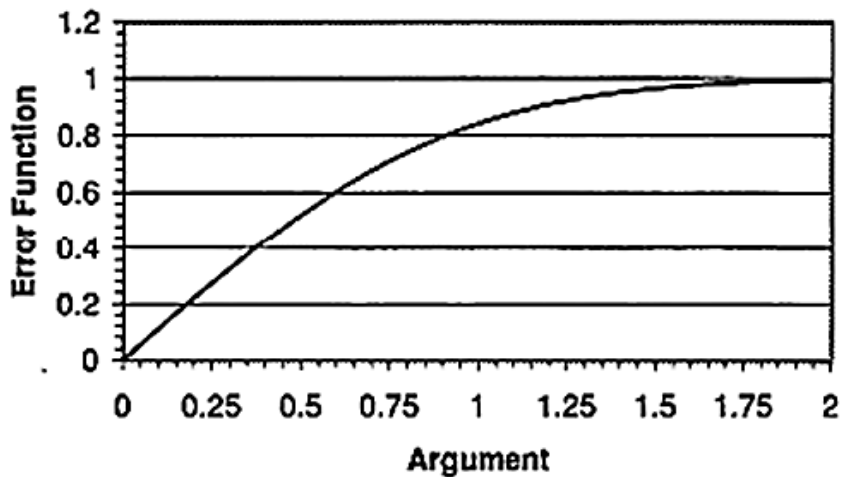


Figura 4: Comportamiento grafico de la función error, (Welty, J., 2010)

$A(x,t)$: Concentración de A a una distancia x de la superficie

$A(s)$: Concentración en la superficie

$A(0)$: Concentración inicial

D_e : Difusividad efectiva de un componente en el sólido

T : tiempo de difusión.

La función error «erf» varía de cero a 1 así como el argumento $x/(4DAB t)^{1/2}$ aumenta de 0 a ∞ . (Welty, J., 2010).

CAPÍTULO III: MATERIALES Y MÉTODOS

La materia prima para el estudio es la manzana Golden Delicious (*Malus domestica* 'Golden Delicious'). Es una de las variedades de manzana más cultivadas en todo el mundo. En su estado óptimo de maduración tiene una forma redondeada, color de la piel amarillo, carne de consistencia crujiente, jugosa, ligeramente amargo y es rica en fructosa. En climas templados del hemisferio norte, se cosecha a partir de septiembre. (Wikipedia, 2018).



Figura 5: Imagen del árbol de manzana Golden Delicious.(Google, 2014)

Historia: Apareció en 1891 en la granja Mullins, en el condado de Clay en el estado de Virginia Occidental (USA)) y no fue comercializada hasta 1914 cuando los granjeros vendieron los derechos de multiplicación a un vivero. Es originaria de USA, donde fue descubierta hacia fines del siglo XIX, es una de las variedades más difundidas en todas las zonas manzaneras del mundo, en las que la demanda define la mayor o menor importancia que se le da a su cultivo. Por esta razón, se la usa con frecuencia como referente cronológico de las fechas de floración y/o de cosecha de las demás variedades.

El fruto es tronco-cónico, regular y alargado, con un peso medio de 190 a 210 gramos y 75 a 85 milímetros de calibre y pedúnculo largo. La epidermis es verde amarillento a amarillo dorado, a veces con una cara rosada, particularmente sobre los frutos de plantas jóvenes; tiene lenticelas visibles y aunque dicha epidermis es de aspecto liso, posee un reticulado microscópico que aumenta la superficie de intercambio del fruto. Es frecuente la presencia de russeting en los frutos procedentes de gran parte de las zonas productoras del mundo; sin embargo, en nuestra región son limpios y sólo aparece ese agamuzado cuando las condiciones agrameteorológicas u otras causas externas predisponen a esa fisiopatía. La pulpa es amarillenta, fina, consistente, jugosa, crocante, perfumada y de sabor dulce-ácido equilibrados. (Benitez Celia, 2012).



Figura 6: Imagen del árbol de manzana Golden Delicious, (Benitez Celia, 2012).

Características de la materia prima del estudio

La manzana Golden Delicious utilizada para el estudio, presenta las características iniciales promedio siguientes:

Tabla 3: Parámetros iniciales de manzana Golden Delicious.

PARÁMETRO	VALOR
Humedad (kg H ₂ O/100 kg muestra)	84,4
Sólidos solubles (°Brix)	12,40
Ph	4,0
Densidad (g/cm ³)	0,685
Porosidad (%)	24,39

Se utilizaron rodajas de manzana de 10 mm de espesor con las características normales de la fruta. Estas muestras se caracterizaron por triplicado en humedad (xw, b.s.). La humedad se determinó por secado de las muestras en estufa de vacío a 60°C hasta peso constante. (Gary D.Christian, 2009).

El proceso de secado se llevó a cabo en un microondas con termómetro incorporado. Este equipo permite controlar la temperatura del bulbo seco. La masa de la muestra es registrada en una balanza (Mettler Toledo modelo PG503-S) de precisión 0,001 g.

Se realizaron los experimentos de secado a temperaturas de 45°C y 55°C, midiendo las humedades respectivas cada periodo de tiempo. Las muestras se secaron en todos los casos hasta peso constante y se realizaron varias repeticiones para cada condición. Estos datos sirven como base para la validación de los resultados obtenidos de la aplicación de la función error para evaluar la difusión del agua durante el secado y por tanto la eficacia de la segunda ley de Fick, modelo una de cuyas soluciones para pronosticar la rapidez de secado de la fruta la presenta Crank. (Crank, J., 1975).

El proceso difusional del agua en la manzana, se utiliza la ecuación integrada de la 2ª ley de Fick para una lámina infinita.

El flujo de difusión y el gradiente de difusión varían con el tiempo genera acumulación o agotamiento de las sustancias que difunden

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C_A}{\partial x} \right)$$

Si D es independiente de la composición en la materia de estudio,

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_A)$$

1. Antes de la difusión, todas las moléculas de soluto A están uniformemente distribuidos en el sólido a concentración C_{A0} .
2. El valor de x en la superficie es cero y aumenta con la distancia dentro del sólido.
3. El tiempo se toma igual a cero en el instante inmediatamente antes de empezar la difusión.

$$\frac{C_A - C_{Ae}}{C_{A0} - C_{Ae}} = \operatorname{erf} \left| \frac{x}{\sqrt{4D_e t}} \right| \quad (27)$$

Condiciones iniciales y de contorno.

