



Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática Aplicada

Curva de Viviani, un estudio a partir de Geogebra y Octave

Tesis

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática Aplicada

Autor

Alexander Jesus Baltazar Garcia

Asesor

Dr. Jorge Luis Rojas Paz



Dr. Jorge Luis Rojas Paz
DOCENTE - UMFSC

Huacho – Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial – Sin Derivadas - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Reconocimiento: Debe otorgar el crédito correspondiente, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se realizaron cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de ninguna manera que sugiera que el licenciante lo respalda a usted o su uso. **No Comercial:** No puede utilizar el material con fines comerciales. **Sin Derivadas:** Si remezcla, transforma o construye sobre el material, no puede distribuir el material modificado. **Sin restricciones adicionales:** No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros de hacer cualquier cosa que permita la licencia.



UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN

LICENCIADA

(Resolución de Consejo Directivo N° 012-2020-SUNEDU/CD de fecha 27/01/2020)

FACULTAD CIENCIAS




ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

INFORMACIÓN

DATOS DEL AUTOR :		
NOMBRES Y APELLIDOS	DNI	FECHA DE SUSTENTACIÓN
Alexander Jesus Baltazar Garcia	75369789	17 de marzo del 2026
DATOS DEL ASESOR:		
NOMBRES Y APELLIDOS	DNI	CÓDIGO ORCID
Dr. Jorge Luis Rojas Paz	16698556	https://orcid.org/0000-0002-6077-4409
DATOS DE LOS MIEMROS DE JURADOS – PREGRADO:		
NOMBRES Y APELLIDOS	DNI	CÓDIGO ORCID
Mo. Carlos Francisco Goñy Ameri	15726541	https://orcid.org/0000-0001-5994-6712
Mo. Santiago Pedro Ravines Miranda	17837748	https://orcid.org/0000-0002-2879-2121
Mo. Hector Alexis Herrera Vega	40337667	https://orcid.org/0000-0002-7739-3012

Alexander Jesus Baltazar Garcia

CURVA DE VIVIANI, UN ESTUDIO A PARTIR DE GEOGEBRA Y OCTAVE

-  Quick Submit
-  Quick Submit
-  Facultad de Ciencias

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid::1:3491384151

Fecha de entrega

25 feb 2026, 5:40 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

25 feb 2026, 6:10 p.m. GMT-5

Nombre del archivo

TESIS_ALEX_BALTAZAR.pdf

Tamaño del archivo

1.1 MB

72 páginas

12.949 palabras

69.955 caracteres

10% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...




Filtrado desde el informe

- ▶ Bibliografía
- ▶ Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Exclusiones

- ▶ N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

- 9%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 3%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

DEDICATORIA

Dedico esta tesis con todo mi amor y gratitud a mis padres, quienes con su esfuerzo, sacrificio y constante apoyo han sido el pilar fundamental en cada etapa de mi vida. A ellos, por enseñarme el valor de la perseverancia y la importancia de la educación.

También dedico este trabajo a mis seres queridos y amigos cercanos, por creer en mí incluso cuando yo dudaba, y por acompañarme en este camino con palabras de aliento, paciencia y comprensión.

Alexander Jesus Baltazar Garcia

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente a Dios por darme la fortaleza, salud y sabiduría necesarias para culminar esta etapa tan importante de mi vida.

A mis padres, por su amor incondicional, sus enseñanzas y su constante respaldo emocional y económico; sin ustedes, este logro no habría sido posible.

A mi asesor de tesis, Dr. Jorge Luis Rojas Paz, por su guía, paciencia y orientación académica, que fueron claves en el desarrollo de este trabajo.

A los docentes que me formaron durante toda la carrera, gracias por compartir sus conocimientos y por motivarme a dar siempre lo mejor de mí.

A mis amigos y compañeros de estudio, por su apoyo, por los momentos compartidos y por caminar juntos en este proceso académico.

Finalmente, a todas las personas que, de una u otra forma, contribuyeron a la realización de esta tesis, mi más sincero agradecimiento.

Alexander Jesus Baltazar Garcia

ÍNDICE

DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTO	iv
ÍNDICE DE TABLAS	vi
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
RESUMEN	viii
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN	x
CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1 Descripción de la realidad problemática	1
1.2 Formulación del problema	2
1.2.1 Problema general	2
1.2.2 Problemas específicos	2
1.3 Objetivos de la investigación	3
1.3.1 Objetivo general	3
1.3.2 Objetivos específicos	3
1.4 Justificación de la Investigación	3
1.5 Delimitaciones del estudio	5
1.6 Viabilidad del estudio	5
CAPITULO II: MARCO TEÓRICO	7
2.1 Antecedentes de la investigación	7
2.1.1 Investigaciones internacionales	7
2.1.2 Investigaciones nacionales	7
2.2 Bases teóricas	8
2.3 Bases filosóficas	16
2.5 Hipótesis de investigación	23
2.5.1 Hipótesis General	23
2.5.2 Hipótesis Específicos	23
2.6 Operacionalización de las variables	24
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	28
3.1 Diseño metodológico	28
3.2 Población y muestra	29
3.3 Técnicas de recolección de datos	30
3.4 Técnicas para el procesamiento de la información	30

CAPÍTULO IV: RESULTADOS	33
4.1 Análisis de resultados	33
4.2 Contrastación de hipótesis	41
CAPITULO V: DISCUSIÓN	49
5.1 Discusión de resultados	49
CAPITULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	55
6.1 Conclusiones	55
6.2 Recomendaciones	57
VII: REFERENCIAS	58
7.1 Fuentes documentales	58
7.2 Fuentes bibliográficas	59
7.3 Fuentes hemerográficas	59
7.4 Fuentes electrónicas	60

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Nivel Ontológico	16
Tabla 2: Análisis Epistemológico	17
Tabla 3: Análisis Metodológico	18
Tabla 4: Nivel Axiológico	18
Tabla 5: Matriz de Operacionalización de Variables	25
Tabla 6: Ventajas y Limitaciones de GeoGebra y Octave	40
Tabla 7: Ventajas y Limitaciones de GeoGebra y Octave	57

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Curva de Viviani con GeoGebra	9
Figura 2: Curva de Viviani https://www.geogebra.org/m/hekxtqbg	10
Figura 3: Curva de Viviani con Octave	12
Figura 4: Curva de Viviani con deslizadores en GeoGebra	13
Figura 5: Grafica de la derivada de la curva de Viviani	14
Figura 6: La derivada de la curva de Viviani nunca pasa por el origen de coordenadas (0,0,0)	15
Figura 7: Curva de Viviani	34
Figura 8: Calculo de la Longitud de la curva de Viviani con GeoGebra utilizando la herramienta suma inferior con dos deslizadores	37
Figura 9: Curva de Viviani para $r=1$ https://www.mycompiler.io/view/Cv7CILDMfe539	
Figura 10: Curva de Viviani con GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/geawhqqw	42
Figura 11: Longitud de la Curva de Viviani con GeoGebra	43
Figura 12: Longitud de la Curva de Viviani por suma superior y suma inferior de Riemann para $n=5900$	44
Figura 13: Longitud de la Curva de Viviani con GeoGebra $n=5900$	53
Figura 14: Representación de la Curva de Viviani con GeoGebra	56

RESUMEN

Esta tesis aborda el estudio de la curva de Viviani desde una perspectiva teórico-práctica, combinando métodos analíticos clásicos con herramientas informáticas modernas. En primer lugar, se deriva su parametrización como $\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); 0 < \theta < 4\pi$

demostrando algebraicamente que todos sus puntos satisfacen simultáneamente las ecuaciones de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ y el cilindro: $x^2 + y^2 = 2rx$. A continuación, se calcula la longitud de arco $L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2 u} du = 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ donde $E(k)$ es la integral elíptica completa de segunda especie; su valor numérico se aproxima con alta precisión a $15,2807911561 r$

Para validar y comparar resultados, se implementan dos entornos de cálculo:

GeoGebra, que permite visualizar la curva en 3D, manipularla con deslizadores y aproximar su longitud mediante sumas de Riemann, alcanzando hasta 5 cifras decimales fiables.

GNU Octave, donde un script basado en `quadgk` y tolerancias estrictas ($\text{AbsTol} = 10^{-12}$, $\text{RelTol} = 10^{-10}$) reproduce la longitud con error relativo inferior a 10^{-12} y facilita análisis de rendimiento y reproducibilidad. La comparación muestra que GeoGebra ofrece una interfaz intuitiva para la exploración y la enseñanza, mientras que Octave aporta la precisión y flexibilidad necesarias para investigación numérica rigurosa. Los resultados convergen en las primeras cifras significativas, confirmando la validez de la parametrización y del cálculo de longitud tanto en el plano analítico como en el computacional. Finalmente, se discuten las ventajas y limitaciones de cada herramienta, se proponen recomendaciones para su uso combinado en contextos educativos y de investigación, y se plantean líneas futuras, como la extensión de la metodología a otras intersecciones de superficies.

Palabras clave: Curva de Viviani, longitud de una curva, geogebra, octave.

ABSTRACT

This thesis addresses the study of Viviani's curve from a combined theoretical and practical perspective, merging classical analytical methods with modern computational tools.

