UNIVERSIDAD NACIONAL "JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN"

FACULTAD DE EDUCACIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TESIS

ADAPTACIÓN DE LAS REGLETAS DE CUISENAIRE PARA LA DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

AUTORA:

LAURA NORMA REQUENA BELTRAN

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACION SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA E INFORMÁTICA

ASESOR:

Mg. NILO TELLO PANDAL

HUACHO – PERÚ

2018

ADAPTACIÓN DE LAS REGLETAS DE CUISENAIRE PARA LA DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

DEDICATORIA

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mis padres Antonio y Virgilia que siempre me apoyaron incondicionalmente en la parte moral y económica para poder llegar a ser un profesional.

A mi amado esposo por ser la luz que ilumina mi camino, por su amor, por sus consejos, su paciencia y, por su invalorable apoyo para alcanzar mis metas.

A mi amada hija, Damaris por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada día más.

INDICE

RESUMEN

La presente investigación trata fundamentalmente del diseño de una adaptación propuesta de las regletas de Cuisenaire (Números en colores) para la enseñanza y aprendizaje de la aritmética de los números enteros y, su correspondiente aplicación a una realidad educativa: escolares del primer grado de secundaria de la I.E. CETI de Andahuasi – Sayán (2018), con resultados muy favorables.

Como se sabe, las regletas introducidas por el belga Georges Cuisenaire en 1945 es un recurso didáctico de tipo lógico manipulativo que se usa en todo el mundo para enseñar y aprender los primeros pasos de la aritmética de los números naturales, cuya efectividad ya ha sido demostrado a través de los años, pues permite al niño experimentar por su propia cuenta fomentando el desarrollo de la autonomía del mismo mientras busca respuestas de manera independiente. ¿Se puede adaptar estas regletas para también enseñar y aprender las operaciones básicas con los números enteros?

La adaptación propuesta consistió en utilizar un paquete de regletas para los números positivos (+) y otro paquete para los números enteros negativos (-), las mismas que bajo determinadas reglas de manipulación, especialmente diseñadas para este fin, permiten simular la estructura lógica de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de los números enteros, con la ventaja de que el efecto psicológico que produce esta manipulación y sus resultados es captado rápidamente por el escolar e introducido a su estructura cognitiva de manera más duradera en el tiempo que otros recursos didácticos tradicionales. Naturalmente que la manipulación de las regletas, bajo reglas estrictas para cada operación, va emparejada simultáneamente con la representación simbólica respectiva. Posteriormente se introduce al escolar a situaciones cotidianas de la vida real que se pueden representar con los números enteros y sus distintas operaciones; como la aplicación, por ejemplo, de los conceptos de “arriba” y “abajo”, “derecha e “izquierda”, “ganancia” y “pérdidas”; uno como el opuesto del otro.

En resumen, a través del presente trabajo, se ha demostrado que la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas con los números enteros utilizando la adaptación propuesta de las regletas de Cuisenaire es mucho más efectiva como recurso didáctico que otros recursos tradicionales.

Palabras claves **:** Números enteros - Didáctica – Regletas de Cuisenaire – Aprendizaje Significativo

ABSTRAC

The present investigation deals fundamentally with the design of a proposed adaptation of the Cuisenaire strips (Numbers in colors) for the teaching and learning of the arithmetic of the whole numbers and, its corresponding application to an educational reality: schoolchildren of the first grade of high school El CETI de Andahuasi - Sayán (2018), with very favorable results.

As you know, the strips introduced by the Belgian Georges Cuisenaire in 1945 is a didactic resource of manipulative logical type that is used throughout the world to teach and learn the first steps of the arithmetic of natural numbers, whose effectiveness has already been demonstrated Through the years, it allows the child to experiment on his own, fostering the development of his autonomy while searching for answers independently. Can you adapt these strips to also teach and learn basic operations with whole numbers?

The proposed adaptation consisted in using a set of strips for positive numbers (+) and another package for negative integers (-), which under certain rules of manipulation, specially designed for this purpose, allow to simulate the logical structure of the operations of addition, subtraction, multiplication and division of the whole numbers, with the advantage that the psychological effect produced by this manipulation and its results is quickly captured by the scholar and introduced to his cognitive structure in a more lasting way in the time that other traditional didactic resources. Naturally, the manipulation of the strips, under strict rule for each operation, is paired simultaneously with the respective symbolic representation. Subsequently, the school is introduced to everyday situations of real life that can be represented with the whole numbers and their different operations; as the application, for example, of the concepts of "up" and "down", "right and" left "," gain "and" losses "; one as the opposite of the other.

In summary, through this work, it has been shown that the teaching and learning of basic operations with integers using the proposed adaptation of the Cuisenaire strips is much more effective as a teaching resource than other traditional resources.

Keywords : Whole numbers - Didactics - Cuisenaire strips - Significant learning

INTRODUCCIÓN

Como parte de un diagnóstico previo a los trabajos realizados en esta tesis, se aplicó una pequeña prueba de habilidades operativas con números enteros a una muestra de 20 escolares del 4to de secundaria los que se supone ya manejan con propiedad las distintas operaciones básicas que se dan en el conjunto de los números enteros.

Esta prueba consistió en:

a) Comparar con la relación “menor” números exclusivamente positivos, combinando positivos con negativos y, exclusivamente negativos.
b) Realizar operaciones de adición y sustracción con exclusivamente números positivos, combinando positivos con negativos y, exclusivamente negativos.
c) Resolver problemas sencillos de la vida cotidiana usando números positivos y números negativos.

La tendencia observada en los resultados obtenidos en esta prueba de diagnóstico fue que el porcentaje de aciertos donde intervienen exclusivamente números enteros positivos es alto (por encima del 90%); pero en cuanto entran a tallar los números negativos la situación se revierte totalmente.

Ahora bien, se sabe por diversas investigaciones internacionales que esta tendencia es mundial. ¿Por qué se da esta situación?

Una respuesta que dan los especialistas es que existen deficiencias en la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas con números enteros, principalmente en la adición y sustracción.

Esta deficiencia radica principalmente en la poca comprensión por parte de nuestros escolares de la “lógica operativa” de estas operaciones, que no logran calar en un 100% en la estructura cognitivos de ellos. De allí que sea de preocupación mundial esta situación debido a que esta influye a la comprensión posterior de la lógica de otras operaciones en conjuntos de números más densos como son los racionales y reales.

La solución, al parecer, apunta a que se tiene que mejorar los métodos, técnicas y recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la aritmética de los números.

Es en este contexto, que la pretensión del presente trabajo es la propuesta de una adaptación de las famosas regletas de Cuisenaire para operar con números positivos y negativos, bajo reglas estrictamente diseñadas para este fin.

Naturalmente que esta propuesta se aplicó a una realidad educativa, con alumnos del 1er grado de secundaria, obteniéndose resultados muy satisfactorios.

CAPITULO I:
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Es hartamente sabido que en el área de la matemática escolar uno de los temas de mayor dificultad en su aprendizaje es la aritmética de los números enteros en sus cuatro (4) operaciones básicas. Puesto que el estudiante que va a iniciar el aprendizaje de las operaciones básicas con los números enteros ya está encasillado en las propiedades elementales de estas operaciones sobre todo de la adición y la sustracción, con números naturales, tales como:

- La suma de dos números naturales a, b siempre es mayor o igual que cualquiera de sus sumandos.
- La diferencia de dos números naturales a, b solamente es posible cuando el minuendo es mayor o igual que es sustraendo.

Pero al pasar a la adición y la sustracción de los números enteros estas propiedades solo se cumplen para los enteros no negativos, entonces surge en el estudiante una confusión y desaliento que repercute negativamente en su respectivo aprendizaje.

¿Cómo hacer entender al estudiante que se inicia en el aprendizaje de la aritmética de los números enteros, que ahora hay sumas que equivalen a restas y, hay restas que equivalen a sumas?

Aparte de los aprendizajes de los algoritmos para el cálculo aritmético en el conjunto de los números enteros el estudiante debe saber relacionar hechos concretos de la vida real con los números enteros, sus operaciones y sus propiedades. Históricamente, debió pasar mucho tiempo después del conocimiento del concepto de número natural al conocimiento del concepto de número entero, gracias a situaciones que se presentan en la vida cotidiana del hombre o la mujer, como es la generación de los conceptos de “izquierda y derecha”, “arriba y abajo”, “perdida y ganancia”, “debajo del nivel del mar y sobre el nivel del mar”, “temperatura bajo cero y temperatura sobre cero”, etc.

Pero la generación de estos conceptos íntimamente ligadas a los números enteros (negativos y positivos) no hubiera sido posible sin la generación previa de otro concepto: el número entero cero.

Lógicamente tiene sentido formular las siguientes interrogantes, en relación a los anteriores conceptos:

¿A la izquierda o derecha de qué?

¿Hacia arriba o hacia debajo de qué?

¿Pérdida o ganancia en relación a qué?

¿Temperatura bajo cero o temperatura sobre cero en relación a qué?

Es obvio que la respuesta a estas interrogantes está muy relacionado al objeto llamado cero, que actúa como un elemento referente o neutro para que tenga sentido o existencia los conceptos de “izquierda o derecha”, “arriba o abajo”, etc.

Estas situaciones especiales conjuntamente con el objeto llamado “cero” ha generado el concepto del operador “opuesto de”. Así tenemos: la posición “a la izquierda” es el opuesto a la posición “a la derecha”, y viceversa.

La posición “arriba” es el opuesto a la posición “abajo”, y viceversa.

La acción de “perder” es opuesto a la acción de “ganar”, y viceversa.

Incluso el operador “opuesto de” tienen por signo “-”, así simbólicamente tiene sentido lógico las siguientes notaciones:

$-(izquierda) = derecha\,;\; -(derecha) = izquierda$

$-(pérdida) = ganancia\,;\; -(ganancia\,) = pérdida$

$-(abajo) = arriba\,;\; -(arriba\,) = abajo$

Es más, si se aplica el operador “-“doblemente ocurre que:

$-[-(izquierda)] = -(derecha\,) = izquierda$

$-[-(derecha\,)] = -(izquierda) = derecha$

$-[-(pérdida)] = -(ganancia\,) = pérdida$

Interpretando estas expresiones de los resultados obtenidos al aplicar doblemente el operador “opuesto de” se puede deducir que se regresa a la situación inicial, propiedad que al aplicarse a cualquier numero entero X, resulta $-(-X) = X$.

Generalizando esta propiedad del operador “-” (opuesto de) se puede decir que si se aplica un número par de veces a una situación inicial se regresa necesariamente a esta situación inicial. Y, si se aplica un número impar de veces a una situación inicial se regresa necesariamente al único opuesto de esta situación inicial, lo cual llevado al campo de los números enteros resulta:

$-\Big(-\big(-\cdots-(X)\big)\Big) = X; (resulta\ la\ situación\ inicial); cuando\ se\ aplica\ el\ operador$ $\text{"-"}\ un\ número\ par\ de\ veces$

$-\Big(-\big(-\cdots-(X)\big)\Big) = -X;\ (resulta\ el\ opuesto\ de\ la\ situación\ inicial); cuando\ se$ $aplica\ el\ operador\ \text{"-"}\ un\ número\ impar\ de\ veces$

Por otro lado, cuando se quiere relacionar 2 números naturales a, b a través del concepto “menor que”, el escolar que, maneja este concepto desde los primeros grados de la educación primaria sabe que “a es menor que b” cuando es posible encontrar otro natural K mayor que cero, tal que

$$a + k = b$$

Pero cuando el escolar se inicia con la aritmética de los enteros ya no es fácil hallar ese otro entero k positivo cuando a, b son enteros, sobre todo cuando uno es positivo y el otro negativo o ambos son negativos.

Este problema de hallar k también ocasiona al estudiante dificultades para ordenar de menor a mayor una serie de números enteros. Por ejemplo, esta dificultad de hallar k le hace creer que -7 es menor que -8 o que 28 es menor que -29. No se percata que en ninguno de los casos es posible hallar un k entero positivo que hace que se cumpla:

$$-7 + k = -8 \qquad \text{ó} \qquad 28 + k = -29$$

En cambio, en las relaciones correctas "-8 es menor que -7" o "-29 es menor que 28" si es posible hallar ese entero k positivo tales que:

$$-8 + 1 = -7 \qquad \text{con} \qquad k = 1$$
$$-29 + 57 = 28 \qquad \text{con} \qquad k = 57$$

En cuanto a las operaciones de multiplicación y división de números enteros paradójicamente resultan más sencillas que las operaciones de adición y sustracción, porque para ejecutarlas es suficiente saber multiplicar y dividir números naturales conjuntamente con el manejo de la ley de signos: signos iguales dan como resultado el signo ´positivo; y, signos desiguales dan como resultado el signo negativo.

$$\begin{array}{lcl} + \cdot += + & & +: += + \\ - \cdot -= + & & -: -= + \\ + \cdot -= - & \text{ó} & +: -= - \\ - \cdot += - & & +: -= - \end{array}$$

En resumidas cuentas, se puede decir que toda la dificultad que significa aprender la aritmética de los números enteros radica en el poco entendimiento del papel que juegan los números negativos en su interrelación con los números positivos. Para corroborar esta situación se aplicó una pequeña prueba de conocimientos a una muestra de 20 escolares del 4to año de media de la I.E. CETI de Andahuasi – Sayán, grado en el que se supone ya manejan bien las operaciones de adición y sustracción de números enteros y sus aplicaciones a problemas sencillos de la vida cotidiana.

Los resultados obtenidos con esta muestra de estudiantes efectivamente corroboran el poco o nulo manejo adecuado de los números negativos.