- Condición inicial

$$\text{Para } t = 0 \quad C_A = C_{A0} \quad \text{para todo } z > 0 \quad (C1)$$

- Condiciones de contorno.

$$\text{A } z = 0 \quad C_A = C_{Ae} \quad \text{para } t > 0 \quad (C2)$$

$$\text{A } z \rightarrow \infty \quad C_A = C_{A0} \quad \text{para } t > 0 \quad (C3)$$

Muchas veces se generan confusiones al hablar de humedad e materiales tales como granos, minerales y por supuesto, la madera. Es por esto que les quiero aclarar algunos conceptos y

regalar este gráfico para poder tener claridad de la equivalencia entre Humedad Base Seca y Humedad Base Húmeda.

Cuando se habla de humedad en base seca y base húmeda, recuerden que:

- Humedad Base Seca: $100 \times (\text{Masa de Agua}/\text{Masa Anhidra}(\text{seca}))$.
- Humedad Base Húmeda: $100 \times (\text{Masa de Agua}/\text{Masa Total})$; Nota: Masa Total = Masa de Agua + Masa Anhidra (seca).

Así, la Humedad Base Húmeda o simplemente humedad, es más fácil y directa su interpretación, dado que al indicar que tiene un 20% de Humedad, inmediatamente se entiende que es una proporción 20 de agua y 80 de materia seca.

De modo que existe relación entre la humedad y la humedad en base seca:

$$\text{Humedad} = \frac{w(H_2O)}{w(H_2O) + w(\text{solido seco})} \quad (28)$$

Entonces, también:

$$\text{Humedad} = \frac{\frac{w(H_2O)}{w(\text{solido seco})}}{\frac{w(H_2O)}{w(\text{solido seco})} + \frac{w(\text{solido seco})}{w(\text{solido seco})}}$$

Es decir,

$$\text{Humedad} = \frac{\text{Humedad en base seca}}{\text{Humedad en base seca} + 1}$$

De esta última, se obtiene para humedad en base seca:

$$\text{Humedad en base seca} = \frac{\text{Humedad}}{1 - \text{Humedad}} \quad (29)$$

En la simbología utilizada en este estudio:

$$w(x,t) = \frac{w(x,t)}{1-w(x,t)}$$

Estas expresiones aplicadas a las variables del estudio, de acuerdo a la solución matemática del modelo, resulta:

$$\frac{w(x,t)-w(s)}{w(0)-w(s)} = \operatorname{erf} \left| \frac{x}{\sqrt{4D_e t}} \right| \quad (30)$$

Condiciones iniciales y de contorno.

- Condición inicial

$$\text{Para } t = 0 \quad w(x,t)=w(0) \quad \text{para todo } z > 0 \quad (C1)$$

- Condiciones de contorno.

$$\text{A } z = 0 \quad w(x,t) = w(s) \quad \text{para } t > 0 \quad (C2)$$

$$\text{A } z \rightarrow \infty \quad w(x,t) = w(0) \quad \text{para } t > 0 \quad (C3)$$

Para el ajuste de esta ecuación se consideró un valor medio del espesor ($l=10$ mm) de rodajas de manzana, durante el proceso de secado y un contenido inicial en agua de las muestras uniforme ($w(0) = 0,84$), debiendo alcanzar una humedad de $w(s)=0,14$.

El procedimiento del estudio consistió en los siguientes ítems:

1. Obtener los fundamentos teóricos del fenómeno de difusión
2. Formular el modelo de difusión de la humedad en el interior de la manzana
3. Desarrollar la solución matemática del modelo (al cual lo llamamos modelo teórico) calculando el tiempo de exposición al secado para una humedad establecida. Teniendo en cuenta que la humedad de la manzana fresca es de 84% y se desea secarla hasta que alcance el valor mínimo de 14%.

4. El ítem 3 se aplica a las temperaturas de 45°C y 55°C para rodajas de manzana de 10 mm de espesor.
5. Calcular las humedades en base seca
6. Construir los respectivos diagramas de secado
7. Secar rodajas de manzana de 10 mm de espesor en un horno microondas a 45°C y 55°C, para varios tiempos.
8. Calcular la humedad final del sólido para cada tiempo medido
9. Calcular la humedad en base seca
10. Comparar los diagramas de humedad en base seca calculados con el modelo matemático (teórico) con el obtenido experimentalmente.
11. Establecer la validación del modelo teórico y las respectivas conclusiones.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El caso estudio está referido al secado de rodajas de manzana a dos diferentes temperatura y a tiempos distintos, la difusividad del agua en el interior de la manzana a dos distintas temperaturas tiene influencia en el proceso de secado por difusión, por ello, el valor del coeficiente efectivo de difusión (D_e) se obtuvo de la literatura especializada (BABALIS, S & BELESSIOTIS, V., 2004). Se analizó el efecto de la temperatura sobre la difusividad, mediante el modelo de Arrhenius;

En todo proceso de difusión con cambios de temperatura, es importante la influencia de la temperatura, de acuerdo a la literatura especializada consideran que el caso se ajusta al modelo de Arrhenius:

$$D_e = D_0 * \text{EXP}\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (31)$$

La energía de activación es de 39,34 kJ/mol y el factor pre-exponencial $D_0=7,34,10^{-4}$ m²/s. $R=0,008314$ kJ/(mol.K), (Park, KJ.; Bin, A.; Brod, FPR. , 2003).