First, its parametrization is derived as $\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); 0 < \theta < 4\pi$

and it is shown algebraically that every point of $\alpha(\theta)$ simultaneously satisfies the equations of the sphere : $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ and of the cylinder $x^2 + y^2 = 2rx$. Next, the

arc length is computed as $L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2 u} du = 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ where

$E(k)$ denotes the complete elliptic integral of the second kind; its numerical value is determined with high precision to be $15,2807911561 r$

To validate and compare these results, two computational environments are employed:

GeoGebra, which enables 3D visualization of the curve, interactive manipulation via sliders, and approximation of its length by Riemann sums—achieving up to five reliable decimal places. GNU Octave, where a script based on `quadgk` with strict tolerances ($\text{AbsTol} = 10^{-12}$, $\text{RelTol} = 10^{-10}$) reproduces the length with a relative error below 10^{-12} and supports performance and reproducibility analyses. The comparison demonstrates that GeoGebra provides an intuitive interface for exploration and teaching, while Octave delivers the precision and flexibility required for rigorous numerical research. Both tools converge on the same leading significant digits, confirming the validity of the parametrization and the length calculation in both the analytical and computational domains.

Finally, the advantages and limitations of each tool are discussed, recommendations for their combined use in educational and research contexts are proposed, and future directions are outlined—such as extending this methodology to other surface intersections.

Keywords: Viviani curve, length of a curve, GeoGebra, Octave.

INTRODUCCIÓN

La curva de Viviani destaca por su belleza y por la simplicidad de su definición geométrica: surge al intersectar una esfera de radio $2r$ con un cilindro tangente. Aunque su parametrización conduce a integrales elípticas clásicas, la incorporación de herramientas digitales ofrece un modo más dinámico y preciso de comprenderla.

Este estudio propone un enfoque híbrido que combina GeoGebra y GNU Octave. GeoGebra facilita la exploración interactiva de $\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$ definida como:

$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); 0 < \theta < 4\pi$$

permitiendo manipular deslizadores y comprobar en tiempo real que cada punto pertenece simultáneamente a la esfera y al cilindro. Por su parte, Octave, mediante rutinas de cuadratura adaptativa y funciones integradas para integrales elípticas, posibilita calcular la longitud de la curva con precisiones del orden de 10^{-12} en doble precisión, validando cuantitativamente la expresión analítica

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

El objetivo central de la tesis es, primero, establecer y verificar la parametrización de la curva de Viviani; segundo, derivar y calcular su longitud de forma analítica y numérica; y tercero, implementar ambos procesos en GeoGebra y Octave para comparar sus niveles de precisión y usabilidad.

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Las aplicaciones del cálculo diferencial e integral a decir de Posada (2010), han contribuido a un gran desarrollo de las ciencias sociales al mismo tiempo que ha sido utilizado como una herramienta por “físicos, astrónomos, químicos e ingenieros casi desde su descubrimiento; y en los últimos años también por biólogos y profesionales de las ciencias sociales y del comportamiento” por ejemplo dentro de la física (Leyes del Universo, sf), lo que ha revolucionado completamente la forma de comprender el mundo (Vargas, sf). De igual forma Z., W., Ge. (2024) en su artículo titulado The Application of Calculus in Physics, exploran las aplicaciones del cálculo en física, particularmente en gravedad, inercia rotacional y fuerza, destacando su importancia duradera en la física teórica y aplicada e impulsando futuros avances científicos a través del análisis de la tasa de cambio y la resolución de problemas.

En la matemática aplicada también podemos encontrar como señala Villena (2018), innumerables aplicaciones del cálculo integral. Por ejemplo, en el cálculo de áreas de regiones planas, volúmenes de sólidos, así como el cálculo de la longitud de una curva en el que se utiliza por definición la integral definida. Esto último implica integrar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las derivadas de las ecuaciones paramétricas que representan a la curva parametrizada, un método crucial en campos como la ingeniería de carreteras y otras áreas que requieren mediciones precisas de trayectorias curvas (Pontrjagin, 1983).

En general, más allá de la geometría, el cálculo integral es parte constitutiva de la modelización y el análisis matemático en varias disciplinas, incluidas la economía, la mecánica y el desarrollo tecnológico. Estas aplicaciones subrayan la versatilidad y el carácter indispensable del cálculo integral para resolver problemas complejos del mundo real (Mierlus-Mazilu et al., 2019), (Rebaza, 2021).

1.2 Formulación del problema

En el contexto antes expuesto, se plantea el interés investigador de determinar la longitud de la curva conocida como Curva de Viviani, lo que da lugar a la siguiente pregunta de investigación que orientará el desarrollo de este trabajo.

1.2.1 Problema general

¿Cómo se parametriza la Curva de Viviani y se calcula su longitud, y de qué manera se implementan estos procesos en GeoGebra y Octave?

1.2.2 Problemas específicos

1. ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la Curva de Viviani?
2. ¿Cómo se calcula la longitud de la Curva de Viviani utilizando técnicas de cálculo integral?
3. ¿Cómo se representa la Curva de Viviani en GeoGebra utilizando su parametrización?
4. ¿Qué herramientas o comandos específicos de GeoGebra facilitan el cálculo de la longitud de la curva?
5. ¿Qué herramientas o comandos específicos de Octave facilitan el cálculo de la longitud de la curva?
6. ¿Qué ventajas y limitaciones ofrecen los programas GeoGebra y Octave en la representación y cálculo de la longitud de la curva de Viviani?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Establecer la parametrización de la Curva de Viviani, calcular su longitud de manera analítica y desarrollar los procedimientos necesarios para su implementación, visualización y cálculo de su longitud en los entornos GeoGebra y Octave, evaluando la precisión y eficacia de los resultados obtenidos.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Determinar la ecuación paramétrica de la Curva de Viviani.
2. Calcular la longitud de la Curva de Viviani utilizando técnicas de cálculo integral.
3. Representar la Curva de Viviani en GeoGebra utilizando su parametrización.
4. Identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de GeoGebra para calcular la longitud de la curva.
5. Identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de Octave para calcular la longitud de la curva.
6. Determinar las ventajas y limitaciones de GeoGebra y Octave en la representación y cálculo de la longitud de la Curva de Viviani.

1.4 Justificación de la Investigación

1.4.1 Justificación Teórica

El desarrollo de este estudio se justifica teóricamente por las siguientes razones:

1. Conecta de una manera elegante conceptos de la geometría plana, de la geometría del espacio y el análisis matemático.
2. Su estudio contribuye a la comprensión de propiedades de curvas en superficies (p. ej., intersecciones de esferas y cilindros), a la vez que ofrece ejemplos concretos de

parametrizaciones en tres dimensiones.

3. Al emplear herramientas libres como GeoGebra y Octave, se promueve la apertura y la transparencia en la investigación. Otros investigadores pueden reproducir los resultados, extenderlos y compararlos sin barreras de licenciamiento ni costos de software, contribuyendo así a la ciencia abierta y a la colaboración académica.

1.4.2 Justificación Metodológica

La investigación proporcionará mecanismos analíticos para parametrizar curvas en el espacio, así como la metodología a seguir para trasladar los resultados obtenidos al programa GeoGebra y Octave, con los cuales se logre la visualización dinámica e interactiva de la construcción de la curva de Viviani.

Por otro lado, el cálculo de la longitud de la Curva de Viviani utilizando las sumas superiores e inferiores de Riemann con GeoGebra proporcionará un método bastante eficaz para aproximar la longitud de la curva de Viviani, mientras que con Octave nos proporcionará un entorno de programación científica gratuito y de código abierto para realizar cálculos simbólicos y numéricos precisos. Esto posibilitará la implementación de algoritmos para la estimación de la longitud de la curva, la verificación de hipótesis y la comparación de métodos.

1.4.3 Justificación Práctica.

El desarrollo del estudio si bien se centra en un problema de geometría pura, las técnicas empleadas para parametrizar y calcular longitudes (o áreas, volúmenes, etc.) se aplican en múltiples disciplinas, como la ingeniería, la física o la computación gráfica. La Curva de Viviani, al ser un ejemplo práctico y visualmente atractivo, sirve de puente para ilustrar la utilidad transversal de los métodos matemáticos y computacionales.

1.5 Delimitaciones del estudio

El estudio se enfocará en la parametrización de la Curva de Viviani y el cálculo aproximado de su longitud.

1.6 Viabilidad del estudio

Este estudio resulta viable en los siguientes aspectos:

1.6.1 El estudio es viable técnicamente.

El estudio resulta viable técnicamente porque:

1. Existen procedimientos matemáticos y numéricos bien establecidos para la parametrización de curvas y el cálculo de longitudes, los cuales pueden ser aplicados directamente a la Curva de Viviani.

2. Con GeoGebra se facilita la visualización y manipulación geométrica de la curva, permitiendo comprobar de forma interactiva la validez de la parametrización.

3. Con Octave obtenemos un entorno confiable y de código abierto para realizar cálculos simbólicos y numéricos, lo que posibilita la implementación eficaz de algoritmos que estimen la longitud de la curva con la precisión deseada.