Los reactivos aplicados en esta pequeña prueba de conocimientos fueron los siguientes:

1. Escribe el símbolo “<” (es menor que) ó el símbolo “>” (es mayor que) dentro del círculo, según corresponda:

   a) 172 ◯ 175

   b) 283 ◯ 271

   c) -283 ◯ 271

   d) -172 ◯ -175

2. Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

   a) $19 + 26 =$

   b) $-19 + 26 =$

   c) $19 + -26 =$

   d) $-19 + -26 =$

3. Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

   a) $48 - 15 =$

   b) $15 - 48 =$

   c) $-48 - 15 =$

   d) $-15 - (-48) =$

4. Marca con un aspa (X) la respuesta correcta al siguiente problema: Juan vive a media cuadra (se entiende que una cuadra tiene aproximadamente 100 metros) de una de las calles de Sayán. En cierto momento salió de su vivienda y caminó en línea recta 20 metros a la derecha de su vivienda, luego avanzó en línea recta 30 metros en sentido opuesto y, finalmente 10 metros en sentido contrario a éste. ¿Dónde se encuentra Juan?

   a) A 10 metros a la derecha de su casa

   b) A 10 metros a la izquierda de su casa

   c) A la entrada de su casa

5. Marca con un aspa (X) la respuesta correcta en el siguiente problema: Carlos tiene ahorrados 100 soles como producto de sus propinas. Quiere comprarse un celular cuyo costo es superior a los 300 soles. Como no le alcanza sus propinas ahorradas su papá le regaló otros 100 soles y luego se prestó de su hermano 150 soles. ¿Cuál es la operación aritmética que mejor expresa el real estado financiero de Carlos?

   a) $100 + 100 + 150 = 350$

   b) $100 + 100 + (-150) = -50$

   c) $100 - 100 + 150 = 150$

Los resultados observados en los 3 primeros reactivos fueron:

REACTIVO	SUBREACTIVOS	FRECUENCIA ABSOLUTA DE ACIERTOS	FRECUENCIA PORCENTUAL DE ACIERTOS
1	a	18	90%
	b	17	85%
	c	6	30%
	d	1	5%
2	a	20	100%
	b	15	75%
	c	10	50%
	d	3	15%
3	a	17	85%
	b	12	60%
	c	6	30%
	d	2	10%

Haciendo un comentario a estos resultados, reactivo por reactivo, tenemos:

Reactivo 1: Observando los porcentajes de aciertos en cada sub reactivo se nota que en la comparación de números naturales los porcentajes son altos, pero en cuanto entran a tallar los números negativos, el porcentaje de aciertos disminuye drásticamente.

Reactivo 2: Cuando se trata de sumar enteros positivos hay un 100% de aciertos; pero cuando se trata de sumar positivos con negativos o negativos con negativos los porcentajes disminuyen notablemente.

Reactivo 3: Cuando se trata de restar donde el minuendo es mayor que el sustraendo el porcentaje de aciertos es alto; pero cuando la situación cambia el porcentaje de aciertos declina drásticamente. Incluso comprando los resultados del reactivo 2 (sumas de enteros) con los resultados del reactivo 3 (restas de enteros) los porcentajes de aciertos son inferiores en el reactivo 3. Al parecer la operación de sustracción de enteros es más complicada que la operación de adicción de enteros para los escolares.

Respecto a los resultados obtenidos en los reactivos 4 y 5 son los siguientes:

REACTIVO	ACERTÓ	NO ACERTÓ	NO RESPONDIÓ
4	3 (15%)	15 (75%)	2 (5%)
5	2 (5%)	14 (70%)	4 (20%)

El reactivo 4 es un típico problema de desplazamientos a la derecha (+) y a la izquierda (-). Para hallar la solución la operación a efectuarse es: $20 + (-30) + 10 = 0$. La respuesta es c). Solo un 15% acertaron.

El reactivo 5 es un típico problema donde se aplican números enteros. Las "deudas" se consideran negativos y los "haberes" se consideran positivos. La respuesta es b), solo un 5% acertaron.

En conclusión, lo que arroja esta pequeña prueba de conocimientos aplicado a modo de diagnóstico a una muestra de escolares, que se supone manejan correctamente los números enteros y sus propiedades, es que cuanto mayor participación tienen los números negativos en los problemas de la vida real es más complicado hallar las soluciones correctas; incluso es más difícil plantearlas.

En cuanto a la enseñanza – aprendizaje de las 4 operaciones básicas en nuestro país esta se inicia recién en el 1er grado de secundaria, con cierta introducción en el 5to y 6to grado de primaria en algunos colegios particulares. Según una muestra de textos escolares de matemática revisados para la ocasión, las estrategias didácticas utilizadas para la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros se hacen usando en los conceptos de "izquierda y derecha", "abajo y arriba", "debo y tengo", etc. Pero a criterio de la autora de la presente tesis son estrategias insuficientes que no logran calar en los aprendizajes de nuestros escolares, no producen aprendizajes significativos ni duraderos en el tiempo; por lo que se requiere innovar hacia otras estrategias didácticas donde el escolar, aparte de abstraer conceptos matemáticos con los números enteros, tenga la oportunidad de construir sus propios aprendizajes a través de la acción y manipulación de objetos. Para éste propósito se pretende adaptar las famosas regletas de Cuisenaire introducidas por Emile George Cuisenaire (1891-1976), quien propuso el aprendizaje de la aritmética de los números naturales y los números racionales no negativos mediante la manipulación de objetos (regletas) que le permita al escolar experimentar, relacionar, autocorregirse y deducir propiedades aritméticas por su propia cuenta.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. PROBLEMA GENERAL:

¿Qué efectividad tiene la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros?

1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS:

a) ¿Qué efectividad tiene la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros?
b) ¿Qué efectividad tiene la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros?
c) ¿Qué efectividad tiene la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la multiplicación de los números enteros?

d) ¿Qué efectividad tiene la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la división de los números enteros?

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVO GENERAL:

a) Comprobar la efectividad de la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de números enteros.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

a) Comprobar la eficacia de la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la adicción de números enteros.
b) Comprobar la eficacia de la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros.
c) Comprobar la eficacia de la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la multiplicación de números enteros.
d) Comprobar la eficacia de la adaptación de las regletas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la división de números enteros.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En concordancia con la realidad problemática expuesta en la sección 1.1 del presente proyecto de tesis titulado: “Adaptación de las regletas de Cuisenaire para la didáctica de la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros”, su ejecución está plenamente justificado porque pretende mejorar las estrategias didácticas que se tienen para la enseñanza – aprendizaje de las 4 operaciones básicas en el conjunto de los números enteros.

El propósito del presente trabajo es facilitar y hacer más asequible el proceso de enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros, para nuestros escolares.

CAPITULO II:
MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Bernal, C. (Los Santos – Panamá - 2011) realizó la investigación titulada: “Introducción a los Números Enteros”. En esta investigación de tipo descriptivo hizo énfasis en la necesidad de usar métodos y recursos para la enseñanza – aprendizaje del algebra de números enteros, relacionados con el entorno vivencial de los escolares, basados en los conceptos de “arriba y abajo”, “por debajo y por encima del nivel de mar”, actividades que según su propuesta permite a los escolares construir sus propios aprendizajes. También propone actividades y problemas sobre desplazamientos sobre una recta, usando los conceptos de “izquierda y derecha”, que según su parecer favorece a las siguientes capacidades:

- Razonar sobre la importancia y la relación estrecha que existe entre los números enteros con diversas situaciones del entorno.
- Interpretar estas diversas situaciones del entorno y traducirlas de manera simplificada utilizando los números enteros.
- Establecer el signo positivo (+) o negativo (-), del desplazamiento considerando como posición inicial el cero en cualquier representación gráfica de los números enteros.
- Describir sucesiones de desplazamientos para trasladarse hasta un punto final atravesando entre ellas otras no colineales.
- Proporcionar argumentos para justificar por qué un número entero es menor o mayor que otro.

Vilchez, M. (2015) es Master Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria – Especialidad Matemática de la Universidad de Granada (España). Propone la Unidad Didáctica: “Números Enteros”. Reconoce que los números enteros en operaciones matemáticas son los que presentan la mayor dificultad en la enseñanza – aprendizaje de diversas operaciones, en especial los números enteros negativos. Recomienda una secuencia de aspectos a considerarse en la enseñanza previa a la aritmética de los números enteros:

- Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios.
- Reconocimiento y conceptualización en contextos reales.
- Significado y uso de las operaciones con números enteros.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso del paréntesis en cálculos sencillos.
- Utilización de la calculadora para operaciones con números enteros.
- Identificación de situaciones en la vida real que puedan ser representadas con los números enteros y sus operaciones.
- Representación de los números enteros en la recta real.

Según Vílchez, M, toda esta secuencia permite alcanzar en el escolar las siguientes capacidades:

- Identificar y adquirir destrezas en el empleo de los números enteros y las distintas operaciones siendo consciente de su significado y propiedades.
- Aplicar la divisibilidad en la resolución de problema asociados a situaciones cotidianas.
- Transmitir informaciones utilizando los números enteros de manera adecuada.
- Asignar a las distintas operaciones nuevos significados.
- Elegir la forma de cálculo: mental, escrita o con calculadora, más apropiada en cada situación.

- Interpretar los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida, los mismos que deben estar en estrecha relación con las siguientes competencias PISA:

PR : Pensar y razonar
A : Argumentar
C : Comunicar
M : Modelizar
RP : Resolver problemas
R : Representar
LS : Lenguaje Simbólico

Bustamante, E. (U.N. de Colombia – 2015), en su trabajo titulado: “El juego como estrategia didáctica en la enseñanza de los números enteros basado en aprendizajes significativos”, recopila el desarrollo de una experiencia de aprendizaje teórico – práctico, para alcanzar competencias básicas para diseñar, desarrollar e interpretar procesos de investigación en el campo educativo, en un contexto concreto.

Concretamente desarrolla la experiencia investigativa: “Estrategias didácticas para la enseñanza de operaciones básicas con números enteros a partir del juego en estudiantes del séptimo grado de la Institución Educativa Normal Superior Santa Teresita del Municipio de Sopetran, Antioquia”, en la que le permitió al autor caracterizar, problematizar, teorizar y plantear las estrategias didácticas necesarias, desde la perspectiva de una experiencia significativa teniendo como base el juego.

Las principales estrategias que utiliza Bustamante, E. son:

- La línea del tiempo, que viene a ser una línea recta que sirve para registrar y ordenar datos cronológicos como fechas y periodos de tiempo de forma clara y sencilla. En ella debe haber un punto referencial que divide a la línea del tiempo en 2 partes: antes del cero (negativo) y después del cero (positivo). Los escolares deben crear líneas del tiempo relacionados a sus vidas. Por ejemplo, el punto cero puede ser la fecha de su nacimiento.

- La recta numérica, en la que ubica un punto para indicar el cero, luego a su izquierda se ubican los números negativos y a su derecha los números positivos.

  En esta recta, el escolar hace desplazamiento a la derecha (+) y desplazamientos a la izquierda (-), partiendo desde el origen cero, registrando el punto (número) final del conjunto de desplazamientos.
- Polígono de desplazamientos, son polígonos de varios lados incluidos sus diagonales. Se coloca un número entero positivo en uno de sus vértices (salida) y se colocan números enteros positivos y negativos en los segmentos que forman los lados del polígono y sus diagonales, en los demás vértices del polígono y los puntos de intersección de las diagonales se dejan círculos en blanco, en los que los escolares irán colocando el número entero que le corresponde al desplazamiento efectuado hasta el punto o círculo, y; así sucesivamente, el escolar irá avanzando hasta llegar al círculo final (llegada) en el que colocará el número resultado de todos los desplazamientos efectuados hasta la llegada.

El propósito de estos juegos es favorecer el desarrollo de elementos del pensamiento numérico en el escolar a través de estrategias que permitieran expresar con números enteros la información acerca de situaciones relativas y prácticas mediante la lúdica mamática y potenciar una formalización de estos objetos matemáticos que permita su manipulación operatoria en dos operaciones fundamentales la adición y sustracción.

Posteriormente, todos estos juegos los propone a través de Tics especiales que se prestan a actividades lúdicas.

Finalmente, aplica instrumentos apropiados para determinar los resultados de los aprendizajes basados en estos juegos lúdicos. La conclusión fue que estas estrategias resultaron eficaces.

Rojas, J.- Ariza, A. (Colombia, Bogotá – 2013) realizaron la investigación: "Propuesta Didáctica para la enseñanza de los números enteros". Este trabajo pretende evidenciar la importancia que tiene la enseñanza de los números enteros, siendo este de bastante complejidad, el cual debe buscar por diversos medios generar un aprendizaje significativo en los escolares. Para este propósito optaron como metodología la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la misma que permite, a través de ciertas actividades, que el escolar construya sus propios aprendizajes.

La teoría de situaciones didácticas de Brousseau (TSDB) es un modelo de interacción de un sujeto en cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquision "anterior" de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético". Para que esto funcione, el profesor ya ha planeado la situación didáctica de modo que existan momentos en que los alumnos interactúan con el problema, presenten conflictos cognitivos, se propicie la discusión y el debate y, también hagan preguntas.

Finalmente, los autores llegan a la conclusión de que la teoría de situaciones didácticas de Brousseau permite potenciar cualquier aprendizaje de manera significativa, dependiendo de la habilidad de cada persona. Mucho dependerá de la habilidad del docente para generar estas situaciones didácticas.

CId, E. (Universidad de Zaragoza, España; 2013), realizó el trabajo: “La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión”. La bibliografía didáctica sobre los números negativos los agrupa en tres grandes áreas:

- Propuestas de enseñanza
- Dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos; e
- Implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo.

En lo que se refiere a las propuestas de enseñanza hace una clasificación de las distintas propuestas de enseñanza de los números enteros y sus distintas operaciones. Cabe mencionar, por ejemplo, la propuesta “inductiva” que consiste en presentar al escolar regularidades operativas tales como

$$
\begin{array}{ll}
5-3=2 & 4\cdot 3=12\\
5-2=3 & 4\cdot 2=8\\
5-1=4 & 4\cdot 1=4\\
5-0=5 & 4\cdot 0=0
\end{array}
$$

Para luego pedir al estudiante continuar estableciendo resultados, como

$$
\begin{array}{ll}
5-(-1)=6 & 4\cdot(-1)=-4\\
5-(-2)=7 & 4\cdot(-2)=-8\\
5-(-3)=8 & 4\cdot(-3)=-12
\end{array}
$$

También cabe destacar la propuesta “deductiva”, que consiste en añadir al conjunto de los números naturales su simétrico respecto a la adición y definir las operaciones en ese nuevo conjunto numérico de manera que se conserve la estructura algebraica de los números naturales, es decir, las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y de la multiplicación, así como también la propiedad distributiva.

Otra propuesta de enseñanza que presenta la autora (Cid, E.) es la introducción a los números enteros por medio de modelos, que consiste en la presentación de los números enteros basada en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los escolares o que les puede resultar más atractivo. Se supone que los escolares a partir de su experiencia manipulativa y mental con estos modelos pueden “dar sentido” a las reglas operativas y, posteriormente, por analogía extenderla a los números enteros. También se les atribuye la función del recuerdo, pues se espera, que, en caso de olvido de las reglas de cálculo, el escolar pueda reconstruirlas con ayuda del modelo.

Estos modelos pueden ser “intuitivos”, “físicos”, “concretos”.