Para el caso, D_0 , E_a y R son constantes, de modo que al aplicar logaritmos a ambos miembros y arreglando la expresión, se obtiene:

$$\ln D_e = \ln D_0 - \frac{E_a}{R} * \left(\frac{1}{T}\right)$$

Esta expresión es de una recta, donde $\left(\frac{1}{T}\right)$ es la abscisa y $\ln D_e$ es la ordenada, con una pendiente negativa equivalente a $\left(-\frac{E_a}{R}\right)$, tal como se presenta en el gráfico siguiente referido a la manzana a dos temperaturas 45°C y 55°C y con las características anteriormente indicadas:

Tabla 4: Influencia de T sobre la Difusividad de la manzana

T/°C	T°K	D0	1/T	De	ln(De)
45	318	7,34 E-3	3,14E+03	2,06E-09	-20,0005599
55	328	7,34 E-3	3,05E+03	3,9856E-09	-19,340578

Llevando al grafico los correspondientes datos de la tabla precedente, se obtiene el gráfico que sigue:

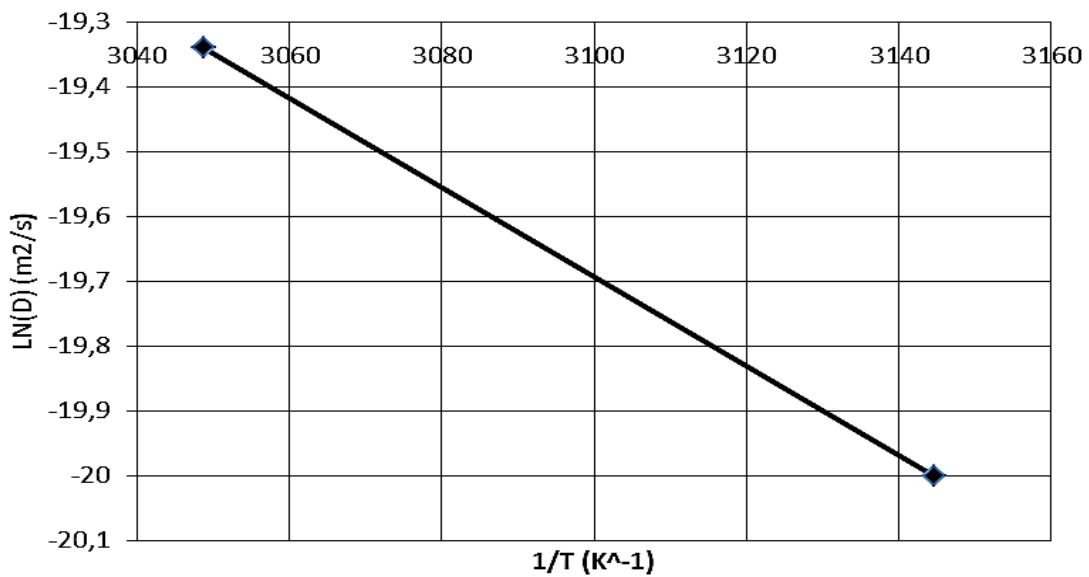


Figura 7: Comportamiento gráfico del Ln de la difusividad del agua en la manzana en función de (1/T) K-1.

En las figuras que siguen, se presentan la evolución de las curvas de secado de las rodajas para las dos temperaturas estudiadas. En ambos casos, se observa un último período velocidad de secado mucho más decreciente (menor pendiente a mayor tiempo) a partir de una humedad que es dependiente de la temperatura. Esto se explica por el incremento progresivo en el grado de compactación celular (desde el exterior al interior de la muestra).

Tabla 5: Cálculo con el modelo teórico de la humedad de las rodajas de manzana en base seca a diferentes tiempos de exposición al secado a 45°C.

De	X(m)	W(x,t)	W(s)	W(0)	$\frac{w(x,t) - w(s)}{w(0) - w(s)}$	$\text{erf}(X/(4De*t)^{0,5})$	$t(s)=(x^2/(4n^2*D))$	$t(h)=t/3600$	w(x,t)bs
						n			
2,0GE-09	0.01	0.84	0.14	0.84	1	3.99	762.301891	0.211750525	5.25
2,0GE-09	0.01	0.80725802	0.14	0.84	0.95322574	1.411	6095.63229	1.693231191	4.1882832
2,0GE-09	0.01	0.78190497	0.14	0.84	0.9170071	1.228	8047.77924	2.235494233	3.5851572
2,0GE-09	0.01	0.70847363	0.14	0.84	0.81210518	0.930	14031.5902	3.897663934	2.4302214
2,0GE-09	0.01	0.55302876	0.14	0.84	0.59004108	0.590	34863.3218	9.684256065	1.2372804
2,0GE-09	0.01	0.391426	0.14	0.84	0.35918	0.330	111440.976	30.95582678	0.64318555
2,0GE-09	0.01	0.280777	0.14	0.84	0.20111	0.180	374565.504	104.0459733	0.39038935

Tabla 6: Cálculo con el modelo teórico de la humedad de las rodajas de manzana en base seca a diferentes tiempos de exposición al secado a 55°C.

De	X(m)	W(x,t)	W(s)	W(0)	$\frac{w(x,t) - w(s)}{w(0) - w(s)}$	$\text{erf}(X/(4De*t)^{0,5})$	$t(s)=(x^2/(4n^2*D))$	$t(h)=t/3600$	w(x,t)bs
						n			
3,99E-09	0.01	0.84	0.14	0.84	1	3.99	3,94E+02	1,09E-01	5.25
3,99E-09	0.01	0.78820604	0.14	0.84	0.92600863	1.27	3,89E+03	1,08E+00	3.72157
3,99E-09	0.01	0.74350819	0.14	0.84	0.86215456	1.05	5,69E+03	1,58E+00	2.89876
3,99E-09	0.01	0.56164384	0.14	0.84	0.60234834	0.6	1,74E+04	4,84E+00	1.28125
3,99E-09	0.01	0.45751531	0.14	0.84	0.4535933	0.426	3,46E+04	9,60E+00	0.84337
3,99E-09	0.01	0.3108	0.14	0.84	0.244	0.244	1,05E+05	2,93+01	0.45095763
3,99E-09	0.01	0.2808	0.14	0.84	0.201	0.18	1,94E+05	5,38E+01	0.39024051

Esta información que produce la solución del modelo, permite construir diagramas de tiempo de secado en horas vs humedad de la muestra en base seca, dos últimas columnas de las tablas precedentes.