1.6.2 El estudio es viable económicamente

El costo económico para realizar el estudio se estima en S/. 7 000 (Siete mil soles) y es íntegramente asumidos por el Investigador.

1.6.3 El estudio finalmente presenta viabilidad ética y moral

Desde una perspectiva ética y moral, el estudio sobre la Curva de Viviani que incluye su parametrización y cálculo de longitud, utilizando el software libre como GeoGebra y Octave,

se considera viable por las siguientes razones:

1. El proyecto se basa en la investigación teórica y la aplicación de métodos matemáticos y computacionales, sin involucrar experimentación en personas o animales. Por lo tanto, no genera ningún tipo de perjuicio directo a seres vivos.

2. Al utilizar herramientas libres y accesibles, la investigación promueve la educación matemática, el autoaprendizaje y la difusión del conocimiento. Esto contribuye al crecimiento académico y cultural, lo que es considerado un bien social.

3. La elección de software libre para este estudio, facilita que cualquier persona interesada pueda replicar y verificar resultados. Ello refuerza valores éticos como la apertura, la honestidad y la cooperación dentro de la comunidad científica.

4. El uso de GeoGebra y Octave, sin restricciones de licencias costosas, disminuye barreras de acceso. Este principio de accesibilidad favorece el intercambio equitativo de información y oportunidades de investigación, lo cual se alinea con consideraciones éticas en materia de inclusión social y equidad.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la investigación

De la revisión hecha sobre estudios relacionados con la Curva de Viviani tanto internacionales como nacionales, podemos concluir que no existe material bibliográfico reciente desarrollado sobre el tema en cuestión, sin embargo, se pudo recopilar y revisar los trabajos que a continuación se exponen y que servirán como antecedentes para este estudio; escritos en promedio hace ya 15 años atrás.

2.1.1 Investigaciones internacionales

(Rosman, 2010) en su Tesis de grado titulada: “La curva de Viviani” perteneciente a la Facultad de Educación de la University of Ljubljana para obtener el título de licenciado, plantea como objetivo de la tesis: “Examinar la curva de Viviani y sus propiedades, como: la longitud, la curvatura, el área de la figura esférica delimitada por la curva y el volumen del sólido que se encuentra debajo del área”

Dicha investigación matemática pertenece a la investigación básica, ya que el enfoque es teórico e incluye varios cálculos interesantes de magnitudes matemáticas que se pueden relacionar con la curva, como conclusión importante establece que la proyección estereográfica de la curva de Viviani es una curva algebraica de tercer orden muy conocida, indicando que con el estudio se ha completado la tesis con dos construcciones geométricas diferentes.

2.1.2 Investigaciones nacionales

(Sánchez & Chau, 2012) en su artículo titulado Curvas y Superficies publicado en la revista “En Blanco y Negro, Revista sobre Docencia Universitaria” en la Pontificia Universidad Católica del Perú establecen como objetivo: “La construcción de las curvas y superficies con el apoyo de Matlab para obtener la gráfica de la colección de figuras geométricas tales como

las hélices, espirales, cónicas, cilindros, esferas, tetraedros, cubos, tubos, rectas, planos y otros”.

Se trata de una investigación en matemáticas, considerada como investigación computacional o experimental ya que utilizó el software Matlab, en él se define a la curva de Viviani como: “ La curva que resulta de la intersección de un cilindro circular recto con eje el eje de coordenadas y centro el punto $(r, 0, 0)$ y de la esfera, de centro el origen de coordenadas y radio $2r$ ”. (Sánchez & Chau, 2012) concluyen que la curva de Viviani es “una curva cerrada, no simple con un punto múltiple y esférica”(p.16).

2.2 Bases teóricas

La estructura de las bases teóricas que sustentan esta investigación sobre la Curva de Viviani, con el empleo de GeoGebra y Octave, se organizará en seis secciones claramente definidas. En ellas, se abordarán tanto los fundamentos matemáticos como las herramientas tecnológicas propuestas para el estudio. A continuación, se detallan estas secciones:

2.2.1 Curva de Viviani y curva diferenciable parametrizada

Definición 01: De acuerdo con Sánchez y Chau (2012), la curva de Viviani o ventana de Viviani “es la curva que resulta de la intersección de un cilindro circular recto con eje, el eje de coordenadas y centro el punto $(r,0,0)$ y la esfera, de centro en $(0,0,0)$ y radio $2r$ ” (p.16).

Definición 02: “Una curva diferenciable parametrizada es una aplicación diferenciable $\alpha: I \rightarrow R^3$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la recta real R en R^3 ” (do Carmo, 2005, p.2).

En la Figura 01, se aprecia la curva de Viviani que resulta de la intersección de un cilindro circular recto con eje, el eje de coordenadas y centro el punto $(1,0,0)$ con la esfera, de centro en $(0,0,0)$ y radio 2.

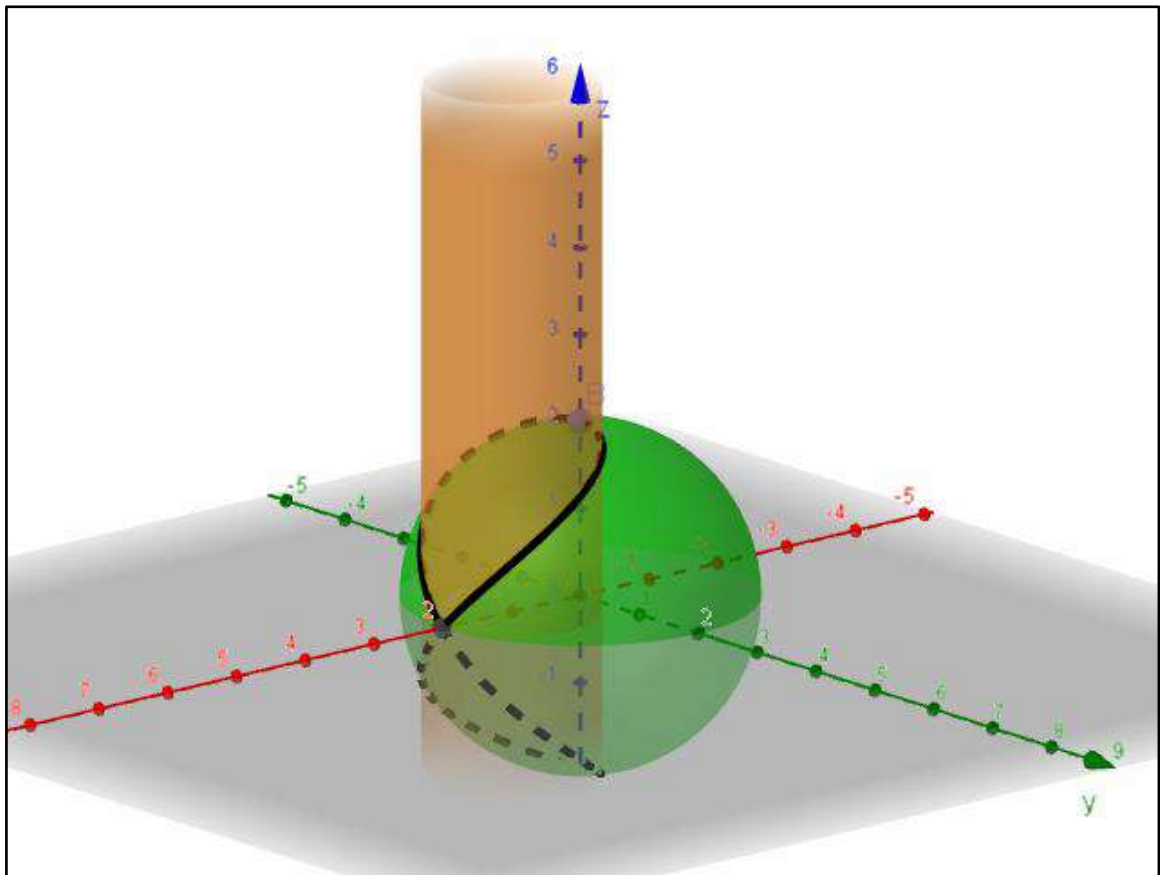


Figura 1: Curva de Viviani con GeoGebra

Fuente: Construcción propia: <https://www.geogebra.org/m/hekxtqbg>

2.2.2 Parametrización de la curva de Viviani

De acuerdo con la definición 01, la curva de Viviani se obtiene de la intersección entre:

1. Una esfera de radio $2r$, centrada en el origen, cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$
2. Un cilindro vertical tangente a la esfera, cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 2rx$

De la ecuación obtenida en 2. se sigue inmediatamente que:

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2$$

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

Haciendo: $\begin{cases} x - r = r\cos(\theta) \\ y = r\sen(\theta) \end{cases}$; $0 < \theta < 4\pi$ y reemplazando en la ecuación mostrada

en 1, se tiene:

$$(r + r\cos(\theta))^2 + r^2\sen^2(\theta) + z^2 = 4r^2$$

$$r^2 + 2r^2 \cos(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + z^2 = 4r^2$$

$$z = 2r \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

De esta forma tenemos la parametrización de la curva de Viviani dada de la forma siguiente $\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = \left(r + r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2r \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \right)$$

O de forma equivalente $\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\alpha(\theta) = \left(r + r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); 0 < \theta < 4\pi; \text{ y siendo } \alpha \text{ una aplicación}$$

diferenciable tenemos una curva diferenciable parametrizada, en el sentido de la definición 02.