Por otro lado, gran parte de la investigación se dedica a la aritmética de los números enteros negativos, llegando a la conclusión de que entre las 4 operaciones básicas la más complicada para los escolares es la sustracción, por la confusión que se produce por el signo de resta (-) con el signo (-) los números negativos. Hace un listado de los principales errores que cometen los escolares como producto de estas confusiones.

Bonilla, D.- Parraguez, M. (Pontifica Universidad Católica de Chile; 2007). Son autores del trabajo de investigación: “Construcción Didáctica de los Números Enteros desde la Teoría: Los modos de pensamiento”. Este trabajo, según los propios autores, tiene por objetivo mostrar la construcción didáctica y matemática del sistema de números enteros (Z; +; x), como una propuesta de enseñanza-aprendizaje en la formación inicial de profesores partiendo desde la teoría de “los modos de pensamiento” de Ana Serpienska; teoría que presenta (Z; +; x) desde tres perspectivas: a) El número entero como un representante de una clase de equivalencia, b) como un conjunto de números positivos, negativos y el cero y, como un punto en la recta numérica.

Además, sustentan las evidencias que muestran la articulación de los tres modos de pensar Z.

A estos tres modos de presentar al conjunto de números enteros los llama: a) Analítico -Estructural (AE); b) Analítico – Aritmético (AA) y, c) Sintético-Geométrico (SG).

Según Ana Serpienska, estos tres modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. Estos dependen de los tipos de relaciones y objetos que se evocan al momento de pensar en un objeto algebraico o al intentar resolver un problema o tarea.

La principal diferencia entre los modos “Sintético” y “Analítico” es que en el modo sintético los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata de describirlos de manera natural; mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente y son construidos solamente por la definición (axiomas) de las propiedades de los elementos.

Castillo, C. (Colombia-2004); es autor de la tesis: “Aprendizaje de la Adición y sustracción de Números enteros a través de objetos físicos”, para obtener la maestría en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

El objeto de éste trabajo que diseñar e implantar objetos físicos para la enseñanza-aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros en los estudiantes del 7° grado de I.E Alfonso López Pumajero de la ciudad de Palmira (Colombia). Castillo nos Dice:

Para que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados.

Para el propósito de la investigación construyeron dos modelos de objetos físicos de aprendizaje (OFA): Uno llamado el “Tren de los Números Enteros” y otro llamado “Bicolores de conteo”. El primer OFA simula pistas de trenes con carriles que “sube” para números “positivos” y con carriles que “bajan” para números “negativos”.

Desplazamientos de trencitos de juguete, en bajadas y/o subidas, representan las operaciones de adición o sustracción, según sea el caso. El segundo OFA lo constituyen palillos de colores, negro para los enteros positivos y rojo para los enteros negativos. Para representar la operación de adición se usa la regla: “Un palillo negro se anula con otro palillo rojo”.

Para la validación de estos objetos físicos de aprendizaje se utilizó dos grupos de alumnos: Uno de control y otro experimental. Los resultados en el grupo experimental, con quienes se utilizó los OFA, fueron muy significativos respecto al grupo de control a quienes se les enseñó la suma y resta de los números enteros con estrategias didácticas tradicionales.

2.2 BASES TEÓRICAS

2.2.1 Construcción axiomática de los números enteros. -

Sea $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$ el conjunto de los números naturales y,

Sea $N \times N = \{(a,b)/a \in N \; y \; b \in N\} el \; producto \; Cartesiano \; de \; N \; con \; N$

Definamos en $N \times N$ la relación R del siguiente modo:

$(a;b)\; R(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Así por ejemplo, $(4;3)$ está relacionada con $(8;7)$ porque sucede que $4 + 7 = 3 + 8$; en cambio $(5;3)$ no está relacionada con $(7;2)$ porque sucede que $5 + 2 \neq 3 + 7$.

Esta relación R es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Propiedad reflexiva:

$(a;a)\; R\; (a;a) \Leftrightarrow a + a = a + a$

Propiedad simétrica:

Si, $(a;b)\; R\; (c;d) \Leftrightarrow (c;d)\; R\; (a;b)$

$a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a$

Propiedad Transitiva:

Si, $(a;b)\ R\ (c;d)\ y\ (c;d)\ R\ (e;f) \Leftrightarrow (a;b)\ R\ (e;f)$

$$a+d=b+c\ y\ c+f=d+e \Leftrightarrow a+f=b+e$$

Y como se sabe toda relación de equivalencia en un conjunto A no vacío produce clases de equivalencia; esto es, se produce una partición de A.

En efecto, la relación R en $N \times N$ genera clases de equivalencia:

$Clase\ (0;0)=\{(0;0),(1;1),(2;2),(3;3),\dots\}$

$Clase\ (1;0)=\{(1;0),(1;2),(2;3),(3;4),\dots\}$

$Clase\ (0;1)=\{(0;1),(1;2),(2;3),(3;4),\dots\}$

$Clase\ (2;0)=\{(2;0);(3;1);(4;2);(5;3),\dots\}$

$Clase\ (0;2)=\{(0;2);(1;3);(2;4);(3;5),\dots\}$

.... y así sucesivamente.

Para mayor simplicidad a cada una de estas clases se les puede representar

$Clase\ (0;0) \equiv 0$

$Clase\ (1;0) \equiv 1$

$Clase\ (0;1) \equiv -1$

$Clase\ (2;0) \equiv 2$

$Clase\ (0;2) \equiv -2$

. .
. .
. .

$Clase\ (100;0) \equiv 100$

$Clase\ (0;100) \equiv -100$

.... y así sucesivamente.

Al conjunto de las infinitas clases equivalentes, así generadas, se les representa por $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el cual recibe el nombre de: Conjunto de números enteros.

Para un mejor tratamiento a este conjunto se le puede partir en 3 partes:

$z = -z \cup \{0\} \cup +z$

Donde:

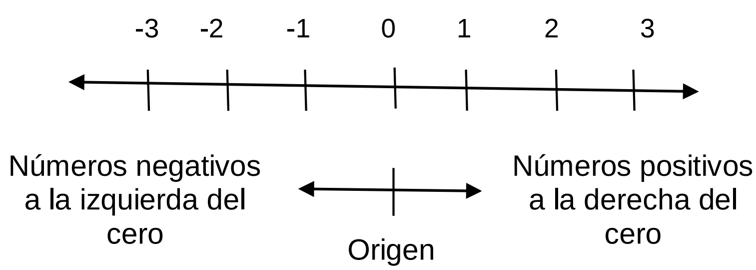
$-z = \{\ldots, -3, -2, -1\}$: $Conjunto\ de\ enteros\ negativos$

$\{o\}$: $Conjunto\ con\ elemento\ cero$

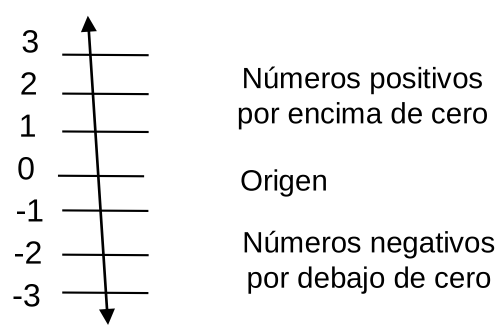
$+z = \{1, 2, 3, \ldots\}$: $Conjunto\ de\ enteros\ positivos$

2.2.2 CONSTRUCCIÓN EMPÍRICA DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS. -

Esta construcción, basada en la experiencia cotidiana, se basa en los conceptos de "longitud", "a la izquierda de", "a la derecha de", "arriba de", y "debajo de". Pero, para que tengan surtido estos conceptos tiene que haber "un punto de inicio" u "origen", el cual es costumbre denotarlo con el entero cero. Así, de manera natural se construye la recta numérica horizontal:



Ahora la recta numérica vertical es:



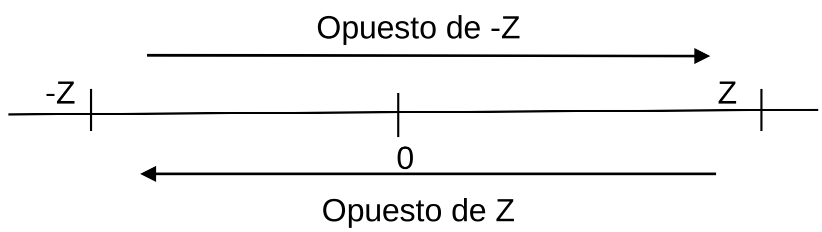
2.2.3 OPUESTO DE UN ENTERO Y VALOR ABSOLUTO. -

a) Opuesto de un entero Z:

Sea $Z = (a; b)$ un entero cualquiera según la definición axiomática de número entero, llamamos opuesto de Z a la expresión: $-Z = (b; a)$

Si se aplica doblemente se refiere a la situación original: $-(-Z) = (a; b)$, el cual se lee: el opuesto del opuesto de $(a; b)$ es el propio $(a; b)$;

Ahora si Z es un entero cualquiera con la definición empírica entonces su opuesto se denota por –Z; esto quiere decir que si Z es negativo su opuesto es positivo y, si Z es positivo su opuesto es negativo. Para mejor entendimiento véase el siguiente diagrama:



Si aplicamos el operador “opuesto de” (-) un número par de veces a un número entero Z se obtiene como resultado el mismo entero Z. y, si aplicamos un número impar de veces se obtiene como resultado -Z.

Ejemplo.

$$-\left(-\left(-(-(7))\right)\right) = 7$$

$$-\left(-\left(-(-(-7))\right)\right) = -7$$

b) Valor absoluto de Z:

Sea Z un entero cualquiera; llamamos valor absoluto de Z a la siguiente expresión:

$$|Z| = \begin{Bmatrix} Z; si\ Z \geq 0 \\ -Z; si\ Z < 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplos:

$$|47| = 47 \text{ y } |-47| = -(-47) = 47$$

2.2.4 OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS. -

a) Adición:

En la definición axiomática de números enteros, la adición es una operación en la que a cada par de enteros se le asigna otro entero, bajo la siguiente regla:

$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$

Ejemplo:

$$(7; 21) + (15; 8) = (22; 29)$$

$$-14 \quad + \quad 7 \quad = \quad -7$$

La adición goza de las propiedades de cerradura conmutativa, asociativa, tienen elemento opuesto y tienen elemento neutro que es el cero (0).

En cambio, en la definición empírica de número entero, para la adición se usa la siguiente regla:

i. Si los sumandos tienen el mismo signo se adicionan sus valores absolutos y se coloca el mismo signo a la suma.
ii. Si los sumandos tienen distinto signo se restan sus valores absolutos y se coloca el signo del que tienen el mayor valor absoluto a la suma resultante.

Ejemplos:

$$-17 + -25 = -42$$

$$-17 + 25 = 8$$

$$17 + (-25) = -8$$

b) Sustracción. -

Es la operación en la que hay un minuendo (a) y un sustraendo (b) en la que se obtiene como resultado una diferencia (d).

Según la definición axiomática de número entero, la regla para la sustracción es:

$$(a; b) - (c; d) = (a; b) + (d; c)$$

Ejemplo:

$$(23; 15) - (27; 9) = (23; 15) + (9; 27) = (32; 42)$$

$$8 \quad - \quad (18) \quad = \quad 8 \quad + \quad (-18) = \quad -10$$

En cambio, en la definición empírica de número entero la regla para sustraer es:

$$a - b = a + (-b)$$

Ejemplo.

$$18 - 23 = 18 + (-23) = -5$$

$$-27 - (-17) = -27 + 17 = -10$$

La sustracción de números enteros es cerrada, pero no goza de las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro ni elemento opuesto.

2.2.5 Operaciones de multiplicación y división de enteros. -

a) Multiplicación:

En la definición axiomática de número entero, para multiplicar 2 números enteros se usa la siguiente regla:

$$(a; b) \times (c; d) = (ac + bd;\ ad + bc)$$

Ejemplo:

$$(9; 5) \times (3; 8) = (27 + 40; 72 + 15)$$

$$4 \times (-5) = -20$$

La multiplicación goza de las propiedades de cerradura, conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro.

Además, usando la definición axiomática no se requiere usar la ley de los signos; el signo del producto aparece de manera automática, como se puede ver en el ejemplo anterior.

Es cambio, si usamos la definición empírica, para hallar el producto de una multiplicación se requiere la ley de los signos: signos iguales resulta positivo; signos desiguales resulta negativo.

Ejemplo.

$$(-9) \times (-6) = 54$$

$$17 \times (-5) = -85$$

b) División:

La división de enteros no goza de la propiedad de cerradura; es decir no siempre se puede hallar el cociente de dos números enteros. Sin embargo, se admite para casos prácticos la división inexacta usando la definición empírica de números enteros, de tal modo que se cumpla el algoritmo de la división: $D: d = c$ con residuo $r < d$.

Si $r = 0$ entonces la división es exacta; pero si $r \neq 0$ entonces la división es inexacta. Además, la división de enteros debe cumplir:

$$D = dc + r$$

Para hallar el signo del cociente, también se usa la ley de signos para la división: signos iguales resulta positivo, signos desiguales resulta negativo.

Ejemplo:

$-40 \div -20 = 2$

$-40 \div 20 = -2$

$-67 \div 18 = -3$ con $r = -13$ porque $-67 = 18(-3) + (-13)$

La división no es conmutativa ni asociativa, tampoco posee elemento neutro, además no existe la división por cero.

2.2.6 REGLETAS DE CUISENAIRE

Los pedagogos Maria Montesori y Friedrich Froebel usaron regletas para representar números naturales y racionales positivos como recursos didácticos para el aprendizaje de los niños.

En 1945, el belga Georges Cuisenaire introdujo las regletas que llevan su nombre, para su uso con profesores.

Cuisenaire público su revista en 1952, cuyo título fue “Los números en colores”, desde entonces, se usan en las escuelas primarias de todo el mundo.

Las regletas de Cuisenaire son un juego versátil utilizado bajo el enfoque lógico – manipulativo para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética de los números naturales. Se pueden usar con niños desde los 3 años, permitiendo que se comprendan mejor los números y sus propiedades incluidas las operaciones básicas, facilitando el auto aprendizaje y la transición hacia el cálculo mental.

Las regletas de Cuisinaire permiten al niño experimentar por su cuenta fomentando el desarrollo de la autonomía del mismo mientras busca respuesta de forma independiente, precisamente por su enfoque lógico – manipulativo. Aprender manipulando objetos para deducir propiedades y relaciones es un recurso didáctico muy efectivo.