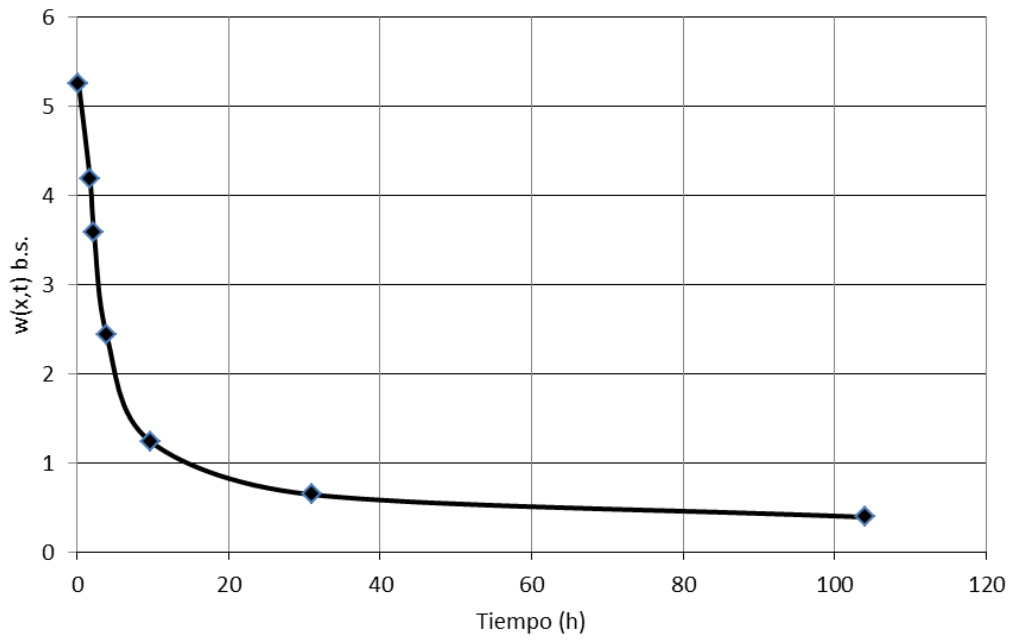


Figura 8: Curva de secado Teórico de la manzana a 45°C

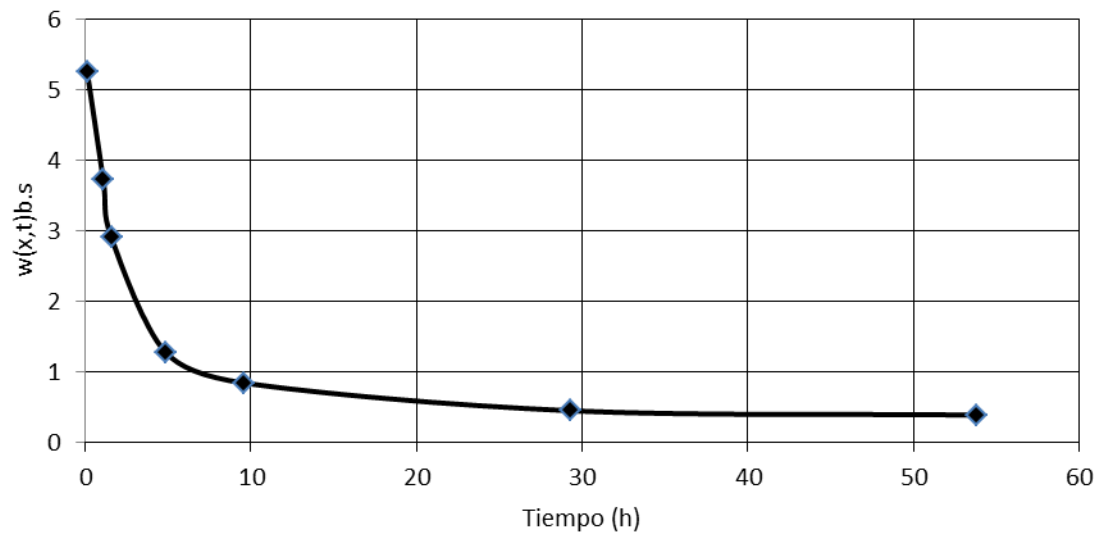


Figura 9: Curva de Teórico de rodajas de manzana a 55°C

Tabla 7: Obtención experimental de la humedad de rodajas de manzana a 45°C a diferentes tiempos.

Tiempo (min)	Tiempo (h)	$W(x,t)$	$W(x,t)b.s$
12	0,2	0,84251969	5,35
110	1,8333	0,81779488	4,48832
145	2,41667	0,79821279	3,95572
240	4	0,72392011	2,62214
600	10	0,61125495	1,57238
1820	30,33	0,40939883	0,69319
6200	103,333	0,29096117	0,41036

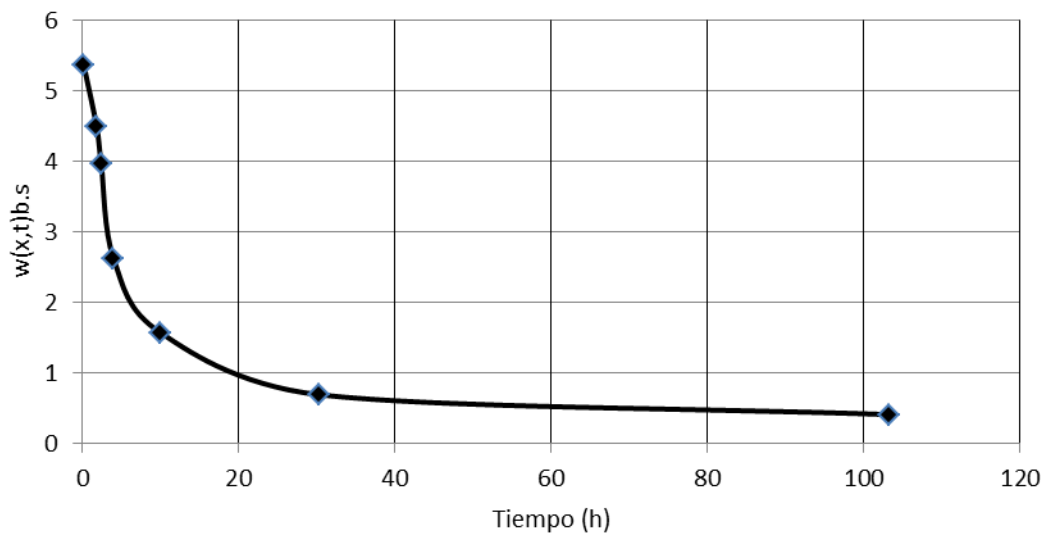


Figura 10: Curva secado experimental de rodajas de manzana a 45°C.

Tabla 8: Obtención experimental de la humedad de rodajas de manzana a 55°C a diferentes tiempos.