En la figura 02 nótese la gráfica de la curva de Viviani obtenida como intersección del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ con la esfera, de centro en $(0,0,0)$ y radio 2. Y cuya parametrización esta dada como:

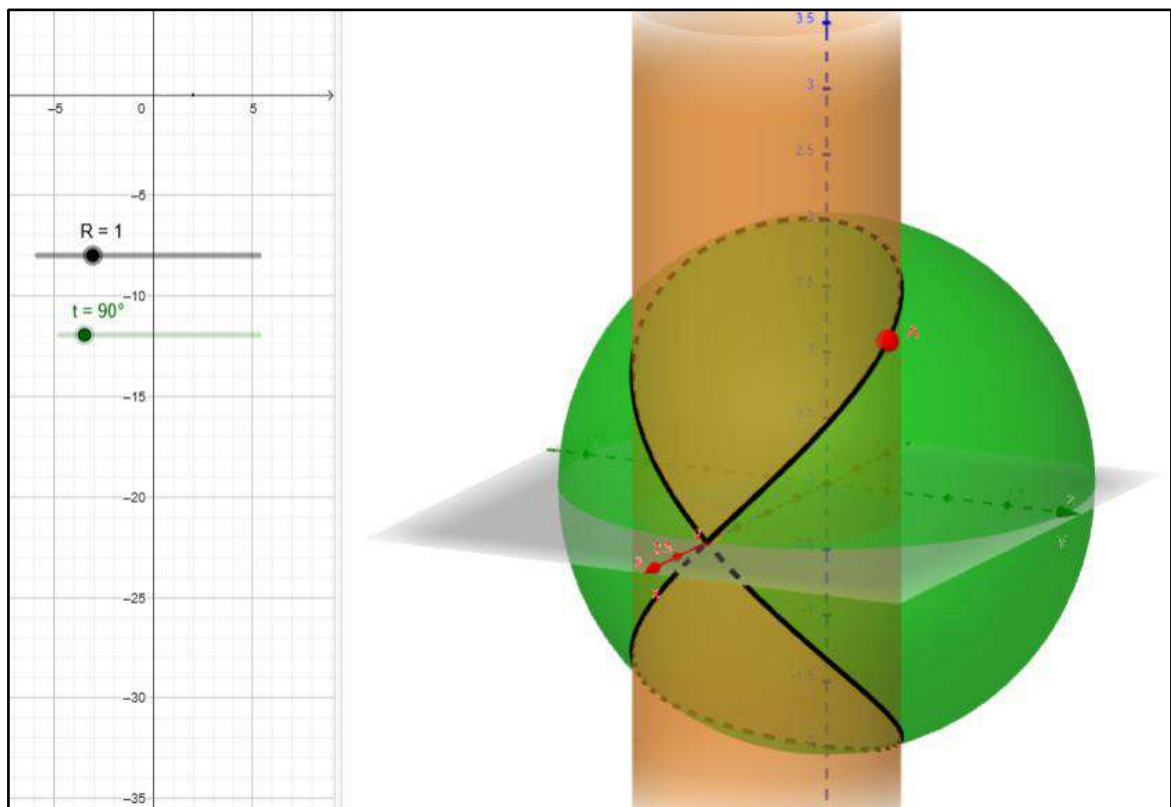


Figura 2: Curva de Viviani <https://www.geogebra.org/m/hekxtqbg>

2.2.3. Parametrización de la curva de Viviani con Octave

A continuación, se presenta un código en GNU Octave para la Curva de Viviani,

```
% Parámetros de la curva
t = linspace(0, 4*pi, 500); % Dividir el parámetro t en 500 puntos
% Coordenadas paramétricas de la curva de Viviani
x = 1 + cos(t);
y = sin(t);
z = 2 * sin(t / 2);
% Crear la esfera para referencia
[u, v] = meshgrid(linspace(0, 2*pi, 50), linspace(0, pi, 50));
xs = 2 * sin(v) .* cos(u); % Coordenada x de la esfera
ys = 2 * sin(v) .* sin(u); % Coordenada y de la esfera
zs = 2 * cos(v);          % Coordenada z de la esfera
% Crear el cilindro para referencia
theta = linspace(0, 2*pi, 50);
z_cyl = linspace(-2, 2, 50); % Rango del cilindro
[theta_grid, z_grid] = meshgrid(theta, z_cyl);
x_cyl = 1 + cos(theta_grid); % Coordenada x del cilindro
y_cyl = sin(theta_grid);    % Coordenada y del cilindro
% Configuración del gráfico
figure;
hold on;
% Graficar la esfera
surf(xs, ys, zs, 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'cyan');
% Graficar el cilindro
surf(x_cyl, y_cyl, z_grid, 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'yellow');
% Graficar la curva de Viviani
plot3(x, y, z, 'r', 'LineWidth', 2);
% Configurar el ángulo de vista
view(135, 30); % Ángulo para una mejor visualización
axis equal;   % Proporciones iguales
grid on;
% Etiquetas de los ejes
xlabel('X');
```

```
ylabel('Y');  
zlabel('Z');  
title('Curva de Viviani: Intersección entre un cilindro y una esfera');  
hold off;
```

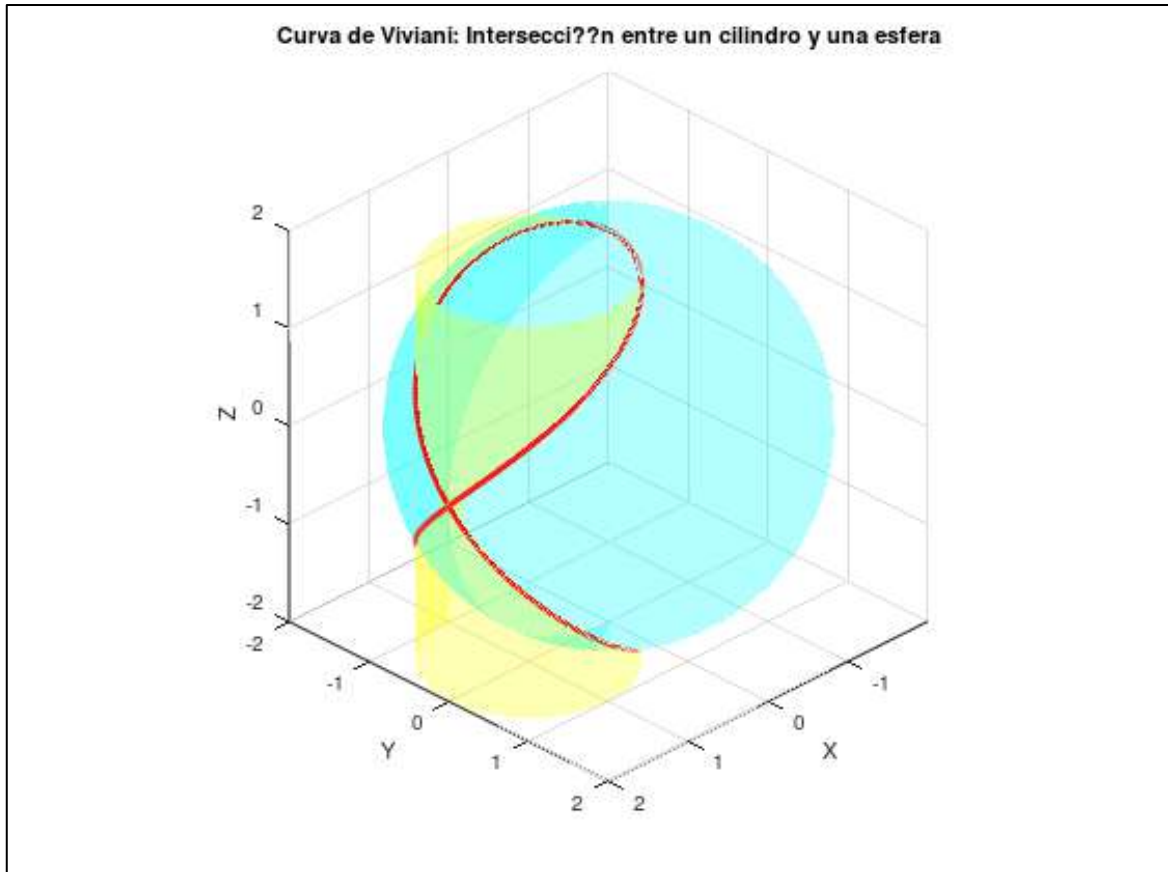


Figura 3: Curva de Viviani con Octave

Fuente: <https://www.mycompiler.io/view/5oEIN5BE41q>

2.2.3 Parametrización de la curva de Viviani con GeoGebra

Usando GeoGebra es suficiente trabajar con el comando: `Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)`