Un paquete básico de regletas de Cuisenaire está constituido por 10 regletas de longitudes de 1 cm hasta 10 cm, de distintos colores:

Color	Blanco	Rojo	Verde Claro	Púrpura	Amarillo	Verde Oscuro	Negra	Marrón	Azul	Naranja
Long. (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Un juego puede estar constituido por 5 (50 piezas) paquetes básicos o más (más de 50 piezas). Cada pieza es un prisma de base cuadrada de 1 cm cuadrado.

Gracias a este material, los niños pueden aprender la descomposición de los números e iniciarse en el cálculo estimulando su memoria visual, táctil y auditiva que proporciona su manipulación.

Para su uso y aplicación se recomienda 2 fases:

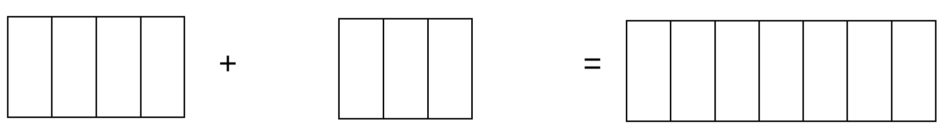
Fase cualitativa: El niño descubre y manipula las regletas según su color, su tamaño y simetría, también forma figuras.

En suma, el niño se familiariza con el material.

Fase cuantitativa: Compara tamaños, relaciona tamaños (menor o mayor), representa números, descompone números. Se inicia en las 4 operaciones básicas de los números naturales, deduce propiedades (Conmutativa, asociativa, elementos neutros, distributiva, etc.) de las operaciones básicas por su propia cuenta con asesoramiento del profesor.

Las ideas básicas que se manejan para la aritmética de las 4 operaciones básicas son como sigue:

Adición: Se unen las regletas y luego se suman sus tamaños.

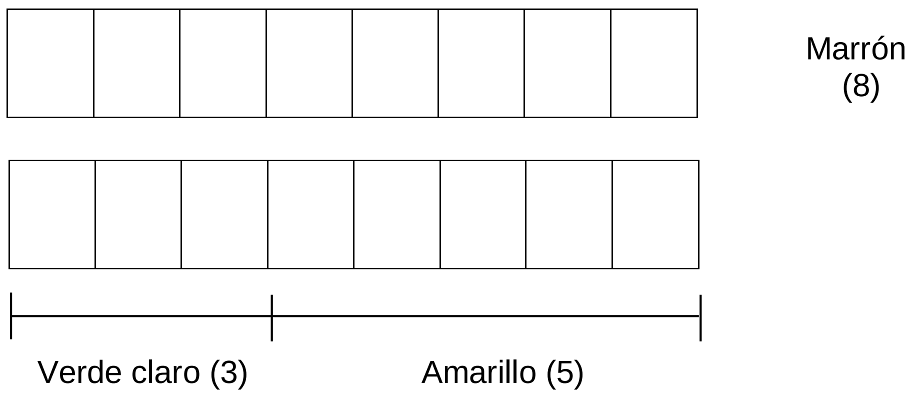


Purpura + Verde Claro = Color Negro

4 + 3 = 7

Sustracción: Se descompone la regleta minuendo (M) en 2 regletas, se quita una de ellas que hace de sustraendo (S) y la otra, que queda hace de diferencia (D).

Ejemplo:

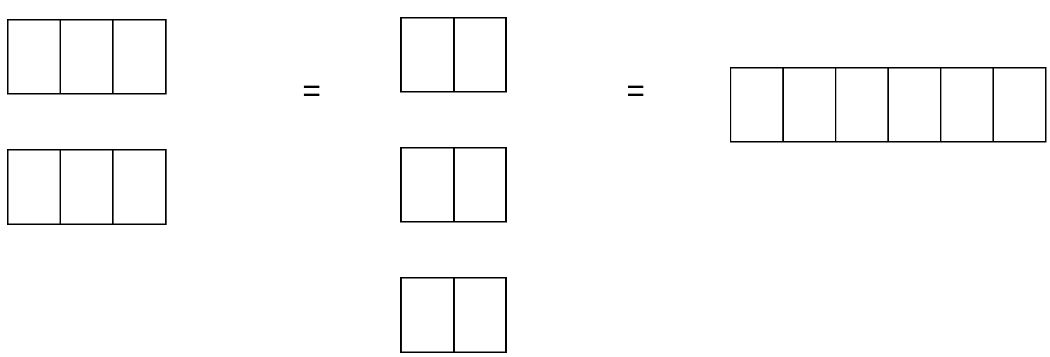


Si se quita el verde claro queda la regleta amarilla $(8 - 3 = 5)$

Si se quita la regleta amarilla queda la regleta verde claro $(8 - 5 = 3)$

Multiplicación: Se arman paquetes de regletas de igual tamaño (igual color), y luego se suman sus tamaños.

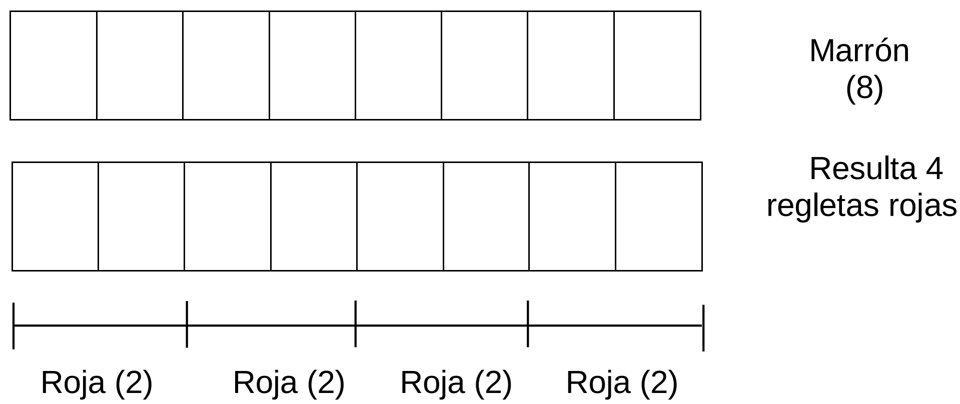
Por ejemplo, para indicar la multiplicación $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$, el procedimiento a indicarse al niño es armar 2 paquetes de regletas de tamaño 3 ó 3 paquetes de regletas de tamaño 2.



2×3 $\qquad$ 3×2 $\qquad$ 6

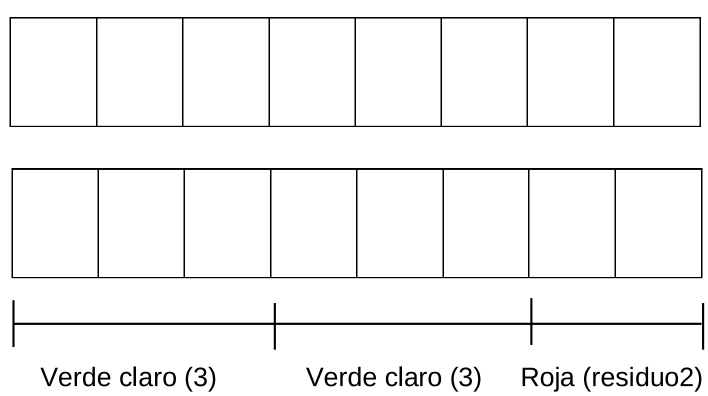
División: Se descompone la regleta dividiendo (D) en tantas regletas de igual tamaño (divisor), luego se cuenta la cantidad de regletas de igual tamaño. Esta cantidad es el cociente (C).

Por ejemplo, para diseñar con regletas la operación 8:2=4, el niño debe proceder del siguiente modo:



Por ejemplo, dado es para una división exacta donde el residuo es cero. El niño se dará cuenta (por su supuesto que con situaciones creadas por el profesor) que no siempre es posible descomponer un número (una regleta) en tantas partes de igual tamaño, es decir, que la división no siempre es exacta, sino que puede resultar un residuo mayor que cero.

El siguiente ejemplo ilustra la división $8 : 3 = 2 \text{ con residuo } 2$



Ejemplos de este último tipo se aprovecha para que el niño vaya tomando conocimiento de la siguiente ecuación.

$$D = dc + R$$

2.3 DEFINICIONES CONCEPTUALES

a) DIDÁCTICA

La Didáctica es la rama de la pedagogía que se encarga de buscar métodos y técnicas para mejorar la enseñanza –aprendizaje, definiendo las pautas para conseguir que los conocimientos lleguen de una forma más eficaz a los educandos.

La Didáctica permite abordar, analizar y diseñar esquemas y planes destinados a plasmar las bases de cada teoría pedagógica.

La Didáctica es la disciplina que sienta los principios de la educación y sirve a los docentes a la hora de seleccionar y desarrollar contenidos, persigue el propósito de ordenar y respaldar tanto los modelos de enseñanza como el plan de aprendizaje.

Se llama acto didáctico a la circunstancia de la enseñanza para cual se necesitan ciertos elementos: el docente (quien enseña) el discente (quien aprende) y el contexto de aprendizaje.

En la actualidad existen 3 modelos didácticos bien diferenciados: el normativo (concentrados en los contenidos), el incitativo (focalizado en el alumno) y el aproximativo (centrado en la construcción que el alumno haga con sus nuevos conocimientos).

b) COMPETENCIA

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21),” La Competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético”.

“Ser competente supone comprender la situación que se debe afrontar y evaluar las posibilidades que se tiene para resolverla. Esto significa identificarlos conocimientos y habilidades que uno posee o que están disponibles en el entorno, analizar las combinaciones más pertinentes a la situación y al propósito, para luego tomar decisiones; y ejecutar o poner en acción la combinación seleccionada".

c) CAPACIDADES

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21) "las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas".

"Es importante considerar que la adquisición por separado de las capacidades de una competencia no supone el desarrollo de la competencia".

Ser competencia es más que demostrar el logro de cada capacidad por separado: es usar las capacidades combinadamente y ante situaciones nuevas".

d) ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 22), los estándares de aprendizaje "Son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la educación básica, de acuerdo a la secuencia que sigue la mayoría de estudiantes que progresan en una competencia determinada. Estas descripciones son holísticas porque hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas".

Los estándares figuran en el Currículo Nacional tienen 8 niveles según el nivel educativo, los ciclos y grados educativos.

e) DESEMPEÑOS

Son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). Son observables en una diversidad de situaciones o contextos. No tienen carácter exhaustivo, más bien ilustran algunas actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel.

2.4 ADAPTACIÓN DE LAS REGLETAS DE CUISENAIRE PARA LA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

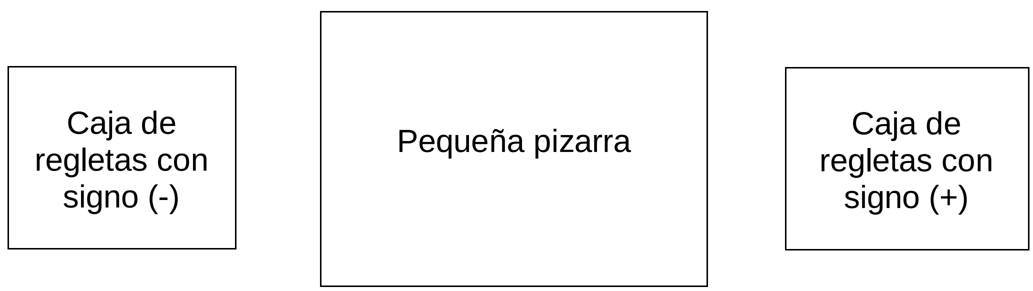
Como se vio en la sección 2.3 originalmente las regletas de Cuisenaire fueron introducidas por Georges Cuisenaire (1945) como material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las 4 operaciones básicas con los números naturales y los racionales positivos, bajo un enfoque lógico – manipulativo, facilitando en los niños (desde los 3 años) el autoaprendizaje y la transición hacia el cálculo mental, ya que aprenden manipulando objetos para deducir resultados de diversas operaciones básicas y combinadas y, sus propiedades correspondientes. Se ha demostrado en muchos países que las regletas de Cuisenaire es un recurso muy efectivo para los aprendizajes iniciales de las 4 operaciones básicas, para después tender hacia la abstracción generalizada haciendo uso de los algoritmos apropiados.

La adaptación que se propone en la presente investigación consiste en la utilización de 2 paquetes o juegos de regletas: una para representar a los números enteros negativos y otra para representar a los números enteros positivos. Para posibilitar esta adaptación se pinta con plumón indeleble el signo (-) a todas las regletas de uno de los paquetes y, con signo (+) al otro paquete. De esta manera, las regletas pintadas con el signo (+) representarán a los números enteros positivos y las regletas pintadas con el signo (-) representarán a los números enteros negativos.

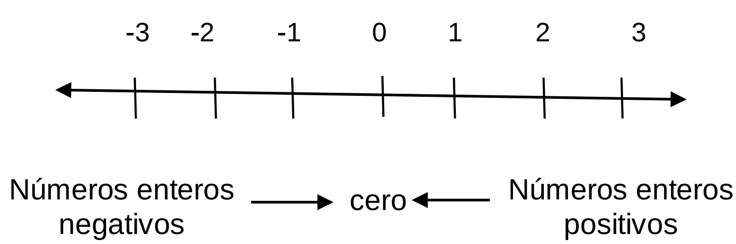
2.4.1 Bandeja de Operaciones (BO)

Es un material didáctico ideado para esta ocasión, el cual permitirá operar aritméticamente con la adaptación que se está proponiendo. Esta consiste en una especie de pizarra pequeña especialmente preparada con material acrílico de dimensiones 35x35cms; en cuyo lado izquierdo se coloca el paquete o caja de regletas con signo (-) y en cuyo lado derecho se coloca la caja de regletas con signo (+). La disposición final, de las 2 cajas y la pizarra pequeña es la siguiente:

BANDEJA DE OPERACIONES



Esta disposición de la BO, las regletas (-) a la izquierda de la pizarra, la pizarra al centro y, las regletas (+) a la derecha de la pizarra nos recuerda la disposición muy conocida de los números enteros sobre una recta (recta numérica de los números enteros). La pizarra vacía (sin ninguna regleta en su superficie) representa al entero cero (0).



Una condición inicial para el uso y aplicación de la BO es que el niño o niña sepa manejar correctamente las regletas de Cuisenaire; es decir maneje correctamente las dos (2) fases que se recomendó en la sección 2.3.