T=55°C			
Tiempo (min)	Tiempo (h)	W(x,t)	W(x,t)b.s
6	0,1	0,84375	5,4
60	1	0,80474737	4,12157
120	2	0,78626542	3,6787
300	5	0,60336505	1,52121
600	10	0,49342209	0,97403
1800	30	0,28891417	0,4063
3300	55	0,28497372	0,39855

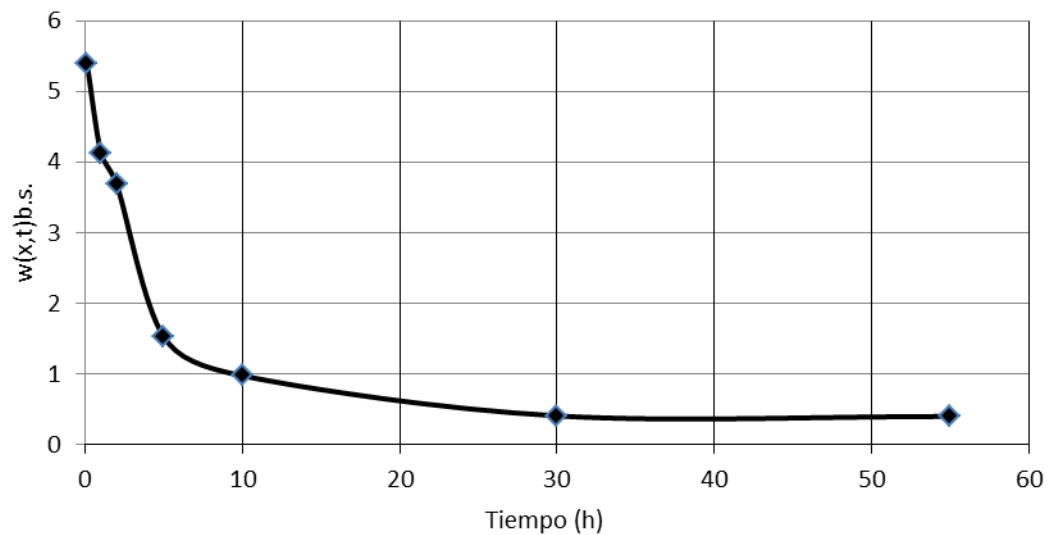


Figura 11: Curva de Secado experimental de rodajas de manzana a 55°C.

Con la finalidad de validar la eficacia del modelo teórico, se comparan los resultados de la humedad en base seca obtenidos con el modelo con los resultados experimentales, para un mismo tiempo de las rodajas de manzana. Para esto, se calcula la humedad en base seca utilizando las mismas abscisas de la curva de secado a 45°C (tabla N° 4.4 y figura N°4.4) obteniendo la columna 4 de la tabla N°4.6. Luego se grafican las humedades en base seca teórica y experimental (columnas 4 y 5 de tabla 4.6) como se muestra en la figura N° 4.6.

Tabla 9: Humedades en base seca teórico y experimental a 45°C a diferentes tiempos.

Tiempo(min)	Tiempo (s)	Tiempo (h)	w(x,t)b.s teórico	w(x,t)b.s experimental
12	720	0,2	5,503232186	5,35
110	6 600	1,8333	4,943183169	4,48832
145	8700	2,41667	4,228786103	3,95572
240	14400	4	2,797459152	2,62214
600	36000	10	1,659563273	1,57238
1820	109200	30,33	0,751056356	0,69319
6200	372000	103,333	0,433609542	0,41036

La columna penúltima de la tabla se obtuvo calculando la función erf n, para cada tiempo en segundos de la columna 2, luego se lee el valor de n en la tabla de la función error; así para la fila 2, t=6600 s, para tal valor, la función error es 4,943183169, este valor en la tabla de la función error (Anexo), arroja un n= 0,01. (Cruz Sampedro J., 2014). Este valor corresponde a la relación $\frac{w(x,t)-w(s)}{w(0)-w(s)}$, de la cual se despeja w(x,t), puesto w(s)=0,14) y

$w(0)=0,84$, obteniéndose $w(x,t)=0,83174$ a partir de este valor se obtiene la humedad en base seca mediante la expresión:

$$w(x,t)b.s = \frac{w(x,t)}{1 - w(x,t)}$$

De este modo se obtuvo para para la segunda fila $w(x,t)b.s= 4,943183169$. Este mismo procedimiento permitió obtener toda la penúltima columna $w(x,t)b.s$ teórico de la tabla anterior.

A continuación, se grafican los tiempos vs las humedades en base seca del procedimiento experimental y del procedimiento teórico mediante la aplicación del modelo teórico de Grank, tal como se aprecia en la figura siguiente. El gráfico, permite observar que, para la difusión, el modelo teórico (color rojo) presenta concordancia con los resultados experimentales (color negro) para el tema en estudio.

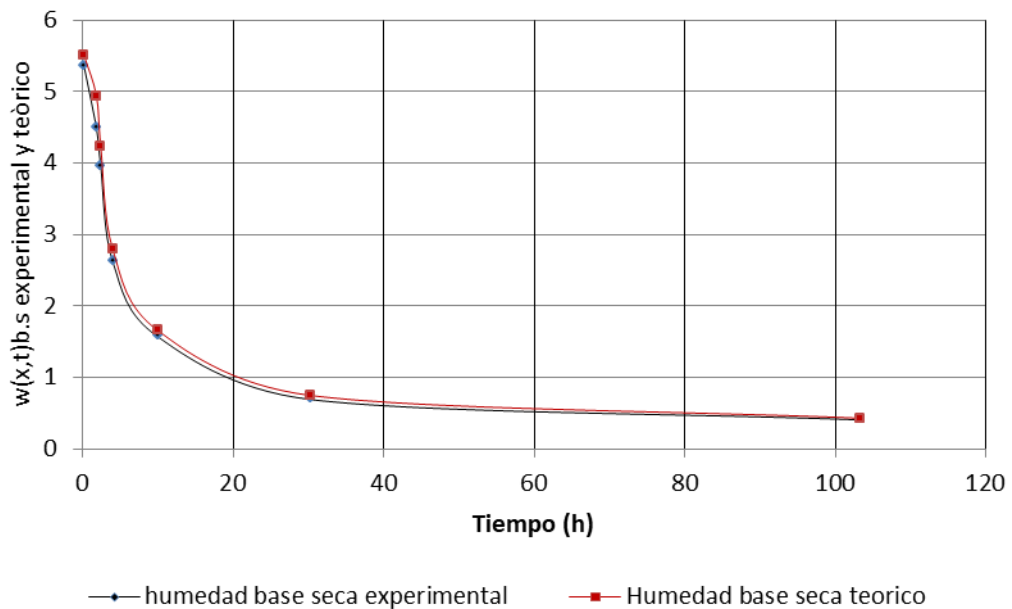


Figura 12: Curva de secado de rodajas de manzana a 45°C procedimiento experimental y teórico.