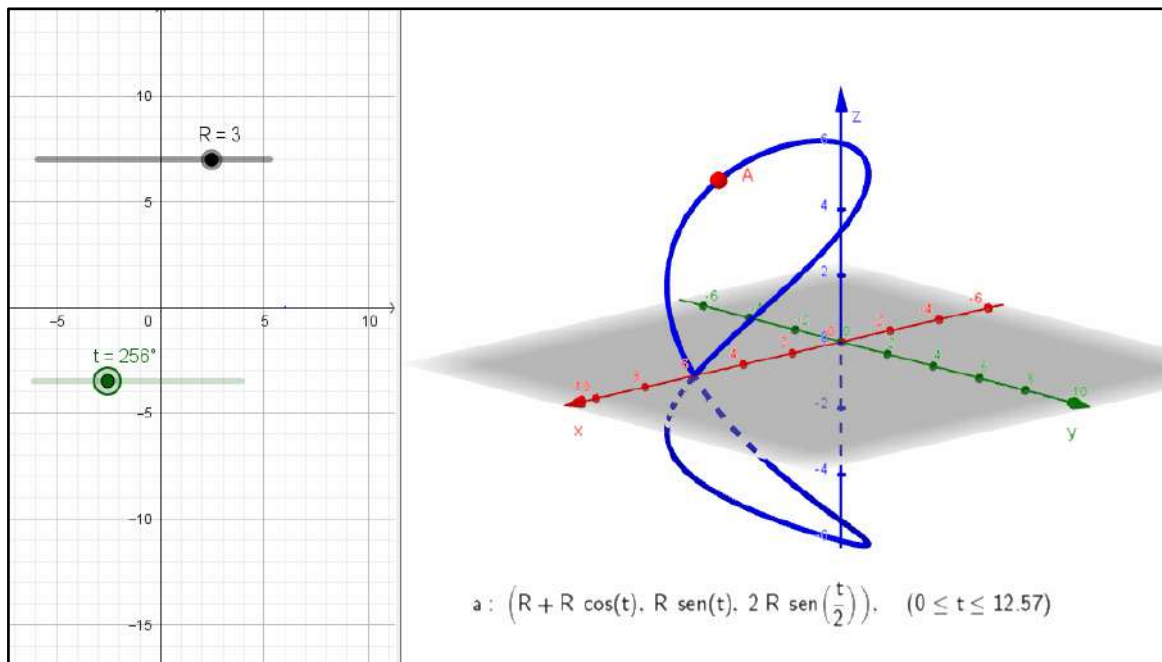


Figura 4: Curva de Viviani con deslizadores en GeoGebra

Nótese que el comando ingresado para obtener la gráfica que se muestra en la Figura 4 es: $Curva((R + R \cos(t), R \text{ sen}(t), 2R \text{ sen}(\frac{t}{2}), t, 0, 4\pi)$ donde el deslizador R corresponde al radio del cilindro de centro $(R,0,0)$ y su doble es decir $2R$ es el radio de la esfera de centro en el origen de coordenadas, mientras que el deslizador “t” define el ángulo en grados sexagesimales.

2.2.3 Longitud de arco de una curva parametrizada regular

De acuerdo con Do Carmo (2005): “Una curva diferenciable parametrizada $\alpha: I \rightarrow R^3$, es llamada regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ ” (p.6).

En este sentido la curva de Viviani es Regular, puesto que, si consideramos una parametrización, expresada a través del comando

$$Curva((R + R \cos(t), R \text{ sen}(t), 2R \text{ sen}(\frac{t}{2}), t, 0, 4\pi)$$

entonces su derivada, la curva diferenciable parametrizada, cuyo comando en GeoGebra es dado por:

$$\text{Curva}((-R \operatorname{sen}(t), R \cos(t), R \cos(\frac{t}{2}), t, 0, 4\pi)$$

nunca pasa por (0,0,0) cuando $t \in (0, 4\pi)$; conforme se puede apreciar en la Figura 5 y

Figura 6.

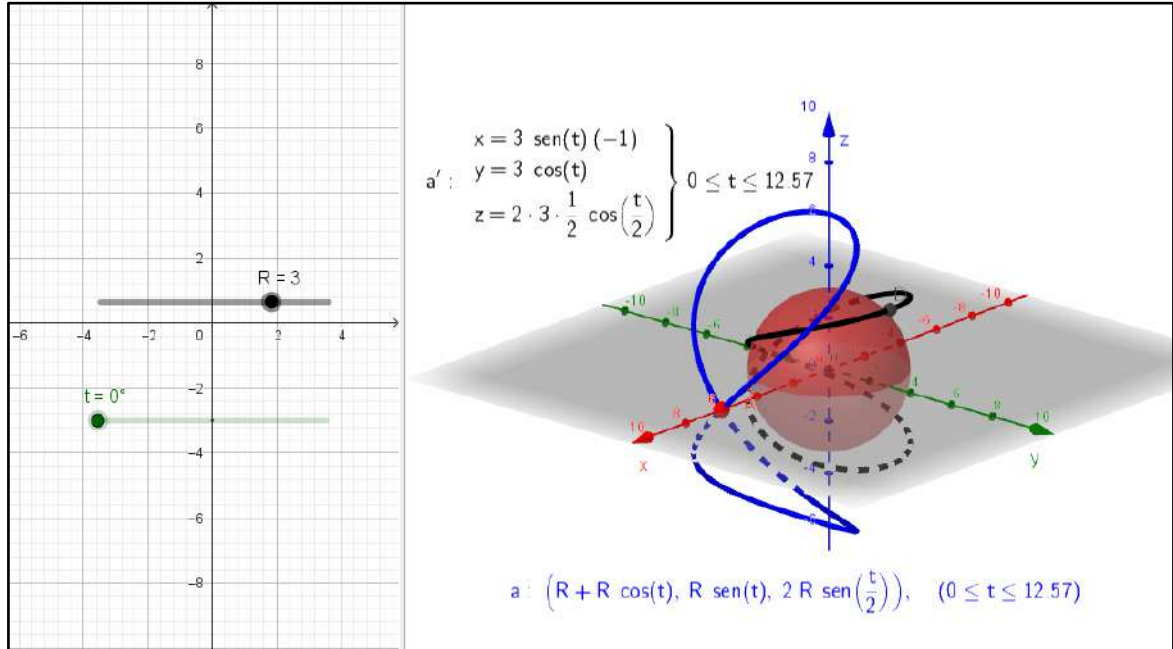


Figura 5: Grafica de la derivada de la curva de Viviani

Por otro lado, de acuerdo con Do Carmo (2005), “la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow R^3$, a partir del punto $t_0 \in I$ está dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Donde: $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2 + (z'(t))^2}$, es la longitud del vector $\alpha'(t)$ ”(p. 7).

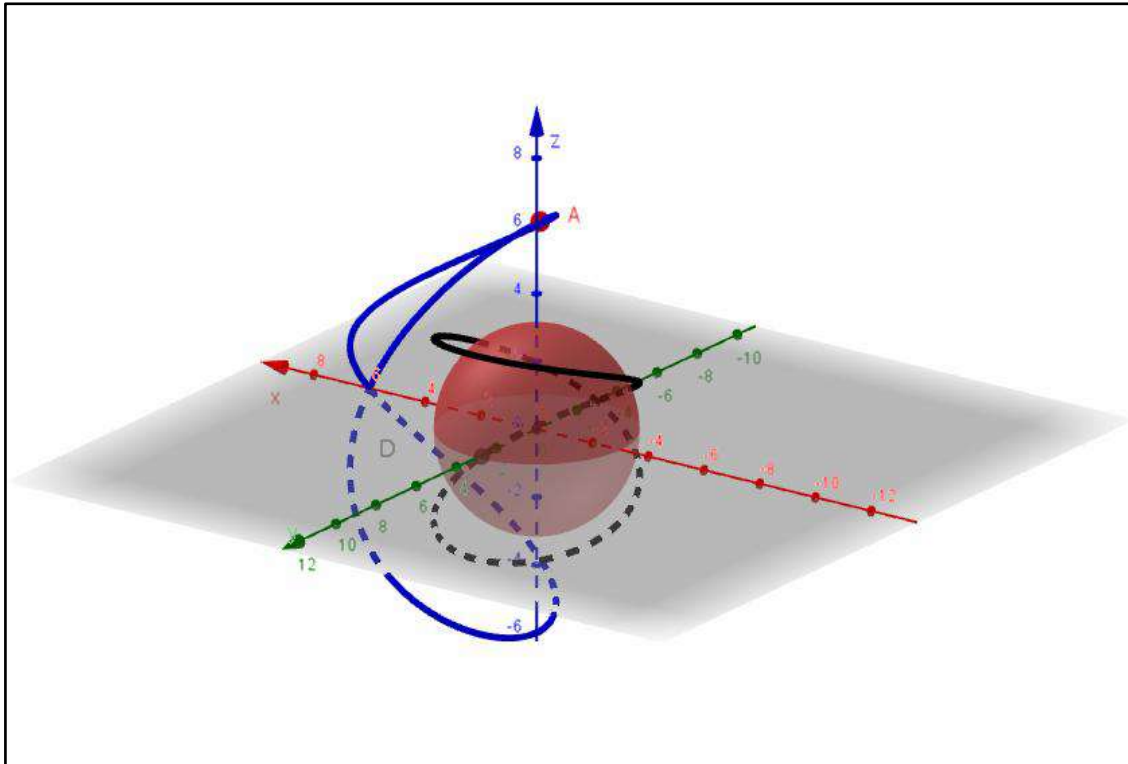


Figura 6: La derivada de la curva de Viviani nunca pasa por el origen de coordenadas (0,0,0)