2.4.2 Reglas para operar en la BO

De aquí para adelante, el niño o niña (alumno) deberá simplemente conocer y manejar ciertas reglas estrictas para manipular las regletas de Cuisenaire con la adaptación propuesta, dependiendo del tipo de operaciones aritméticas que el profesor las plantea o que ellos mismos se plantean. La manipulación de las regletas se hace sobre la superficie de la pizarra de la BO.

El manejo de las regletas en la BO necesariamente debe pasar por 2 fases:

FASE MANIPULATIVA: Uso estricto de las regletas para representar operaciones (colocar, mover, ordenar, quitar regletas).

FASE SIMBÓLICA: A continuación, inmediata debe representarse simbólicamente, usando numerales, a la operación concreta que se ejecutó en la BO (sobre la superficie de la pizarra). Posteriormente se puede seguir el camino inverso.

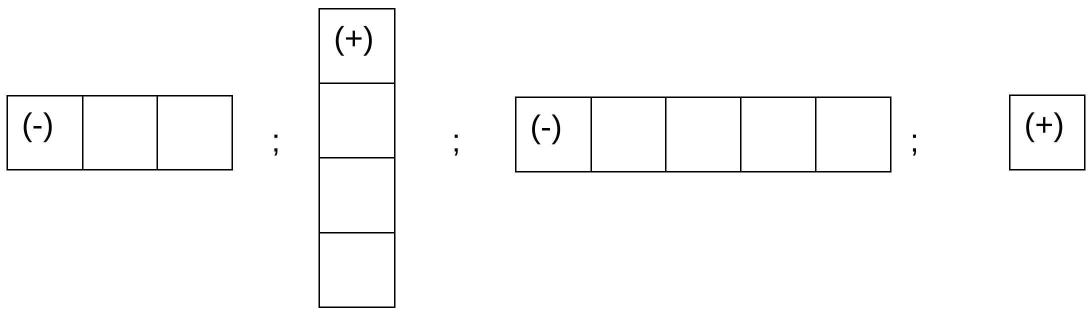
He aquí el conjunto de reglas que se debe usar en la BO:

a) Regla para ordenar número enteros:

Colocada en la BO un conjunto de regletas de Cuisenaire de las ya adaptadas, el niño o niña debe ser capaz de realizar el ordenamiento siguiente:

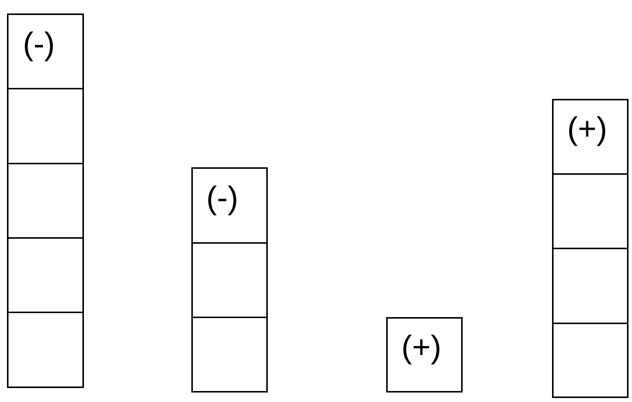
Las regletas con signo (-), (si las hubiera) se colocan en línea recta de derecha a izquierda en forma ascendente de acuerdo al tamaño. Las regletas como signo positivo (+), (si las hubiera). Se colocan al lado derecho de las regletas con signo (-), en línea recta de izquierda a derecha en forma ascendente de acuerdo al tamaño. Una vez realizado estos movimientos se concluye que toda regleta a la izquierda de otra siempre representa a un número entero que es menor que el número que representa la regleta del lado derecho.

Ejemplo: Ordenar, de menor a mayor, las siguientes regletas:



El alumno debe proceder del siguiente modo:

Fase manipulativa:



Fase simbólica:

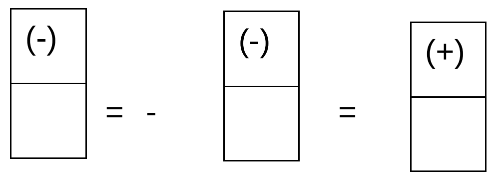
$-5 < -3 < 1 < 4$

b) Regla para el operador “opuesto de” un número entero:

Cualquier regleta con el operador “opuesto de” (cuyo signo es “-”) por delante permite ser reemplazado por otra regleta del mismo tamaño o color pero de signo contrario. El signo “-” del operador “opuesto de” se pinta en la BO con plumón.

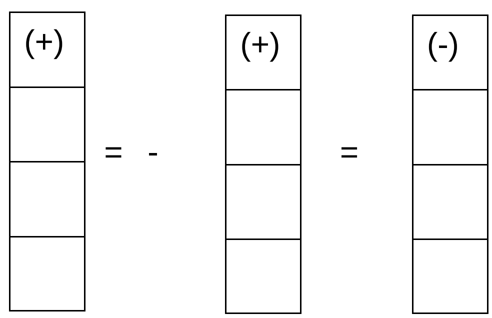
Ejemplos:

Opuesto de:



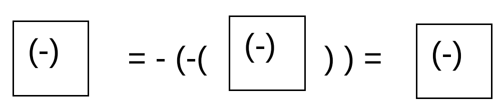
Opuesto de: (-2) = - (-2) = 2

Opuesto de:



Opuesto de: (4) = - (4) = - 4

Opuesto del opuesto de:



Opuesto del opuesto de: (-1) = - (- (-1)) = -1

Nota: El signo “-” se pinta con plumón sobre la BO. Aprendida la regla del “opuesto” el alumno debe ser capaz de hallar el resultado de aplicar varias veces el operador “opuesto de” y luego sacar conclusiones.

c) **Regla para la operación de adición de enteros**

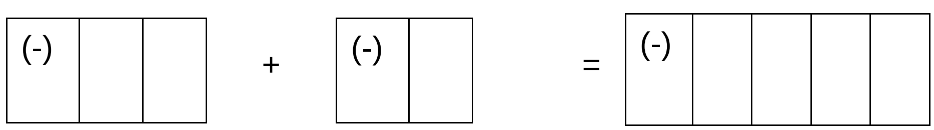
Esta regla tiene 3 partes:

R1: Para hallar la suma de 2 regletas del mismo signo estas se reemplazan por otra regleta del mismo signo cuyo tamaño es la suma simple de los tamaño de ambas regletas.

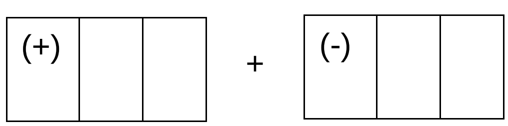
R2: Dos regletas del mismo tamaño, pero de signos contrarios se anulan mutuamente regresando a sus cajas de origen, no quedando nada (0) sobre la BO.

R3: Para hallar la suma de dos regletas de tamaños distintos y signos contrarios se comparan sus tamaños para aplicar la segunda parte (R2) de la regla, el resultado es la parte o regleta que queda de la regleta más grande.

Ejemplos:

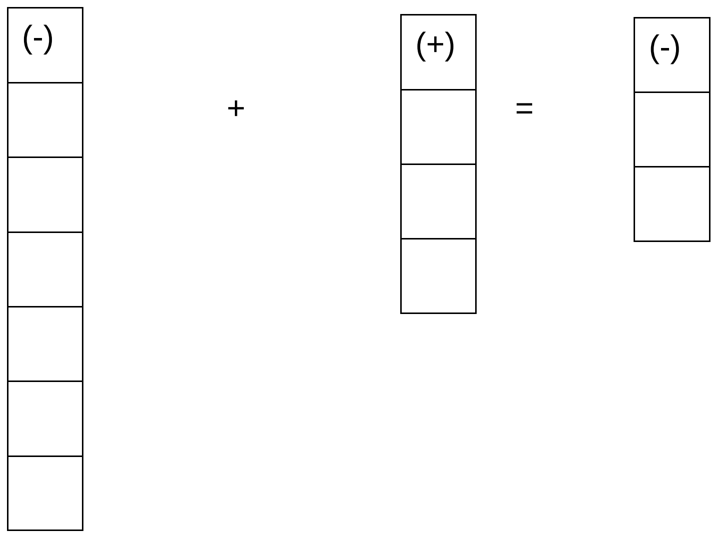


-3 + (-2) = -5



= Ninguna regleta

3 + (-3) = 0

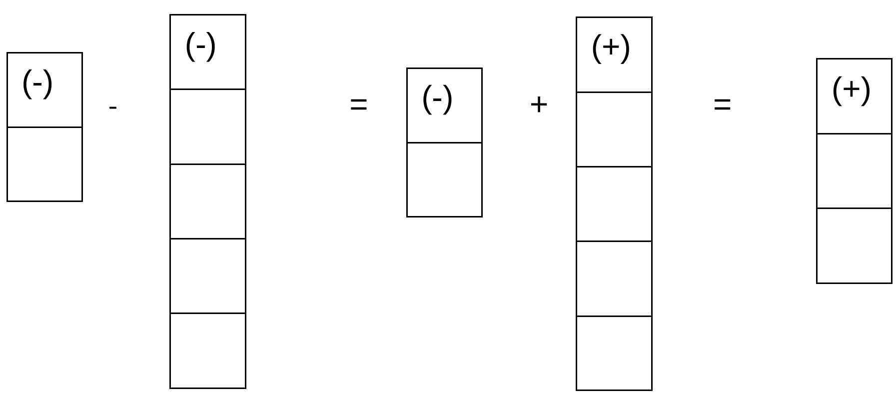


-7 + 4 = -3

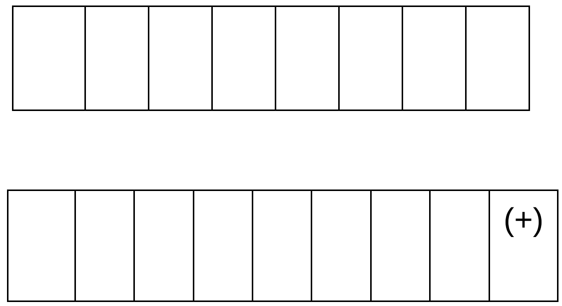
d) Regla para la sustracción de números enteros

Para hallar la diferencia de 2 regletas, se suma al primero de la izquierda el opuesto de la segunda.

Ejemplos:



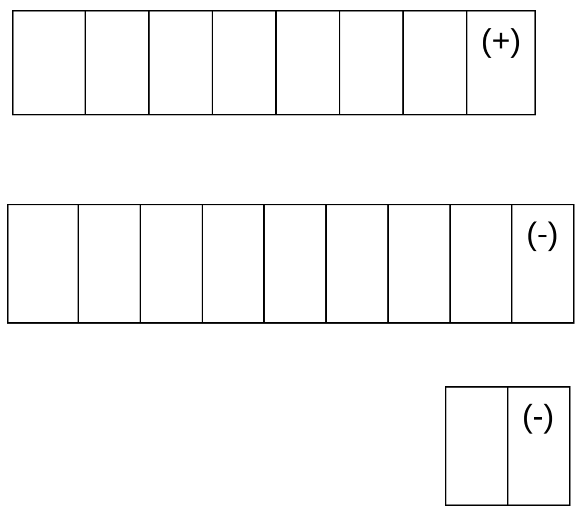
-2 - (- 5) = - 2 + 5 = 3



- 7 -

9

Es lo mismo que:



+ 7 +

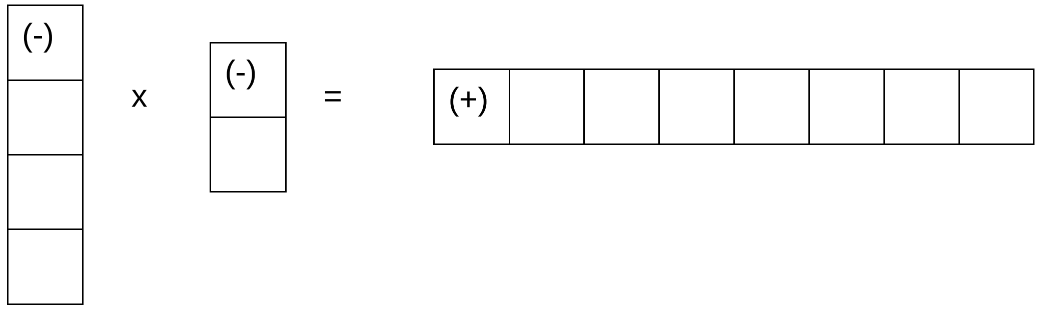
- 9

-2

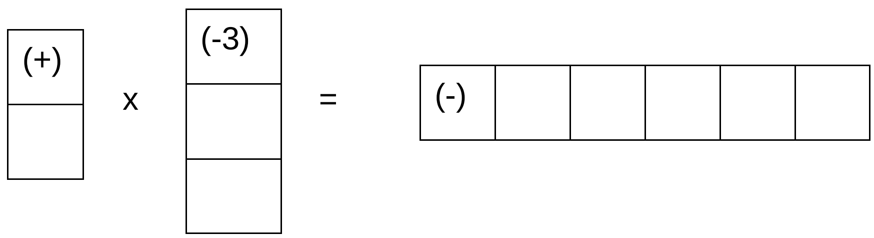
e) Regla para la multiplicación y división de números enteros

Para hallar el producto o el cociente de 2 regletas, hasta hallar el producto o cociente de sus tamaños y luego colocarle el signo que le corresponde aplicando la “ley de los signos”: A signos iguales le corresponde el signo (+). A signos desiguales les corresponde el signo (-).