Comparando los datos y gráficos experimentales a 45°C y 55°C, se observa que para un mismo nivel de secado a 55°C requiere menos tiempo de exposición que a 45°C, esto se explica por el incremento de la difusividad con la temperatura. Así mismo, la velocidad de secado es menor a 45°C que a 55°C, se aprecia en las respectivas pendientes de las curvas de secado, a 55° la pendiente es mayor que a 45°C.

La humedad seca en el sólido con el tiempo de secado guarda una relación no lineal. Se aprecia también que, en los primeros tiempos de secado, la rapidez del secado es más grande que cuando ha transcurrido largo tiempo en el proceso de secado; esta característica se hace más notoria cuando la temperatura es más baja. La razón para este comportamiento es que en los inicios del proceso la fuerza motriz que impulsa la salida del agua es más grande que cuando ha transcurrido largo tiempo.

La figura N°4.6, muestra la concordancia entre el método experimental y el teórico, por lo tanto, es aplicable el método teórico de Grank para casos como el del presente estudio.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

- El modelo teórico aplicado al secado de las rodajas de manzana es eficaz, sin embargo, sólo permite alcanzar niveles mínimos de humedad cercanos al 16%, pues el tejido de la masa sólida, al perder el agua, ofrece una resistencia importante al transporte de masa.
- La difusividad varia con la temperatura de acuerdo al modelo de Arrhenius.
- La temperatura tiene influencia significativa en la difusividad efectiva.
- Los tiempos de secado por difusión son elevados y elevan el costo del producto seco.

CAPITULO VI: REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- BABALIS, S & BELESSIOTIS, V. (2004). *Influence of the drying conditions on the drying constant moisture diffusivity during the thinlayer of figs*, *J. Food Engineering*, 65(3), 449-458. NY: USA.
- Benitez Celia. (01 de 03 de 2012). *INA Instituto Nacional de Tecnologia Agropecuaria*. Recuperado el 20 de 05 de 2019, de <https://inta.gov.ar/documentos/manzana-golden-delicious>
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. . (2006). *Fenómenos de transporte*. México: Reverte.
- CEUPE, U. d. (10 de enero de 2014). Recuperado el 06 de noviembre de 2018, de <https://www.ceupe.com/blog/la-deshidratacion-de-los-alimentos.html>
- Crank, J. (1975). *The mathematics of Diffusion*. London: Oxford University Press, pp.44-68.
- Cruz Sampedro J. (2014). Integral gaussiana y función error para todos. *Miscelanea Matemática*, 59-77-89.
- Fito Pedro et al. (2001). *Introduccion al secado de alimentos por aire caliente*. Valencia: EDITORIAL UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA.
- Gary D.Christian. (2009). *Quimica Analitica*. Mexico: McGraw Hill.
- Geankoplis, C. J. . (2006). *Procesos de Transporte y Principios de Procesos de separación*. Mexico: CECOSA.
- Google. (06 de setiembre de 2014). Recuperado el 03 de marzo de 2019, de https://www.google.com.mx/search?q=arbol+de+manzana+Golden+Delicious&safe=active&rlz=1C2CHBF_esPE838PE838&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=SBf

NJWSZPwbfrM%253A%252C4TvR8YyiuZIE-M%252C_&vet=1&usg=AI4_-

kSwocUGLRSjUFXE5L__mMbzsgj77Q&sa=X&ved=2ahUKEwiW8Yz89NfiAhX

McCABE, W.; SMITH, J. (1956). *Unit. Operations of Chemical Engineering*. N.Y: McGraw Hill.

Park, KJ.; Bin, A.; Brod, FPR. . (2003). *Drying of pear d'Anjou with and without osmotic dehydration. Journal of Food Engineering*, 56: 97-103. NY: USA.

Treybal, Robert E. . (1968). *Mass-Transfer Operations, 2nd Edition*. NY: McGraw-Hill.

Welty, J. (2010). *Fundamentos de Transferemncia de momento, calor y masa*. N.Y: LIMUSA.

Wikipedia. (18 de marzo de 2018). Recuperado el 05 de mayo de 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Golden_Delicious

ANEXOS

ANEXO I

Función de error

En matemáticas, la función de error es una función especial (no elemental) de forma sigmoidea que se produce en probabilidad, estadística y ecuaciones diferenciales parciales. También se llama función de error de Gauss o integral de probabilidad.

La función de error se define como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

Tabla de funciones de error

La siguiente es la función de error y la tabla de función de error complementaria que muestra los valores de erf (x) y erfc (x) para x que van de 0 a 3.5 con un incremento de 0.01.

X	erf (x)	erfc (x)
0.0	0.0	1.0
0.01	0.011283416	0.988716584
0.02	0.022564575	0.977435425
0.03	0.033841222	0.966158778
0.04	0.045111106	0.954888894
0.05	0.056371978	0.943628022
0.06	0.067621594	0.932378406

0.07	0.07885772	0.92114228
0.08	0.090078126	0.909921874
0.09	0.101280594	0.898719406
0.1	0.112462916	0.887537084
0.11	0.123622896	0.876377104
0.12	0.134758352	0.865241648
0.13	0.145867115	0.854132885
0.14	0.156947033	0.843052967
0.15	0.167995971	0.832004029
0.16	0.179011813	0.820988187
0.17	0.189992461	0.810007539
0.18	0.200935839	0.799064161
0.19	0.211839892	0.788160108
0.2	0.222702589	0.777297411
0.21	0.233521923	0.766478077
0.22	0.244295912	0.755704088

0.23	0.2550226	0.7449774
0.24	0.265700059	0.734299941
0.25	0.27632639	0.72367361
0.26	0.286899723	0.713100277
0.27	0.297418219	0.702581781
0.28	0.307880068	0.692119932
0.29	0.318283496	0.681716504
0.3	0.328626759	0.671373241
0.31	0.33890815	0.66109185
0.32	0.349125995	0.650874005
0.33	0.359278655	0.640721345
0.34	0.369364529	0.630635471
0.35	0.379382054	0.620617946
0.36	0.389329701	0.610670299
0.37	0.399205984	0.600794016
0.38	0.409009453	0.590990547