2.2.4 Integral Elíptica

De acuerdo con Universidad del País Vasco (s.f.) la integral elíptica completa de primera especie es

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Cuya generalización se denomina integral elíptica incompleta de primera especie, la que se muestra a continuación:

$$F(\theta, k) = \int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

así mismo en Universidad del País Vasco (s.f.) se define la integral elíptica completa de segunda especie

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

Y su generalización denominada integral elíptica incompleta de segunda especie es dada por la expresión

$$E(\theta, k) = \int_0^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

2.3 Bases filosóficas

Este estudio se sustentó en cuatro niveles filosóficos que se exponen a continuación

2.3.1 Nivel ontológico

La ontología se ocupa de qué tipo de “ser” o modo de existencia atribuimos a los objetos con los que trabajamos. Antes de indagar cómo los conocemos (epistemología) o con qué métodos (metodología), necesitamos aclarar qué clase de entidad tratamos: ¿es una realidad física, un constructo mental, una mera figura en la pantalla? Entonces la pregunta central en este nivel, que responde este estudio; es: *¿Qué “existe” cuando hablamos de la curva de Viviani y, en general, de los objetos matemáticos?*

Tabla 1:

Nivel Ontológico

Aspecto	Explicación	Aplicación al estudio
Realismo estructural interno	Dentro del sistema axiomático-geométrico, la curva de Viviani es “real” porque satisface definiciones que la describen con precisión formal.	Justifica estudiar propiedades intrínsecas (parametrización, longitud) independientemente de la herramienta usada.
Concepción historicista-falibilista (Lakatos)	Los objetos matemáticos se consideran “construcciones perfectibles” resultado de conjeturas y refutaciones sucesivas.	Abre la puerta a reexaminar derivaciones clásicas (p. ej., la longitud que involucra integrales elípticas) con apoyo computacional.

Fuente: Elaboración propia

Lakatos (2015) subraya que los objetos matemáticos se «solidifican» mediante conjeturas y refutaciones; Ernest (1998) remarca su estatuto de construcciones humanas con objetividad interna. Esta postura explica por qué la existencia de la curva se justifica dentro del sistema, pero su comprensión se refuerza al someterla a nuevas herramientas y pruebas.

2.3.2 Nivel epistemológico

De acuerdo con Artigue (2002) el uso de software libre no es mero soporte técnico: transforma la forma de producir y justificar conocimiento matemático.

En el nivel epistemológico el trabajo de investigación responde a la pregunta central siguiente: ¿Cómo se construye y valida el conocimiento sobre la curva de Viviani?

Tabla 2

Análisis Epistemológico

Sub-enfoque	Clave teórica	Conexión con la tesis
Constructivismo social (Ernest)	El conocimiento surge en la interacción entre individuos y artefactos culturales.	GeoGebra y Octave actúan como artefactos que median la construcción de significado geométrico-analítico.
Matemática experimental (Borwein & Bailey)	El ordenador es un “laboratorio” que permite formular, testar y refinar conjeturas.	Se valida numéricamente la integral de longitud y se compara con la deducción exacta.
Tres mundos de la matemática (Tall)	Mundo conceptual-formal, visual-geométrico y simbólico-computacional se integran.	La tesis transita entre lo formal (integrales), lo visual (curva en GeoGebra) y lo simbólico (código Octave).

Fuente: Elaboración propia

2.3.3 Nivel metodológico

La investigación responde a la pregunta central: ¿Con qué estrategias se genera ese conocimiento?

Tabla 3*Análisis Metodológico*

Marco	Idea clave	Implementación concreta
Instrumental génesis (Artigue)	Un artefacto digital deviene “instrumento” cuando el usuario desarrolla esquemas de uso que amplían su pensamiento.	Diseño de <i>scripts</i> en GeoGebra para animar la curva y de funciones en Octave para integrar y estimar errores.
Modelización pragmática- computacional	Resolver un problema geométrico alternando análisis teórico y simulación.	Fases del trabajo: (1) deducción analítica (parametrización + integral), (2) prototipos en GeoGebra, (3) algoritmos numéricos en Octave, (4) contraste de resultados.

Fuente: Elaboración propia

La metodología, guiada por estos marcos, legitima comparar la precisión (error relativo frente a valor exacto) y la eficacia (tiempo de cómputo, visualización interactiva).

Por eso la pregunta ¿Con qué estrategias se genera ese conocimiento? emerge de forma natural: es necesario detallar los pasos, instrumentos y criterios operativos capaces de materializar la visión epistemológica.

2.3.4 Nivel axiológico

Este estudio responde a la pregunta central: ¿Qué valores guían la investigación y por qué son relevantes?

Tabla 4*Nivel Axiológico*

Valor	Fundamento	Manifestación práctica
Reproducibilidad y ciencia abierta	El conocimiento debe ser verificable por la comunidad.	Publicar códigos Octave, archivos GeoGebra y datos de error bajo licencias libres.
Accesibilidad educativa	Herramientas gratuitas amplían oportunidades de aprendizaje.	La tesis sirve como recurso didáctico reutilizable en cursos de Cálculo y Geometría.
Integridad y rigor	Evitar resultados “caja negra” enfatizando la explicación de algoritmos.	Documentar paso a paso las rutinas numéricas y las pruebas formales.

Fuente: Elaboración propia

Este nivel garantiza que las decisiones técnicas (usar software libre) y pedagógicas (compartir materiales) se alineen con principios éticos contemporáneos de la investigación matemática como por ejemplo al usar software libre, se cumple con la recomendación UNESCO de poner a disposición herramientas y resultados sin barreras de pago.

Por otro lado, este estudio sobre la curva de Viviani —enfocado en su parametrización y en el cálculo de su longitud mediante GeoGebra y Octave— adopta también un marco sustentado en diversas corrientes filosóficas, lo que permite enriquecer tanto la formulación del problema como la interpretación de los resultados. En este sentido, el estudio se fundamenta en la:

2.3.5 Filosofía de la Tecnología y la Ciencia Computacional

Que comprende:

Integración de tecnologías digitales: Se valora el rol de las tecnologías como extensiones del intelecto humano en la exploración y resolución de problemas matemáticos.

Este enfoque filosófico sostiene que herramientas como GeoGebra y Octave no solo facilitan el cálculo o la visualización, sino que también abren nuevas vías de investigación y comprensión en áreas tradicionales de la geometría y el análisis.

Inspirándose en el pensamiento de Martin Heidegger, se concibe la tecnología como un modo de "desocultar" la realidad. Según Heidegger (1977), la tecnología no es solamente un conjunto de medios, sino que configura una forma particular de relacionarnos con el mundo, lo que incide en la forma en que se abordan y comprenden los problemas matemáticos.

Verbeek (2005) y Latour (1999) han aportado a la idea de que los artefactos tecnológicos poseen una forma de agencia que influye en las prácticas científicas. En este sentido, las herramientas computacionales no solo facilitan cálculos y visualizaciones, sino que co-configuran las metodologías y estrategias de investigación. Por tanto, los artefactos tecnológicos no son neutrales ni pasivos, sino que activamente participan en la configuración de cómo se

llevan a cabo los procesos de investigación y en la forma en que se generan y organizan los conocimientos científicos. En esta línea, esta investigación considera a la tecnología no solo como un facilitador, sino como un actor determinante en el ámbito de la producción científica.

Simulación y modelado: La capacidad de modelar la Curva de Viviani en un entorno digital permite examinar la precisión y las limitaciones de los métodos numéricos y simbólicos, invitando a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento matemático y la fidelidad de las representaciones computacionales.

En tal sentido Don Ihde (1990) ha explorado cómo las tecnologías transforman nuestra experiencia perceptiva del entorno. En el contexto de esta investigación matemática, el uso de entornos virtuales y computacionales redefine la interacción con conceptos abstractos que se desarrollan en torno a la Curva de Viviani, haciendo más accesible su visualización y manipulación.

2.3.6 Interdisciplinariedad y Convergencia de Saberes

Comprende

Puente entre teoría y práctica: Esta investigación se sitúa en el cruce de diferentes áreas como geometría, análisis, computación y educación matemática; permitiendo que el estudio de un objeto clásico como la Curva de Viviani se beneficie de perspectivas diversas. Esto refleja un compromiso con el diálogo entre teorías y prácticas, fundamental en la filosofía contemporánea de la ciencia.

Desarrollo de competencias y habilidades digitales: Desde una perspectiva pedagógica y epistemológica, el uso de herramientas digitales en esta investigación matemática fomenta competencias tecnológicas y analíticas que son esenciales en el mundo actual, promoviendo una visión integral del saber relacionado con la Curva de Viviani.