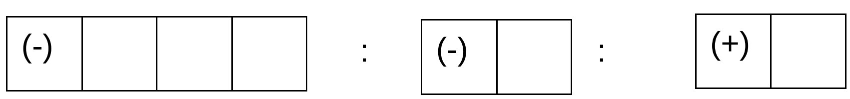
Ejemplos:



-4 x -2 = 8



2 x (-3) = -6



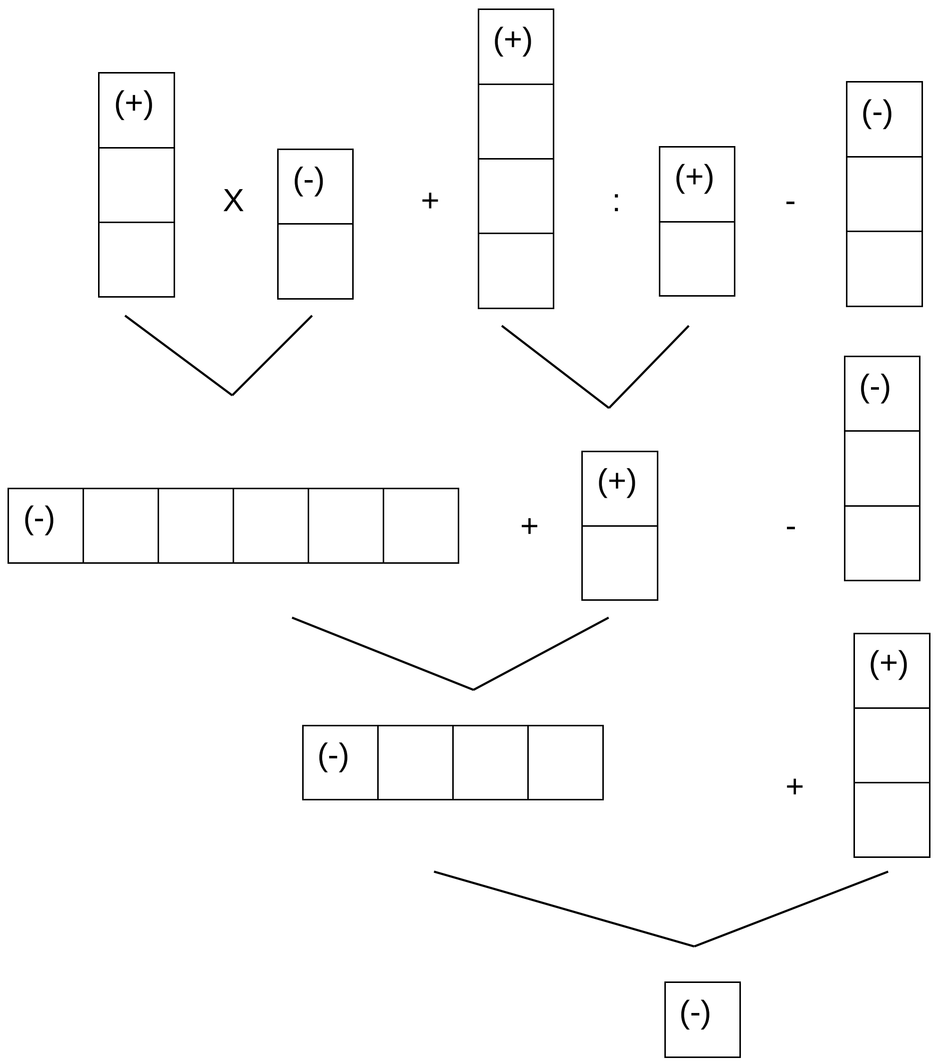
- 4 : -2 : 2

f) Regla para las operaciones combinadas de números enteros

Se aplican las jerarquías operativas:

En una operación con números enteros donde aparecen las 4 operaciones básicas, en primer lugar, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones y en segundo lugar se resuelven las adiciones y sustracciones.

Ejemplo:



Simbólicamente:

3 x (-2) + 4 : 2 - (-3)

-6 + 2 + 3

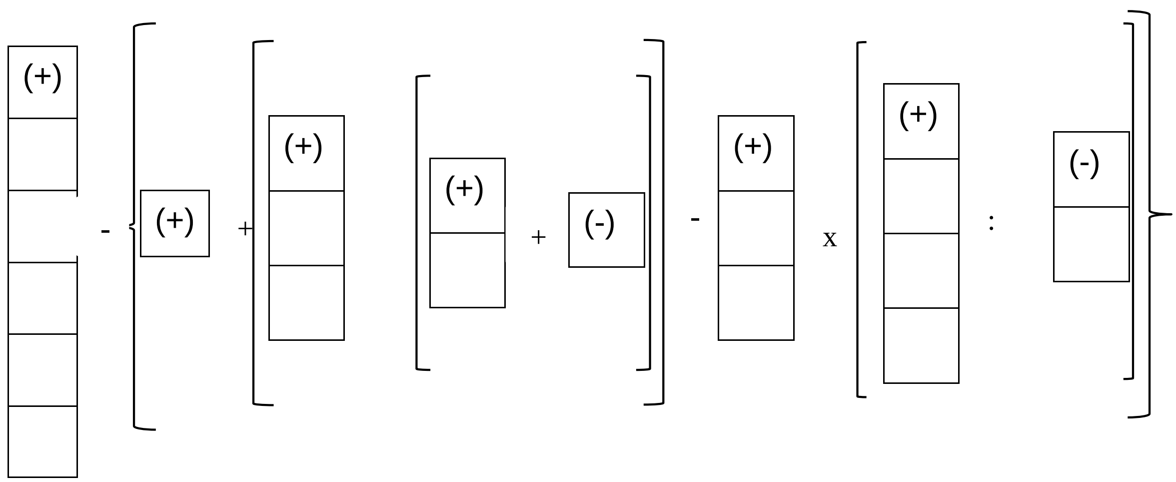
-4 + 3

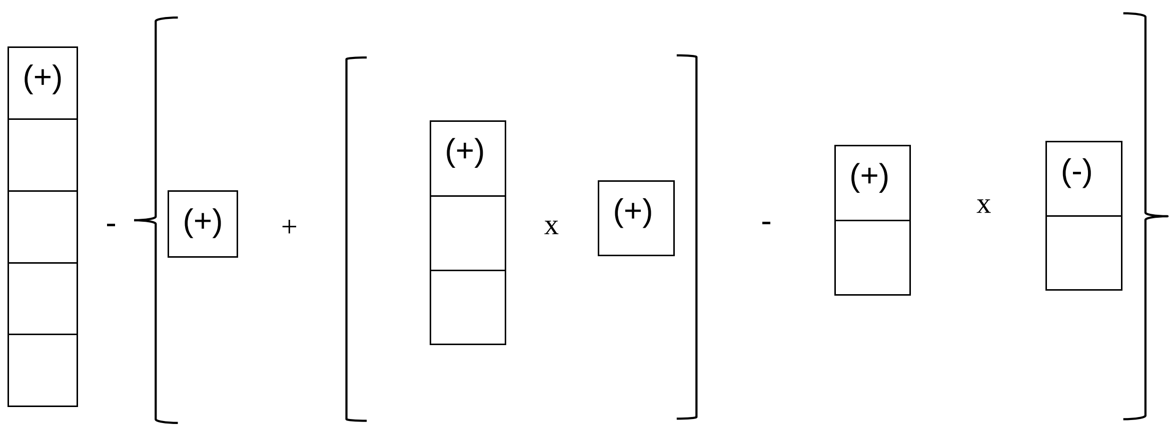
- 1

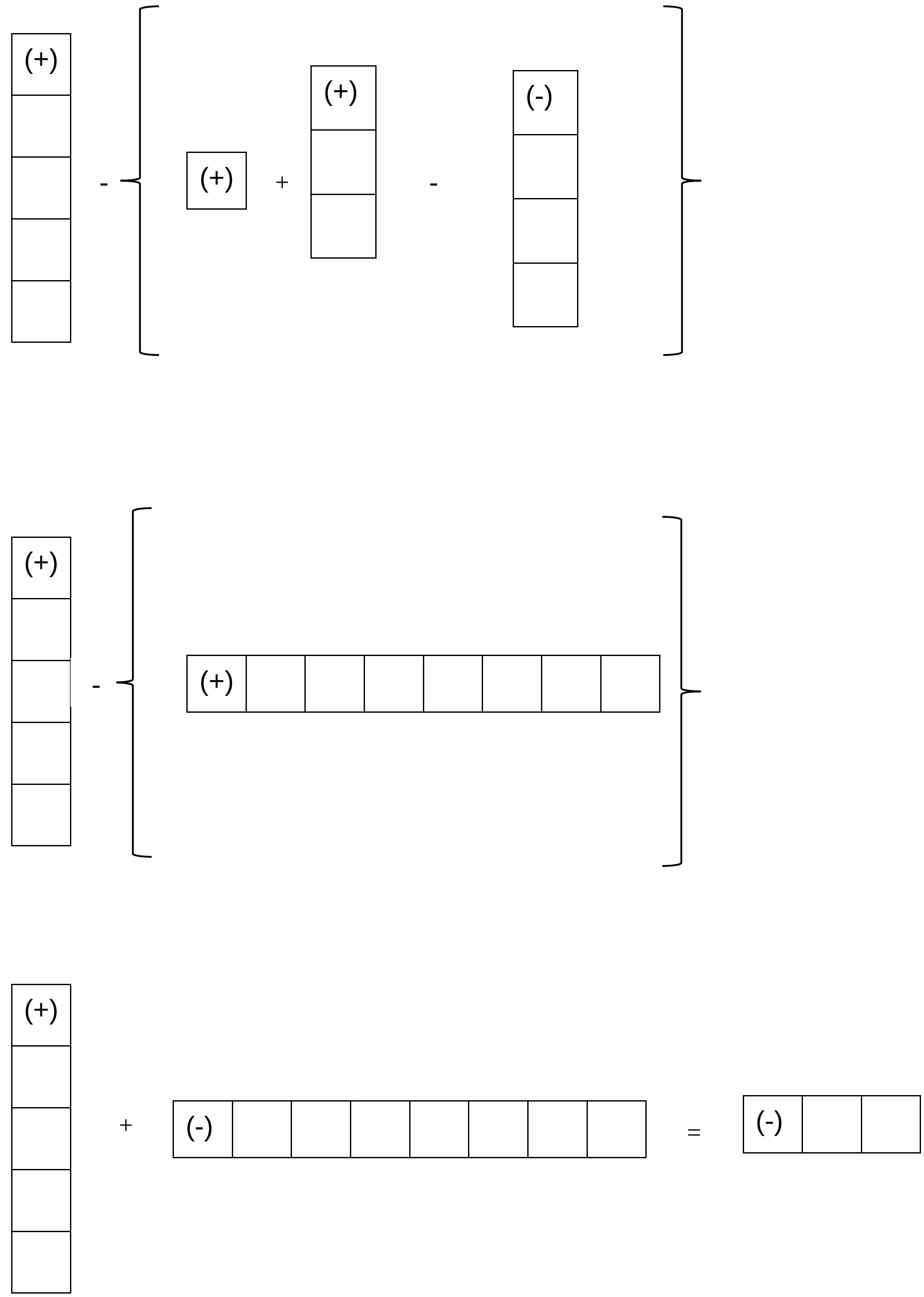
g) Regla para operaciones con signos de colección

En una operación donde aparecen paréntesis, corchetes y llaves, primero se ejecutan las operaciones que llevan paréntesis, en segundo lugar se ejecutan las operaciones con corchetes y; en tercer lugar se ejecutan las operaciones que llevan llaves.

Ejemplo:







Simbólicamente:

$5 - \left\{1 + \left[3 \times \left(2 + (-1)\right)\right] - 2 \times (4 \div -2)\right\}$

$5 - \{1 + [3 \times 1] - 2 \times (-2)\}$

$5 - \{1 + 3 - (-4)\}$

$5 - \{4 + 4\}$

$5 - \{8\}$

$5 + (-8)$

-3

2.4.3 Adaptación empírica del modelo didáctico propuesta a problemas de la vida cotidiana

Paralelamente a la enseñanza y aprendizaje de las reglas operativas vistas en la sección 2.4.2 el alumno tiene que ir vinculando las regletas de signo negativo (-) con vivencias y experiencias que tienen que ver con conceptos tales como “a la izquierda”, “debajo de”, “debo”, “falta”, etc. Y las regletas de signo positivo (+) con vivencias y experiencias vinculadas a los conceptos “a la derecha”, “encima de”, “tengo”, “sobra”, etc.

Naturalmente que esta vinculación tiene que ser resaltando la presencia de un “punto de referencia” o “punto neutro” que vienen a ser representados por el entero llamado cero (0); ya que no tiene sentido plantear situaciones problema con los conceptos simultáneos “a la izquierda y derecha”, “debajo y encima de”, “debo y tengo”, “falta y sobra”, etc. sin considerar necesariamente el llamado “punto de referencia”.

El alumno debe quedar claramente convencido de la relatividad de la posición de los puntos sobre una recta (ya sea horizontal o vertical), que en este caso está representado por números enteros, cuando se ha considerado un “punto de referencia” que puede ser un objeto en particular, una superficie, un punto cualquiera en el espacio, etc.

Ya posteriormente, en estudios superiores, el concepto de “punto de referencia” le servirá al alumno para comprender y manejar conceptos mucho más complejos tales como “sistemas de referencia” como por ejemplo el plano cartesiano bidimensional o tridimensional. Para este último propósito, el de comprender y manejar el concepto de “punto de referencia” que está íntimamente ligado al concepto del cero entero, el docente debe ser capaz de crear situaciones problemas tales como, por ejemplo:

Sobre el piso de una habitación hay una mesa de altura 90 cm y, sobre el centro de la mesa hay una caja pequeña de altura 25 cm, y sobre la caja está ubicada una naranja. Además, en el piso de la habitación, exactamente debajo de la mesa y la caja, hay un agujero cuya profundidad es 12 cm en cuyo fondo hay una moneda de oro.

1. Si tomamos como “punto de referencia” el piso de la habitación, expresar con el número entero apropiado la:
   a) Posición de la naranja
   b) Posición de la moneda
2. Si tomamos como “punto de referencia” la superficie de la mesa, expresar con el número entero apropiado la:
   a) Posición de la naranja
   b) Posición de la moneda

Si, el alumno ha comprendido claramente el concepto de número entero, el significado de “debajo de y encima de” y, el concepto de “punto de referencia” debe ser capaz de responder del siguiente modo:

Situación 1:

a) Posición de la naranja: $90 + 25 = 115\ cm$

b) Posición de la moneda: $-12\ \ cm$

Situación 2:

a) Posición de la naranja: $25\ cm$

b) Posición de la moneda: $-90 + (-12) \ = -102\ cm$

2.5 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

2.5.1 HIPÓTESIS GENERAL

La adaptación de las regletas de Cuisenaire que se propone en la presente investigación mejora notablemente el proceso de enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros, en la relación a las estrategias didácticas tradicionales.

2.5.2 HIPÓTESIS ESPECIFICAS

H1: La adaptación de las regletas de Cuisenaire como modelo didáctico propuesto es efectiva para la enseñanza – aprendizaje de la adición de números enteros.

H2: La adaptación de las regletas de Cuisenaire como modelo didáctico propuesto es efectiva para la enseñanza – aprendizaje de la sustracción de números enteros.

H3: La adaptación de las regletas de Cuisenaire como modelo didáctico propuesto es efectiva para la enseñanza – aprendizaje de la multiplicación de números enteros.