0.39	0.4187387	0.5812613
0.4	0.428392355	0.571607645
0.41	0.43796909	0.56203091
0.42	0.447467618	0.552532382
0.43	0.456886695	0.543113305
0.44	0.466225115	0.533774885
0.45	0.47548172	0.52451828
0.46	0.48465539	0.51534461
0.47	0.493745051	0.506254949
0.48	0.502749671	0.497250329
0.49	0.511668261	0.488331739
0.5	0.520499878	0.479500122
0,51	0.52924362	0.47075638
0,52	0.53789863	0.46210137
0,53	0.546464097	0.453535903
0,54	0.55493925	0.44506075

0,55	0.563323366	0.436676634
0.56	0.571615764	0.428384236
0,57	0.579815806	0.420184194
0.58	0.5879229	0.4120771
0,59	0.595936497	0.404063503
0.6	0.603856091	0.396143909
0.61	0.611681219	0.388318781
0.62	0.619411462	0.380588538
0.63	0.627046443	0.372953557
0.64	0.634585829	0.365414171
0.65	0.642029327	0.357970673
0.66	0.649376688	0.350623312
0.67	0.656627702	0.343372298
0.68	0.663782203	0.336217797
0.69	0.670840062	0.329159938
0.7	0.677801194	0.322198806

0.71	0.68466555	0.31533445
0.72	0.691433123	0.308566877
0.73	0.698103943	0.301896057
0.74	0.704678078	0.295321922
0.75	0.711155634	0.288844366
0.76	0.717536753	0.282463247
0.77	0.723821614	0.276178386
0.78	0.730010431	0.269989569
0.79	0.736103454	0.263896546
0.8	0.742100965	0.257899035
0.81	0.748003281	0.251996719
0.82	0.753810751	0.246189249
0.83	0.759523757	0.240476243
0.84	0.765142711	0.234857289
0.85	0.770668058	0.229331942
0.86	0.776100268	0.223899732

0.87	0.781439845	0.218560155
0.88	0.786687319	0.213312681
0.89	0.791843247	0.208156753
0.9	0.796908212	0.203091788
0.91	0.801882826	0.198117174
0.92	0.806767722	0.193232278
0.93	0.811563559	0.188436441
0.94	0.816271019	0.183728981
0.95	0.820890807	0.179109193
0.96	0.82542365	0.17457635
0.97	0.829870293	0.170129707
0.98	0.834231504	0.165768496
0.99	0.83850807	0.16149193
1.0	0.842700793	0.157299207
1.01	0.846810496	0.153189504
1.02	0.850838018	0.149161982

1.03	0.854784211	0.145215789
1.04	0.858649947	0.141350053
1.05	0.862436106	0.137563894
1.06	0.866143587	0.133856413
1.07	0.869773297	0.130226703
1.08	0.873326158	0.126673842
1.09	0.876803102	0.123196898
1.1	0.88020507	0.11979493
1.11	0.883533012	0.116466988
1.12	0.88678789	0.11321211
1.13	0.88997067	0.11002933
1.14	0.893082328	0.106917672
1.15	0.896123843	0.103876157
1.16	0.899096203	0.100903797
1.17	0.902000399	0.097999601
1.18	0.904837427	0.095162573

1.19	0.907608286	0.092391714
1.2	0.910313978	0.089686022
1.21	0.912955508	0.087044492
1.22	0.915533881	0.084466119
1.23	0.918050104	0.081949896
1.24	0.920505184	0.079494816
1.25	0.922900128	0.077099872
1.26	0.925235942	0.074764058
1.27	0.927513629	0.072486371
1.28	0.929734193	0.070265807
1.29	0.931898633	0.068101367
1.3	0.934007945	0.065992055
1.31	0.936063123	0.063936877
1,32	0.938065155	0.061934845
1,33	0.940015026	0.059984974
1.34	0.941913715	0.058086285

1,35	0.943762196	0.056237804
1,36	0.945561437	0.054438563
1.37	0.947312398	0.052687602
G1.38	0.949016035	0.050983965
1,39	0.950673296	0.049326704
1.4	0.95228512	0.04771488
1.41	0.953852439	0.046147561
1.42	0.955376179	0.044623821
1.43	0.956857253	0.043142747
1.44	0.95829657	0.04170343
1.45	0.959695026	0.040304974
1.46	0.96105351	0.03894649
1.47	0.9623729	0.0376271
1.48	0.963654065	0.036345935
1.49	0.964897865	0.035102135
1.5	0.966105146	0.033894854

1.51	0.967276748	0.032723252
1.52	0.968413497	0.031586503
1.53	0.969516209	0.030483791
1.54	0.97058569	0.02941431
1.55	0.971622733	0.028377267
1.56	0.972628122	0.027371878
1.57	0.973602627	0.026397373
1.58	0.974547009	0.025452991
1.59	0.975462016	0.024537984
1.6	0.976348383	0.023651617
1.61	0.977206837	0.022793163
1.62	0.978038088	0.021961912
1.63	0.97884284	0.02115716
1.64	0.97962178	0.02037822
1.65	0.980375585	0.019624415
1.66	0.981104921	0.018895079

1,67	0.981810442	0.018189558
1.68	0.982492787	0.017507213
1.69	0.983152587	0.016847413
1.7	0.983790459	0.016209541
1.71	0.984407008	0.015592992
1.72	0.985002827	0.014997173
1.73	0.9855785	0.0144215
1.74	0.986134595	0.013865405
1.75	0.986671671	0.013328329
1.76	0.987190275	0.012809725
1.77	0.987690942	0.012309058
1.78	0.988174196	0.011825804
1.79	0.988640549	0.011359451
1.8	0.989090502	0.010909498
1.81	0.989524545	0.010475455
1.82	0.989943156	0.010056844

1.83	0.990346805	0.009653195
1.84	0.990735948	0.009264052
1.85	0.991111103	0.00888897
1.86	0.991472488	0.008527512
1.87	0.991820748	0.008179252
1.88	0.992156223	0.007843777
1.89	0.992479318	0.007520682
1.9	0.992790429	0.007209571
1.91	0.99308994	0.00691006
1.92	0.993378225	0.006621775
1.93	0.99365565	0.00634435
1.94	0.993922571	0.006077429
1.95	0.994179334	0.005820666
1.96	0.994426275	0.005573725
1.97	0.994663725	0.005336275
1.98	0.994892	0.005108