En *Consilience: The Unity of Knowledge*, Wilson(1998) argumenta a favor de la integración de todas las formas de conocimiento para resolver problemas globales, enfatizando

la unidad subyacente de las diversas disciplinas.

En conclusión, esta investigación titulada “Curva de Viviani, un estudio con GeoGebra y Octave” Enace de una curiosidad muy simple: **mirar de cerca la curva de Viviani y entenderla con nuestras manos y nuestros ojos**, no solo con lápiz y papel. Al usar GeoGebra para “dibujarla” y Octave para “hacerle cuentas”, descubrimos que la matemática se vuelve casi un juego de exploración: probamos, corregimos, volvemos a probar... y aprendemos.

Primero aceptamos que la curva “existe” dentro del universo de las ideas matemáticas (como un personaje en su propio mundo). Pero también sabemos —al estilo de Lakatos— que ningún resultado es intocable: siempre podemos hallar otra forma de verlo o demostrarlo mejor.

Después nos preguntamos cómo generamos confianza en lo que hallamos. Aquí el ordenador es nuestro taller: permite ver la curva moverse, lanzar cálculos y comprobar si la teoría aguanta. GeoGebra y Octave no son simples herramientas; actúan como compañeros de laboratorio que señalan errores y sugieren atajos.

Para avanzar, seguimos una ruta clara: deducir las fórmulas a mano, animarlas en la pantalla, calcular su longitud con algoritmos y, al final, comparar qué tan cerca estamos de la solución exacta. Ese ir y venir entre teoría y práctica convierte cada paso en una oportunidad de comprender mejor.

Todo esto lo hacemos con algunos valores en mente: compartir los archivos, explicar cada línea de código y usar software libre para que cualquiera pueda repetir —o mejorar— nuestro trabajo. Creemos que la matemática gana cuando es abierta, colaborativa y transparente.

Por último, reconocemos que la tecnología no es un mero accesorio; **es parte de la aventura**. Como diría Heidegger, nos ayuda a “desvelar” la realidad de formas impensables hace unas décadas. Y, siguiendo la idea de consiliencia de Wilson, tejemos puentes entre geometría, programación y enseñanza para que la curva de Viviani no quede guardada en un cajón, sino que inspire a estudiantes y colegas a seguir explorando.

En suma, esta investigación es un diálogo entre la tradición matemática y las herramientas del siglo XXI, guiado por la ética de compartir y por las ganas de entender, paso a paso, la belleza escondida en una sola curva.

2.4 Definición de términos básicos

2.4.1 Curva de Viviani: De acuerdo con Sánchez y Chau (2012), la curva de Viviani o ventana de Viviani “es la curva que resulta de la intersección de un cilindro circular recto con eje, el eje de coordenadas y centro el punto $(r,0,0)$ y la esfera, de centro en $(0,0,0)$ y radio $2r$ ” (p.16).

2.4.2 Parametrización: La parametrización de la curva de Viviani es dada por la siguiente expresión:

$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right); 0 < \theta < 4\pi$$

2.4.3. Longitud de una Curva: De acuerdo con Do Carmo (2005), “la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow R^3$, a partir del punto $t_0 \in I$ esta dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Donde: $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2 + (z'(t))^2}$, es la longitud del vector $\alpha'(t)$ ”(p. 7).

2.4.4 GeoGebra: De acuerdo con Sánchez, Mendes, Andrés y Castillo (2023) GeoGebra es un software matemático dinámico que integra geometría, álgebra, cálculo y estadística. Por tanto “GeoGebra es un intento de unir dos tipos de software, el de Geometría Dinámica y el de Álgebra Computacional, en los cuales la geometría, el álgebra y el cálculo se tratan como componentes iguales”(p.7).

2.4.5 Octave: De acuerdo con Universidad de Córdoba. (s.f.) Octave constituye un “lenguaje de alto nivel, destinado principalmente a cálculos numéricos. Este lenguaje

proporciona capacidades para la resolución numérica de problemas lineales y no lineales, y para realizar otras pruebas numéricas”(párr.1).

2.4.6 Modelado: De acuerdo con (Kritz, 2023) el proceso de modelización implica decisiones críticas sobre qué representar y cómo, enfatizando la importancia de la abstracción en la investigación científica.

2.5 Hipótesis de investigación

2.5.1 Hipótesis General

La Curva de Viviani puede parametrizarse mediante ecuaciones sencillas en coordenadas adecuadas usando funciones trigonométricas, que permitan calcular su longitud mediante una integral de la norma del vector velocidad. Se espera que, al implementar esta parametrización y su integral en GeoGebra y Octave, los resultados muestren coherencia entre el enfoque teórico (cálculo analítico) y el enfoque computacional, validando así la corrección de la parametrización y la exactitud del proceso de cálculo de la longitud de la curva.

2.5.2 Hipótesis Específicos

Hipótesis 1: “La Curva de Viviani se puede expresar mediante una parametrización clara en un sistema de coordenadas adecuado (por ejemplo, cilíndrico o esférico), de modo que todos los puntos de la curva cumplan simultáneamente las condiciones geométricas que la definen.”

Hipótesis 2: “La longitud de la Curva de Viviani, derivada de su parametrización, se podrá obtener con exactitud a través de una sola integral de la norma del vector velocidad, lo que confirmará la consistencia matemática de la parametrización.”

Hipótesis 3: “La introducción de la parametrización de la Curva de Viviani en GeoGebra generará una representación gráfica fiel, lo que permitirá visualizar adecuadamente sus propiedades geométricas en un entorno interactivo.”

Hipótesis 4: “Los comandos nativos de GeoGebra para manejar funciones paramétricas e integrar arcos de curva brindarán un resultado numérico coincidente con el valor teórico de la

longitud, ratificando la exactitud de la aproximación computacional.”

Hipótesis 5: “Mediante la implementación de rutinas de cálculo integral y manipulación de vectores en Octave, es posible reproducir con precisión la longitud de la Curva de Viviani, obteniendo resultados comparables a los obtenidos de forma analítica.”

Hipótesis 6: “GeoGebra proporcionará una interfaz más intuitiva para la visualización y el manejo gráfico de la Curva de Viviani, mientras que Octave ofrecerá mayor flexibilidad numérica y analítica; sin embargo, ambos entornos convergerán en resultados coherentes respecto a la longitud de la curva.”

2.6 Operacionalización de las variables

2.6.1. Parametrización de la Curva de Viviani

Proceso matemático que permite describir la curva mediante un conjunto de ecuaciones en función de un parámetro, facilitando su análisis y representación.

2.6.2. Cálculo de la longitud de la Curva

Proceso de determinar la distancia total recorrida a lo largo de una curva, utilizando técnicas de integración y métodos numéricos.

2.6.3. Eficacia de GeoGebra en la representación

Capacidad de GeoGebra para generar representaciones gráficas dinámicas e interactivas que faciliten la comprensión de la Curva de Viviani y sus propiedades.

2.6.4. Eficacia de Octave en el cálculo numérico

Capacidad de Octave para implementar algoritmos de integración numérica que permitan calcular con precisión y eficiencia la longitud de la curva.

Tabla 5*Matriz de Operacionalización de Variables***Cuadro de Operacionalización de Variables**

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Categoría	Indicadores
1. Parametrización de la Curva de Viviani	Proceso matemático que permite describir la curva mediante un conjunto de ecuaciones en función de un parámetro, facilitando su análisis y representación.	Derivación de las ecuaciones paramétricas a partir de fundamentos geométricos clásicos (la intersección de una esfera y un cilindro) e implementación en GeoGebra y Octave.	Matemática/Técnica	Concordancia con formulaciones teóricas reconocidas. Replicabilidad en GeoGebra y Octave. Precisión de la formulación.
2. Cálculo de la longitud de la Curva	Proceso de determinar la distancia total recorrida a lo largo de una curva, utilizando técnicas de integración y métodos numéricos.	Aplicación de fórmulas de longitud de arco y métodos de integración (tanto analíticos como numéricos) en GeoGebra y Octave para obtener un valor cuantitativo de la longitud.	Matemática/Numérica	Valor numérico obtenido. Margen de error en comparación con el valor teórico.

Fuente: Elaboración propia

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Categoría	Indicadores	Instrumento de medición
3. Eficacia de GeoGebra en la representación	Capacidad de GeoGebra para generar representaciones gráficas dinámicas e interactivas que faciliten la comprensión de la Curva de Viviani y sus propiedades.	Evaluación de la calidad y precisión de la visualización generada en GeoGebra, incluyendo el uso de herramientas interactivas (deslizadores, comandos de trazo, etc.) para representar la curva.	Tecnológica/Educativa	Claridad y fidelidad de la representación gráfica. Interactividad (facilidad para manipular parámetros).	Applet <i>GeoGebra</i> interactivo que incluye: Curva de Viviani parametrizada Deslizadores para r y densidad de muestreo Comando <code>Length[curve]</code>
4. Eficacia de Octave en el cálculo numérico	Capacidad de Octave para implementar algoritmos de integración numérica que permitan calcular con precisión y eficiencia la longitud de la curva.	Implementación y evaluación de funciones de integración numérica (como integral o quad) en Octave, verificando la precisión y consistencia de los resultados obtenidos en el cálculo de la longitud.	Tecnológica/Numérica	Precisión de los resultados obtenidos (diferencia con el valor teórico). Consistencia en los resultados a través de diferentes ejecuciones. Eficiencia computacional (tiempo de cómputo).	Registro de resultados en Octave, análisis cuantitativo del error, cotejo con resultados teóricos.