H4: La adaptación de las regletas de Cuisenaire como modelo didáctico propuesto es efectiva para la enseñanza – aprendizaje de la división de números enteros.

CAPITULO III:
METODOLOGÍA

3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

3.1.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Es una investigación aplicada o empírica porque se busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se tienen a cerca de las regletas de Cuisenaire; a través de una adaptación que se propone, para lograr consecuencias prácticas como es mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de los números enteros en niños y niñas del primer grado de secundaria.

3.1.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación tiene un diseño no experimental, pues no hay una manipulación deliberada de variables. Además, es de tipo transversal correlacional – causal.

3.1.3 ENFOQUE UTILIZADO EN LA INVESTIGACIÓN

Se utiliza el enfoque cuantitativo, pues se trabaja con aspectos observables y medibles de la realidad educativa en un tema específico de la matemática: La enseñanza – aprendizaje de las cuatro (4) operaciones básicas en el conjunto de los números enteros.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

3.2.1 POBLACIÓN

La población está constituida por todos los alumnos del primer grado de media de la I.E Básica Regular CETI – Andahuasi - Sayán distribuida en 3 Aulas cuyo tamaño es de 63 alumnos matriculados en el presente año 2018.

3.2.2 MUESTRA

Como muestra se utilizará el aula A del primer grado de media, cuyo tamaño es 19, con 10 varones y 9 mujeres. Esta muestra se constituirá en el grupo experimental y, como grupo de control se utilizará el aula C de tamaño 22 con 12 alumnos varones y 10 mujeres. Son muestras no probabilísticas de tipo intencional.

3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

3.3.1 DEFINICIÓN DE VARIABLES PRINCIPALES Y VARIABLES SECUNDARIAS (DIMENSIONES).

En el presente trabajo se consideran dos (2) variables principales e independientes (uno no depende del otro) con sus correspondientes variables secundarias (dimensiones).

X: Aprendizaje de la aritmética de los números enteros con estrategias didácticas tradicionales en el grupo de control.

Variables secundarias:

X1: Aprendizaje de la adición de números enteros con estrategias didácticas tradicionales, en el grupo de control.

X2: Aprendizaje de la sustracción de números enteros con estrategias didácticas tradicionales, en el grupo de control.

X3: Aprendizaje de la multiplicación de números enteros con estrategias didácticas tradicionales, en el grupo de control.

X4: Aprendizaje de la división de números enteros con estrategias didácticas tradicionales, en el grupo de control.

Y: Aprendizaje de la aritmética de los números enteros, usando como estrategia didáctica la adaptación de las regletas de Cuisenaire, en el grupo experimental.

Variables secundarias:

Y1: Aprendizaje de la adición de números enteros utilizando la adaptación de las regletas Cuisenaire, en el grupo experimental.

Y2: Aprendizaje de la sustracción de números enteros utilizando la adaptación de las regletas Cuisenaire, en el grupo experimental.

Y3: Aprendizaje de la multiplicación de números enteros utilizando la adaptación de las regletas Cuisenaire, en el grupo experimental.

Y4: Aprendizaje de la división de números enteros utilizando la adaptación de las regletas Cuisenaire, en el grupo experimental.

3.4 ESTRATEGIA METODOLÓGICA

El conjunto de procedimientos y actividades que se desarrollan para medir las variables principales y secundarias, tanto en el grupo control como en el grupo experimental, son las siguientes:

En el grupo de control:

Actividad 1: Enseñanza de las cuatro (4) operaciones básicas en el conjunto de los números enteros con apoyo de las estrategias didácticas basada en los conceptos de “izquierda y derecha”, “arriba y abajo” y “debo y tengo”.

Actividad 2: Medición de los aprendizajes alcanzados con la actividad 1 utilizando dos (2) pruebas estándar con contenidos de ejercicios aritméticos (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) y planteamiento de problemas.

En el grupo experimental:

Actividad 1: Enseñanza de las cuatro (4) operaciones básicas utilizando como modelo didáctico las regletas de Cuisenaire, con la adaptación que se propone para operar con números enteros y luego reforzándose con las estrategias tradicionales basadas en los conceptos de "izquierda y derecha", "arriba y abajo" y "debo y tengo".

Actividad 2: Medición de los aprendizajes logrados con la actividad 1 utilizando dos (2) pruebas estandart con contenidos de ejercicios aritméticos (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) y planteamiento de problemas.

3.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

3.5.1 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS A EMPLEAR EN LA RECOPILACIÓN DE DATOS

a) Revisión y análisis de textos de matemática de primaria y secundaria en lo concerniente a la enseñanza de los números enteros.
b) Revisión y análisis del DCN y el Currículo Nacional en lo que respecta la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros.
c) Revisión y análisis del modelo didáctico propuesto por Georges Cuisenaire para la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números naturales.

3.5.2 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS A EMPLEAR PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES (CAPACIDADES Y DESEMPEÑOS)

a) Prueba de evaluación 1: Para evaluar los aprendizajes de las cuatro (4) operaciones básicas con 10 reactivos, en escala vigesimal.
   2 reactivos para sumas simples
   2 reactivos para restas simples
   2 reactivos para multiplicación simples
   2 reactivos para división simples
   2 reactivos para operaciones simples
b) Pruebas de evaluación 2: para evaluar los aprendizajes de problemas cuyo planteamiento y solución requiere del manejo de las 4 operaciones básicas en el conjunto de los números enteros. Esta prueba contendrá 5 problemas que irá en orden de dificultades. Cada problema bien resuelto vale 4 puntos en escala vigesimal, considerando los siguientes puntajes principales:
   Correcto planteamiento: 2 puntos
   Correcta solución y respuesta: 2 puntos
   Ambas pruebas se aplicarán de manera estandart tanto al grupo de control como al grupo experimental.

3.6 TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN

3.6.1 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA. -

Elaboración de cuadros comparativos, gráficos y cálculo de estadígrafos

3.6.2 ESTADÍSTICA INFERENCIAL. -

Comparación de medias, referidas a las evaluaciones promedios logradas en las pruebas de evaluación 1 y 2 de los grupos de control y experimental: Prueba T para muestras independientes.

CAPITULO IV:
RESULTADOS

4.1 APLICACIÓN DE LA ADAPTACIÓN DE LAS REGLETAS DE CUISENAIRE A UNA REALIDAD EDUCATIVA

Tomando como referencia la macro competencia N° 23: “Resuelve problemas de cantidad” y los estándares de aprendizaje diseñados para el nivel 6 (1° y 2° de secundaria) que aparecen en el Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), se diseñó una competencia más específica, un conjunto de capacidades y un conjunto de desempeños para la temática de la aritmética de los números enteros, los mismos que aparecen en el cuadro N°01.

Para una aplicación de las estrategias didácticas basadas en la adaptación de las regletas de Cuisenaire que se proponen en la sección 2.4 se consideró 2 aulas del primer grado de secundaria de la I.E. Básica Regular CETI de Andahuasi – Sayán.

El aula A con 19 alumnos se constituyó en el grupo experimental y el aula C con 21 alumnos se constituyó en el grupo de control.

Para ambos grupos se consideró los estándares de aprendizaje que aparecen en el cuadro N°01, con la única diferencia que en el grupo experimental se utilizó las regletas de Cuisenaire especialmente adaptadas para operar con números enteros negativos y positivos, por lo menos en la fase manipulativa y simbólica con ayuda de la bandeja de operaciones (BO), para luego pasar a la fase formal o estrictamente simbólica y operativa. En cambio, en el grupo de control se utilizó como estrategias didácticas los conceptos de “a la derecha de”, “a la izquierda de”; “arriba de”, “debajo de”;

“debo” y “tengo”; para luego pasar a la fase formal estrictamente simbólica y operativa.

En ambos grupos se usaron aproximadamente 5 sesiones de aprendizaje de 2 horas cada una.

4.2 EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES A LA LUZ DE LOS ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EN AMBOS GRUPOS

La evaluación de los aprendizajes, sesión a sesión, fue continua; pero para los propósitos de la presente investigación se aplicó 2 pruebas de desempeño estandart, con 5 reactivos cada una en escala vigesimal, a ambos grupos al final de la quinta sesión, con la finalidad de comparar el nivel de los aprendizajes logrados. Estas pruebas estandart se incluyen en anexos.

Los calificativos alcanzados en escala vigesimal por efecto de la suma de los puntajes de ambas pruebas estandart para cada uno de los grupos se dan en el cuadro N°02.

CUADRO N°01

COMPETENCIAS, CAPACIDADES Y ESTANDARES DE APRENDIZAJE PARA LA ARITMÉTICA DE NÚMEROS ENTEROS EN EL 1ER GRADO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA. MACRO COMPETENCIA N° 23: RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD

COMPETENCIA ESPECÍFICA	CAPACIDADES	ESTANDARES DE APRENDIZAJE
RESUELVE PROBLEMAS DE LA VIDA COTIDIANA CON NÚMEROS ENTEROS, REALIZANDO LAS 4 OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS COMBINADAS, RECONOCIENDO Y VALORANDO LA IMPORTANCIA DEL SISTEMA NÚMERICO DE LOS NÚMEROS ENTEROS	• Utiliza números enteros para expresar, comunicar y leer información de situaciones reales. • Ordena números enteros. • Suma números enteros. • Resta números enteros. • Multiplica números enteros. • Divide números enteros. • Calcula operaciones combinadas. • Resuelve problemas con números enteros.	• Utiliza números enteros para representar cantidades relativas utilizando los conceptos de “arriba”, “abajo”, “debo”, “tengo”, “derecha” y “izquierda”. • Dado un conjunto de números positivos y negativos los ordena de menor a mayor. • Calcula el valor absoluto de un número entero. • Realiza sumas con varios sumandos positivos, negativos y el cero. • Determina el opuesto de un entero. • Realiza restas de números negativos, positivos y; positivos y negativos. • Calcula productos y cocientes de números enteros usado la ley de los signos. • Realiza operaciones combinadas usando signos de colección. • Matematiza situaciones problemáticas con números enteros. • Resuelve problemas planteadas con números enteros y comunica sus resultados.

CUADRO N°02

CALIFICATIVOS OBTENIDOS EN LA APLICACIÓN DE LAS PRUEBAS DE DESEMPEÑO ESTANDART

SUJETO	GRUPO EXPERIMENTAL	GRUPO DE CONTROL
1	14	12
2	16	9
3	15	11
4	10	13
5	17	10
6	15	12
7	15	12
8	14	14
9	16	7
10	15	9
11	16	12
12	9	10
13	17	12
14	14	13
15	16	8
16	14	10
17	18	14
18	15	11
19	16	11
20	______	9
21	______	12

4.3 DESCRIPCIÓN DE LOS CALIFICATIVOS ALCANZADOS POR CADA GRUPO

A continuación, se han calculado diversos estadígrafos con la finalidad de comparar los calificativos alcanzados tanto por el grupo experimental como en el grupo control.

En el cuadro N°03 y gráfico N°01 se comparan los porcentajes de aprobados y desaprobados.

PORCENTAJES DE APROBADOS Y DESAPROBADOS EN EL GRUPO EXPERIMENTAL Y EL GRUPO DE CONTROL

SITUACIÓN	GRUPO EXPERIMENTAL (N=19)	GRUPO CONTROL (N=21)
APROBADOS	89,47	61,90
DESAPROBADOS	10,53	38,10
TOTAL	100,00	100,00

CUADRO N°03

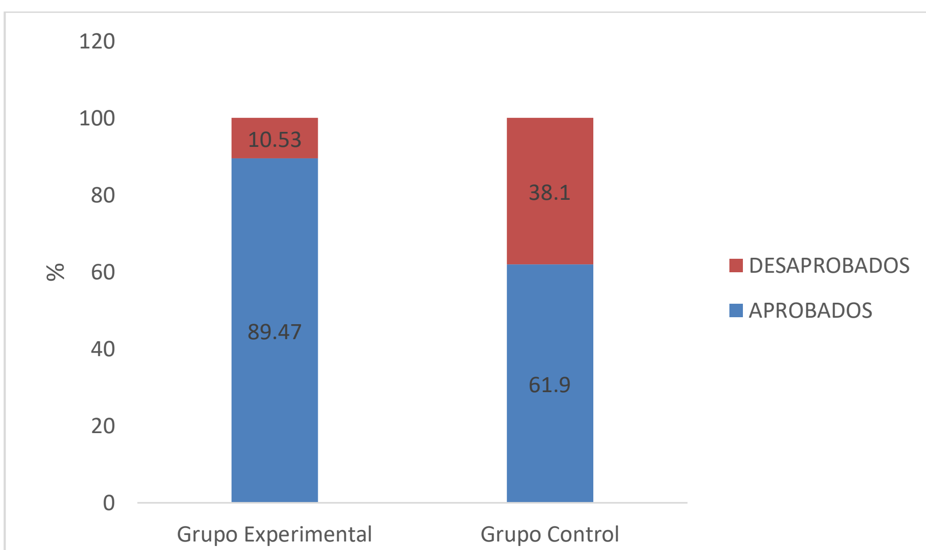


GRÁFICO N°01

En el cuadro N°04 se comparan varios estratigráficos centrales, estadígrafos de orden y estadígrafos de dispersión.

COMPARACIÓN DE ESTADÍGRAFOS DESCRIPTIVOS PARA LOS GRUPOS EXPERIMENTAL Y CONTROL

ESTADÍGRAFO	GRUPO EXPERIMENTAL	GRUPO DE CONTROL
Media	14,89	11,00
Mediana	15,00	11,00
Moda	16,00	12,00
Mínimo	9,00	7,00
Máximo	18,00	14,00
Cuartil 25	14,00	9,50
Cuartil 50	15,00	11,00
Cuartil 75	16,00	12,00
Rango	9,00	7,00
Varianza	4,88	3,60
Desviación Estandart	2,21	1,90

CUADRO N° 04

Comentando los resultados en base a la información contenida en los cuadros y gráficos se puede afirmar que en el grupo experimental hubo un 27.57% más de aprobados que en el grupo de control y, un 27.57% menos de desaprobados en el grupo experimental que en el grupo de control.

En cuanto a los estadígrafos centrales como la media, la mediana y la moda, prácticamente hay 4 puntos de diferencia entre los valores para el grupo experimental y el grupo de control; lo que induce a pensar que habría un 20% más de aprendizaje en el primer grupo que en el segundo grupo. Cabría pensar que esta diferencia positiva se debe precisamente por la influencia de las regletas de Cuisenaire adaptadas para trabajar con números enteros. Pero finalmente, la prueba que corroboraría esta última deducción es un contraste de hipótesis entre el rendimiento medio del grupo experimental y el rendimiento del grupo de control, contraste que se efectúa en la siguiente sección.