1.99	0.995111413	0.004888587
2.0	0.995322265	0.004677735
2.01	0.995524849	0.004475151
2.02	0.995719451	0.004280549
2.03	0.995906348	0.004093652
2.04	0.99608581	0.00391419
2.05	0.996258096	0.003741904
2.06	0.996423462	0.003576538
2.07	0.996582153	0.003417847
2.08	0.996734409	0.003265591
2.09	0.996880461	0.003119539
2.1	0.997020533	0.002979467
2,11	0.997154845	0.002845155
2.12	0.997283607	0.002716393
2,13	0.997407023	0.002592977
2,14	0.997525293	0.002474707

2.15	0.997638607	0.002361393
2.16	0.997747152	0.002252848
2,17	0.997851108	0.002148892
2.18	0.997950649	0.002049351
2.19	0.998045943	0.001954057
2.2	0.998137154	0.001862846
2.21	0.998224438	0.001775562
2,22	0.998307948	0.001692052
2.23	0.998387832	0.001612168
2.24	0.998464231	0.001535769
2.25	0.998537283	0.001462717
2,26	0.998607121	0.001392879
2.27	0.998673872	0.001326128
2,28	0.998737661	0.001262339
2,29	0.998798606	0.001201394
2.3	0.998856823	0.001143177

2,31	0.998912423	0.001087577
2,32	0.998965513	0.001034487
2,33	0.999016195	0.000983805
2,34	0.99906457	0.00093543
2,35	0.999110733	0.000889267
2,36	0.999154777	0.000845223
2,37	0.99919679	0.00080321
2,38	0.999236858	0.000763142
2,39	0.999275064	0.000724936
2,4	0.999311486	0.000688514
2,41	0.999346202	0.000653798
2,42	0.999379283	0.000620717
2,43	0.999410802	0.000589198
2,44	0.999440826	0.000559174
2,45	0.99946942	0.00053058
2,46	0.999496646	0.000503354

2,47	0.999522566	0.000477434
2.48	0.999547236	0.000452764
2,49	0.999570712	0.000429288
2.5	0.999593048	0.000406952
2.51	0.999614295	0.000385705
2.52	0.999634501	0.000365499
2.53	0.999653714	0.000346286
2.54	0.999671979	0.000328021
2.55	0.99968934	0.00031066
2.56	0.999705837	0.000294163
2.57	0.999721511	0.000278489
2.58	0.9997364	0.0002636
2.59	0.999750539	0.000249461
2.6	0.999763966	0.000236034
2.61	0.999776711	0.000223289
2.62	0.999788809	0.000211191

2.63	0.999800289	0.000199711
2,64	0.999811181	0.000188819
2.65	0.999821512	0.000178488
2,66	0.999831311	0.000168689
2,67	0.999840601	0.000159399
2.68	0.999849409	0.000150591
2,69	0.999857757	0.000142243
2.7	0.999865667	0.000134333
2.71	0.999873162	0.000126838
2.72	0.999880261	0.000119739
2,73	0.999886985	0.000113015
2.74	0.999893351	0.000106649
2,75	0.999899378	0.000100622
2,76	0.999905082	9.4918e-05
2,77	0.99991048	8.952e-05
2,78	0.999915587	8.4413e-05

2.79	0.999920418	7.9582e-05
2.8	0.999924987	7.5013e-05
2,81	0.999929307	7.0693e-05
2,82	0.99993339	6.661e-05
2,83	0.99993725	6.275e-05
2.84	0.999940898	5.9102e-05
2,85	0.999944344	5.5656e-05
2,86	0.999947599	5.2401e-05
2,87	0.999950673	4.9327e-05
2,88	0.999953576	4.6424e-05
2,89	0.999956316	4.3684e-05
2.9	0.999958902	4.1098e-05
2.91	0.999961343	3.8657e-05
2.92	0.999963645	3.6355e-05
2.93	0.999965817	3.4183e-05
2,94	0.999967866	3.2134e-05

2,95	0.999969797	3.0203e-05
2,96	0.999971618	2.8382e-05
2,97	0.999973334	2.6666e-05
2,98	0.999974951	2.5049e-05
2,99	0.999976474	2.3526e-05
3.0	0.99997791	2.209e-05
3.01	0.999979261	2.0739e-05
3.02	0.999980534	1.9466e-05
3.03	0.999981732	1.8268e-05
3.04	0.999982859	1.7141e-05
3.05	0.99998392	1.608e-05
3.06	0.999984918	1.5082e-05
3.07	0.999985857	1.4143e-05
3.08	0.99998674	1.326e-05
3.09	0.999987571	1.2429e-05
3.1	0.999988351	1.1649e-05

3.11	0.999989085	1.0915e-05
3.12	0.999989774	1.0226e-05
3.13	0.999990422	9.578e-06
3.14	0.99999103	8.97e-06
3.15	0.999991602	8.398e-06
3.16	0.999992138	7.862e-06
3.17	0.999992642	7.358e-06
3.18	0.999993115	6.885e-06
3.19	0.999993558	6.442e-06
3.2	0.999993974	6.026e-06
3,21	0.999994365	5.635e-06
3,22	0.999994731	5.269e-06
3,23	0.999995074	4.926e-06
3,24	0.999995396	4.604e-06
3,25	0.999995697	4.303e-06
3,26	0.99999598	4.02e-06

3,27	0.999996245	3.755e-06
3,28	0.999996493	3.507e-06
3,29	0.999996725	3.275e-06
3,3	0.999996942	3.058e-06
3,31	0.999997146	2.854e-06
3,32	0.999997336	2.664e-06
3,33	0.999997515	2.485e-06
3,34	0.999997681	2.319e-06
3,35	0.999997838	2.162e-06
3,36	0.999997983	2.017e-06
3,37	0.99999812	1.88e-06
3,38	0.999998247	1.753e-06
3,39	0.999998367	1.633e-06
3,4	0.999998478	1.522e-06
3,41	0.999998582	1.418e-06
3,42	0.999998679	1.321e-06

3,43	0.99999877	1.23e-06
3,44	0.999998855	1.145e-06
3,45	0.999998934	1.066e-06
3,46	0.999999008	9.92e-07
3,47	0.999999077	9.23e-07
3,48	0.999999141	8.59e-07
3,49	0.999999201	7.99e-07
3.5	0.999999257	7.43e-07