4.4 CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA COMPARAR LOS RENDIMIENTOS PROMEDIO POR GRUPOS

El rendimiento promedio observando en el grupo experimental ha sido 14,89 y el observado en el grupo de control ha sido en el orden de 11,00. ¿Está diferencia de 3,89 puntos observado implica que efectivamente el rendimiento promedio en el grupo experimental ha sido superior al rendimiento promedio del grupo de control? ¿O es que acaso esta diferencia es puramente casual?

Si se llegara a comprobar estadísticamente que el rendimiento promedio del grupo experimental es realmente superior al del grupo de control, esto implicaría que la estrategia didáctica basada en la adaptación de las regletas de Cuisenaire para la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros es realmente efectiva.

Para éste caso las hipótesis a plantearse son las siguientes:

H_0: El rendimiento promedio μ_1 del grupo experimental es igual al rendimiento promedio μ_2 del grupo de control $(\mu_1 = \mu_2)$.

H_1: El rendimiento promedio μ_1 del grupo experimental es superior al rendimiento promedio μ_2 del grupo de control $(\mu_1 > \mu_2)$.

Tipo de contraste: Comparación de medias normales para nuestras independientes (prueba T).

Los demás elementos a considerarse para éste contraste son:

Nivel de significación	: 1%
Lectura de T	: 2,42 (con 39 grados de libertad y probabilidad 99%)
Punto crítico C	: 1,55
Diferencia de medias	: 14,89 – 11,00 = 3,89
Potencia de contraste	: 99,99%
Decisión	: Se rechaza H_0 y se acepta H_1. Es decir, hay una diferencia altamente significativa entre el rendimiento promedio del grupo experimental con el rendimiento promedio del grupo de control, debido a que la diferencia de medias 3,89 es superior al punto crítico 1,55.

CAPITULO V:
RESULTADOS
DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 DISCUSIÓN

A la luz de los resultados expuestos en el capítulo IV se puede afirmar que se ha cumplido con todos los pasos necesarios para culminar con relativo éxito los propósitos que se perseguía a través de los objetivos e hipótesis formulados para el presente trabajo, proponiendo una adaptación de las regletas de Cuisenaire para ser usadas como material didáctico en la enseñanza – aprendizaje de la aritmética de los números enteros en el primer grado de la educación secundaria; adaptación que consiste en usar: a) Dos juegos de regletas uno para los números negativos y otro para los números positivos y, b) Una pizarra pequeña llamada “bandeja de operaciones” para trabajar con las regletas previamente establecidas.

El fundamento para esta adaptación está inspirado en el hecho de que está demostrado en el mundo entero la utilidad que presta las regletas de Cuisenaire para la aritmética de los números naturales en los primeros grados de la educación primaria y; porque además, también está demostrado que los aprendizajes logrados con la manipulación de objetos físicos y tangibles, que es el caso de las regletas, es mucho más efectivo y duradero que los aprendizajes logrados con objetivos puramente abstractos con reglas abstractas.

Ahora bien, manipular por manipular objetos físicos y tangibles no tiene sentido si no se establecen reglas apropiadas que permitan ver, tocar, comparar, cambiar, deducir y concluir en un resultado utilizando precisamente estos objetivos físicos como son las regletas que vienen a ser objetos que representan una cantidad absoluta determinada por su tamaño y un signo (+ ó -) que representa situaciones cotidianas como “derecha (+)”, “izquierda (-)”, “arriba (+)”, “abajo (-)”; “tengo (+)”; “debo (-)”; etc.; conceptos cuya relatividad no tendría sentido sin el concepto de “punto de referencia” que en éste caso es representado por el entero cero (0).

En cuanto a las reglas establecidas para operar con las regletas de Cuisenaire ya adaptadas (regletas negativas y regletas positivas) son las que se exponen en el Capítulo II, sección 2.4.2: Reglas para operar en la BO, que contiene:

a) Regla para hallar la regleta opuesta de cualquier otra regleta
b) Regla para sumar regletas
c) Regla para restas regletas
d) Regla para multiplicar y dividir regletas

Debe quedar claramente establecido que el papel que juegan estas reglas es temporal, ya que su función es únicamente ayudar a interiorizar o aprehender las reglas básicas de la aritmética de los números enteros, al principio de su enseñanza y aprendizaje, hasta que el escolar logre el dominio simbólico o formal. En la presente investigación se pudo constatar que tal dominio se empieza a notar apenas ya en la segunda sesión.

En resumen, por los resultados observados y comentados, es importante reconocer y valorar la adaptación de las regletas de Cuisenaire, que aquí se propone, porque al aplicarlo a una situación real y concreta ha quedado validada porque logra mejores aprendizajes que los recursos didácticos tradicionales.

5.2 CONCLUSIONES

El esfuerzo realizado en este trabajo está plenamente justificado y compensado por los resultados hallados y, porque de alguna manera se está contribuyendo en algo a la solución de una problemática educativa como es la enseñanza – aprendizaje de un capítulo importante de la matemática como es las 4 operaciones básicas con números enteros.

Las conclusiones más relevantes a las que se puede arribar en el presente trabajo son:

- Se ha cumplido con los objetivos trazados; pues el objetivo central fue comprobar la efectividad de la adaptación de las reglas de Cuisenaire en la didáctica de la enseñanza - aprendizaje de la aritmética de los números enteros; pues, al aplicarse esta adaptación a una realidad concreta de escolares del primer grado de educación secundaria se obtuvieron resultados muy satisfactorios en el grupo experimental compuesto por 19 escolares, en comparación con un grupo de control compuesto por 21 escolares.
- Se ha verificado las hipótesis planteadas. En efecto, se ha comprobado la validez de las hipótesis planteadas en este trabajo: pues se ha comprobado que el uso de las regletas adaptadas para números negativos y positivos mejoran notablemente la familiarización de los escolares con estos números y sus aplicaciones a situaciones concretas de la vida real, por los menos en los inicios en que los escolares se topan por primera vez con la necesidad de usarlos. Esta conclusión se apoya en un contraste de hipótesis entre los calificativos promedio logrados en grupo experimental con el calificativo promedio logrado en el grupo de control, en el que resulto que la diferencia de promedios es estadísticamente muy significativa, con una alta potencia, a favor del grupo experimental.
- Con la validación de las regletas de Cuisenaire en una realidad concreta de aprendizaje se ha corroborado una vez más la utilidad que tienen los materiales didácticos con objetos físicos y tangibles cuya manipulación siguiendo reglas predeterminadas, permiten a los escolares logren entender el significado de los números y sus propiedades y tener la oportunidad de realizar experiencias por su

cuenta y sacar sus propias conclusiones. En resumen, el aprendizaje mediante la manipulación de objetos físicos bajo reglas predeterminadas es sumamente provechosa.

5.3 RECOMENDACIONES

Se recomienda a la Facultad de Educación de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión:

- Experimentar el uso de las regletas de Cuisenaire adaptadas, como recurso para aprender la aritmética básica de números enteros, en otras realidades educativas, como por ejemplo el 5° o 6° grado de primaria, por lo menos para ir conociendo la existencia de números negativos y positivos para representar situaciones cotidianas y, ejecutar operaciones sencillas de sumas y restas. ¿Necesariamente se tiene que empezar la aritmética de los números enteros recién en el primer grado de educación secundaria? ¿No será que es posible iniciar más temprano como ocurre en otros países?
- Proponer la inclusión en el plan curricular de la carrera profesional de Educación en Matemática el tema de las regletas de Cuisenaire en los cursos de didáctica de la matemática.
- Proponer la publicación en la página virtual de la Facultad de Educación los resultados de la presente tesis, a modo de artículo científico, para difundir las bondades de las regletas de Cuisenaire como material didáctico para el aprendizaje inicial de la aritmética básica de los números enteros.

-

CAPITULO VI:
FUENTES DE INFORMACIÓN

6.1 FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

Bernal, C. (2011). Introducción a los números enteros. Edit. Funes. México.

Chevallard, M. (1997). Evolución de la problemática didáctica. Barcelona. España.

Castelnuevo. E. (2009). Didáctica de la matemática moderna. Edit. Trillas. México.

Hernandez, R. (2014). Metodología de la investigación. Edic. McGrau Hiill (6ta. Edición). México.

Gomes, R. y otros (1997). Matemática Moderna estructurada (tomo 2). Edit. Norma. Bogotá. Colombia.

Wills, D. y otros (1997). Matemática Moderna estructurada (tomo 3). Edit. Norma. Bogotá. Colombia.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Diseño curricular de EBR. Lima. Perú.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Perú.

Miranda, A. – Fortes, C. (2007). Dificultades del Aprendizaje de las matemáticas. Edit. Aljibe. España.

Nolasco, U. (2018). IBM-SPSS24. Edic. El artista informático. Lima. Perú.

Ojeda, E. (2018). Matemática 1, secundaria. Libro del área. Guía del docente. Edic. Corefo S.A.C. – Lima. Perú.

Ojeda, E. (2018). Matemática 1, secundaria. Libro de actividades. Edic. Corefo S.A.C. – Lima. Perú.

Valderrama, S. (2014). Pasos para elaborar proyectos de investigación científica. Edic. San Marcos. Lima. Perú.

6.2 ARTÍCULOS CIENTÍFICOS

Bernal, C. (2011). Introducción a los números enteros. Los santos. Panamá.

Bonilla, D. – Parraguez, M. (2007). Construcción didáctica de los números enteros desde la teoría: los modos de pensamiento. Pontificia Universidad Católica de Chile. Chile.

Bustamante, E. (2015). El juego como estrategia didáctica en la enseñanza de los números enteros basados en aprendizajes significativos. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Castillo, C. (2004). Aprendizaje de la adición y sustracción de números enteros a través de los objetivos físicos. Colombia.

Cid, E. (2013). La investigación didáctica sobre los números negativos. Universidad de Zaragoza. España.

Rojas, J. – Ariza, A. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de los números enteros. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. Colombia.

Vilchez, M. (2015). Números enteros. Universidad de Granada. España.

6.3 FUENTES ELECTRÓNICAS

Aprendemos las matemáticas con las regletas de Cuisenaire –Hop´toys.

https://www.bloghotys.es/aprendemos-las-matematicas-con-las-regletas-de-cuisenaire

El primer contacto con las regletas – Aprendiendo matemáticas.

https://aprendiendomatematicas.com/el-primer-contacto-con-regletas-las-regletas

Las regletas de Cuisenaire (Números en color).

MicrosoftPowerPoint-23-cinta-Muñoz-Catalan-Recurso.ppt

Que son las regletas de Cuisenaire / seeducansolos.

https://seeducsolos.wordpress.com/2011/07/11/que-son-las-regletas-de-cuisenaire/

Regleta de Cuisenaire-Wikipedia, la enciclopedia libre.

https://es.wikipedia.org/wiki/regletas-de-cuisenaire

Regleta Cuisenaire – Material Didáctico para MPCL.

https://sites.google.com/site/materialdidacticoparampcl/house/regleta-cuisenaire

Regletas numéricas Cuisenaire – Aprendizaje matemáticas.

https://aprendiendomatematicas.com/tienda/.../96-regletas-numéricas-cuisenaire.html

Regleta de Cuisenaire.

https://www.amazon.es/regletas-cuisenaire/s

ANEXOS

ANEXO 01

PRUEBA ESTÁNDAR DE EVALUACIÓN N° 1

1. **Hallar los resultados de las siguientes sumas**

    a) $-17 + 25 + (-13)$

    b) $-(-72) + (-45) + [-(12 + 13)]$

2. **Hallar los resultados de las siguientes restas**

    a) $856 - 902$

    b) $-425 - (-305)$

3. **Hallar los resultados de los siguientes productos**

    a) $(-13) \times (-12)$

    b) $(-7) \times 5 \times (-12) \times (-3)$

4. **Hallar los resultados de los siguientes cocientes**

    a) $-84 : 21$

    b) $(-184 : 4) : -23$

5. **Hallar los resultados de las siguientes operaciones**

    a) $\mathbf{-16(-4) + 500 : -25 - (56 - 25)}$

    b) $\mathbf{200 - [7(36 - 48) - 9(53 - 44)] : -33}$

ANEXO 02

PRUEBA ESTÁNDAR DE EVALUACIÓN N° 2

1. Si se ordenan de menor a mayor los enteros 81; -152; -55; 0; 63; **¿Cuál es la suma del tercer entero con el quinto entero?**

2. Juan recibe S/. 370 por un trabajo realizado. Se compra un pantalón por S/. 90 y un polo por S/. 55. Después recibe una propina de S/. 80. Finalmente se compra un par de zapatillas por S/.185; el resto lo reparte en partes iguales a sus 3 sobrinos. **¿Cuánto le tocó a cada sobrino?**

3. Carlos vive en el 6to. piso de un edificio que tiene 15 pisos por encima de la calle y 3 pisos por debajo de la calle (sótano). Cierto día estando en su piso subió 4 pisos, bajó 12 pisos y luego volvió a subir 5 pisos. **¿A cuántos pisos, por debajo o por encima de su piso, se encuentra Carlos?**

4. De acuerdo a una información dada por el servicio nacional de Meteorología e Hidrografía (SENAMHI), la temperatura promedio por las noches, en el mes de julio de 2018, que hizo en diferentes ciudades de nuestro país fue como sigue:

Piura: 26°C	Arequipa: 5°C	Huancavelica: -1°C
Cuzco: 2°C	Juliaca: -2°C	Andahuaylas: 4°C

¿En qué ciudades hizo más calor y más frio?

5. Luis ha sido contratado por una Empresa, a partir de enero de 2018, con un sueldo mensual de S/.2350. Gasta mensualmente: En alquiler de vivienda S/.650, en alimentación de su familia S/.820 y, por diversos servicios S/.430. En el mes de octubre se compró un televisor en S/.1250. Además, en los meses de julio y diciembre recibirá una gratificación de S/.500. **¿Cuál será el estado de cuentas de Luis a diciembre 2018?**

MIEMBROS DEL JURADO EVALUADOR

…………………………………………………………….
Mg. ELISEO TORO DEXTRE
PRESIDENTE

……………………………………………………………………
Mg. EDGAR TITO SUSANIBAR RAMIREZ
SECRETARIO

………………………………………………………..
Mg. ABRAHAN CESAR NERY AYALA
VOCAL

………………………………..…………………………………
Mg. NILO TELLO PANDAL.
ASESOR