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3.1 Diseño metodológico

3.1.1 Enfoque de la Investigación

Enfoque Cuantitativo : De acuerdo con (Hernández-Sampieri y Mendoza , 2018) esta investigación se enmarca en un enfoque cuantitativo, ya que permitirá representar gráficamente la Curva de Viviani, así como medir y analizar con precisión la longitud de dicha curva utilizando GeoGebra y Octave.

Bajo la óptica de este metodólogo, el enfoque cuantitativo es especialmente apropiado para este estudio por las siguientes razones:

Objetividad y medición precisa: Según Hernández Sampieri, el enfoque cuantitativo se fundamenta en la medición objetiva de fenómenos a través de variables cuantificables. En el estudio de "La Curva de Viviani con GeoGebra y Octave", se requiere obtener datos numéricos precisos (por ejemplo, valores de la longitud de la curva, márgenes de error, tiempos de ejecución y diferencias entre resultados teóricos y numéricos). Estos datos permiten evaluar y comparar objetivamente la precisión de la parametrización y el cálculo en ambos entornos computacionales.

Reproducibilidad y verificación: Uno de los pilares del enfoque cuantitativo es la posibilidad de replicar los resultados. La aplicación de métodos numéricos y la comparación de salidas en GeoGebra y Octave generan datos que pueden ser verificados y reproducidos en diferentes contextos o estudios similares, lo cual fortalece la validez externa del estudio.

3.1.2 Tipo de Investigación

Investigación descriptiva explicativa, no experimental: Según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018) el enfoque cuantitativo no solo describe fenómenos, sino que también permite explicar las relaciones causales o correlacionales entre variables. En este estudio, se buscó no solo describir la parametrización y el cálculo de la longitud de la curva, sino también explicar cómo y por qué las herramientas computacionales utilizadas afectan estos procesos, lo que se logró mediante un análisis cuantitativo de los indicadores establecidos.

Hernández Sampieri enfatiza la importancia de emplear métodos sistemáticos y objetivos para recoger y analizar datos. En este estudio se utilizaron mediciones cuantitativas (como valores numéricos de la longitud de la curva, márgenes de error, tiempos de ejecución, entre otros) que permiten una descripción detallada del fenómeno y, a partir de esos datos, se establecen explicaciones y comparaciones entre las herramientas (GeoGebra y Octave).

Finalmente, esta investigación es de tipo descriptiva explicativa porque nos permite no solo detallar cómo es y se comporta la Curva de Viviani en cada entorno, sino también identificar los factores que generan las diferencias observadas entre los métodos de cálculo y representación.

3.2 Población y muestra

3.2.1 Población.

Se han considerado todas las configuraciones posibles de curvas en el espacio R^3 .

3.2.2 Muestra

Se trabajó estrictamente con la Curva de Viviani.

3.3 Técnicas de recolección de datos

Aunque este estudio no ha requerirlo encuestas o entrevistas (típicas de investigaciones sociales), sí utilizó:

1. La revisión bibliográfica (para fundamentar la teoría matemática).
2. Análisis de manuales y documentación (para conocer los comandos de GeoGebra y Octave).
3. Experimentación computacional y registro sistemático de resultados (para recolectar datos numéricos y cualitativos de la implementación).
4. Comparación con métodos analíticos y entre métodos computacionales (para validar la precisión de los resultados).

Estas técnicas permitieron alcanzar los objetivos específicos propuestos, a la vez que proporcionaron una visión clara de la exactitud, viabilidad y limitaciones al representar y calcular la Curva de Viviani en GeoGebra y Octave.

3.4 Técnicas para el procesamiento de la información

Las siguientes técnicas permitieron alcanzar de manera integral los objetivos planteados y procesar la información obtenida en este estudio:

3.4.1 Revisión bibliográfica y documental

Objetivo planteado: Conocer a fondo las propiedades de la Curva de Viviani, así como su historia y métodos de estudio tradicionales.

Cómo: Consultando libros, artículos científicos y tesis que aborden la Curva de Viviani, así como analizando manuales y guías de uso de GeoGebra y Octave para identificar comandos o funciones útiles.

3.4.2 Análisis y síntesis de la información teórica

Objetivo planteado: Pasar de la teoría (conceptos geométricos, definición de la Curva de Viviani y técnicas de integración) a la práctica.

Cómo: Sistematizando las fórmulas y procedimientos necesarios para la parametrización y cálculo de la longitud, de esta forma se obtuvo una parametrización clara y un método integral definido, listos para implementarse en software.

3.4.3 Simulación y verificación en entornos de software (GeoGebra y Octave)

Objetivo planteado: Materializar la teoría en representaciones gráficas y cálculos numéricos.

Cómo: En GeoGebra se logró introducir la parametrización en su módulo de «Curva paramétrica» y usar comandos nativos para calcular longitudes.

En Octave: se programaron scripts que definieron la función paramétrica y permitieron calcular la integral de la norma del vector velocidad.

De esta forma, se obtuvieron resultados gráficos (representaciones 2D/3D) y numéricos (valor de la longitud).

3.4.4 Comparación de resultados y validación

Objetivo planteado: Evaluar la coherencia entre el cálculo analítico y el computacional, así como entre ambos entornos de software.

Cómo: Se aplicaron técnicas de comparación cuantitativa para examinar si los valores de la longitud obtenidos en GeoGebra, Octave y la fórmula analítica coinciden.

3.4.5 Documentación de procedimientos y elaboración de reportes

Objetivo planteado: Garantizar la trazabilidad y reproducibilidad de la investigación.

Cómo: se registraron paso a paso la forma en que se parametrizó la curva, se calculó la longitud y se implementó en cada software.

Para ello se han incluido fragmentos de código (Octave) y capturas de pantalla de GeoGebra, junto con interpretaciones de los resultados.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

4.1 Análisis de resultados

En esta sección se muestra de manera clara y verificable como se alcanzó cada objetivo específico.

4.1.1. Objetivo 1: Determinar la ecuación paramétrica de la Curva de Viviani.

De acuerdo con la definición 01, la curva de Viviani se obtiene de la intersección entre:

1. Una esfera de radio $2r$, centrada en el origen, cuya ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$
2. Un cilindro vertical tangente a la esfera, cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 2rx$

entonces: $x^2 - 2rx + y^2 = 0$

$$x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2$$

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

Haciendo: $\begin{cases} x - r = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$; $0 < \theta < 4\pi$ y reemplazando en la ecuación mostrada

en 1, se tiene:

$$(r + r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2(\theta) + z^2 = 4r^2$$

$$r^2 + 2r^2\cos(\theta) + r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) + z^2 = 4r^2$$

$$z = 2r \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$$

De esta forma se obtuvo la parametrización de la curva de Viviani. Se expresa de la forma siguiente $\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$

$$\alpha(t) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \right)$$

4.1.2. Objetivo 02: Calcular la longitud de la Curva de Viviani utilizando técnicas de cálculo integral.

Según Do Carmo (2005), “la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha: I \rightarrow R^3$, a partir del punto $t_0 \in I$ esta dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

Donde: $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2 + (z'(t))^2}$, es la longitud del vector $\alpha'(t)$ ”(p.7). En este sentido aplicando esta definición sobre la curva parametrizada

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3 \text{ definida como } \alpha(\theta) = \left(r + r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

1. Vector velocidad

$$\alpha'(\theta) = \left(-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

2. Norma de $\alpha'(\theta)$

$$\|\alpha'(\theta)\| = r \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = r \cdot \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3. Longitud de la curva de Viviani

$$L = \int_0^{4\pi} \|\alpha'(\theta)\| d\theta$$
$$L = r \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

Con el cambio $u = \frac{\theta}{2}$, se tiene $d\theta = 2 du$:

$$L = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} du$$

$$L = 4r \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u} \, du$$

$$L = 8r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u} \, du \text{ y usando: } 1 + \cos^2 u = 2 - \operatorname{sen}^2 u$$

$$\begin{aligned} L &= 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}^2 u} \, du \\ &= 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Donde

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u} \, du$$

Con $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$; es una integral elíptica completa de segunda especie de Legendre.

4. Expresión exacta

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

5. Valor numérico

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1.350643881, \text{ por lo que:}$$

$$L \approx 8 \cdot r \cdot 1.41421356 \cdot 1.350643881 \approx 15.27 \cdot r$$

4.1.3. Objetivo 03: Representar la Curva de Viviani en GeoGebra utilizando su parametrización.

La representación de la curva de Viviani se logra a través de GeoGebra utilizando el comando $\text{Curva}((R + R \cos(t), R \operatorname{sen}(t), 2R \operatorname{sen}(t / 2)), t, 0, 4\pi)$ conforme a lo desarrollado y presentado en el objetivo 1.

4.1.4. Objetivo 04: Identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de GeoGebra para calcular la longitud de la curva.

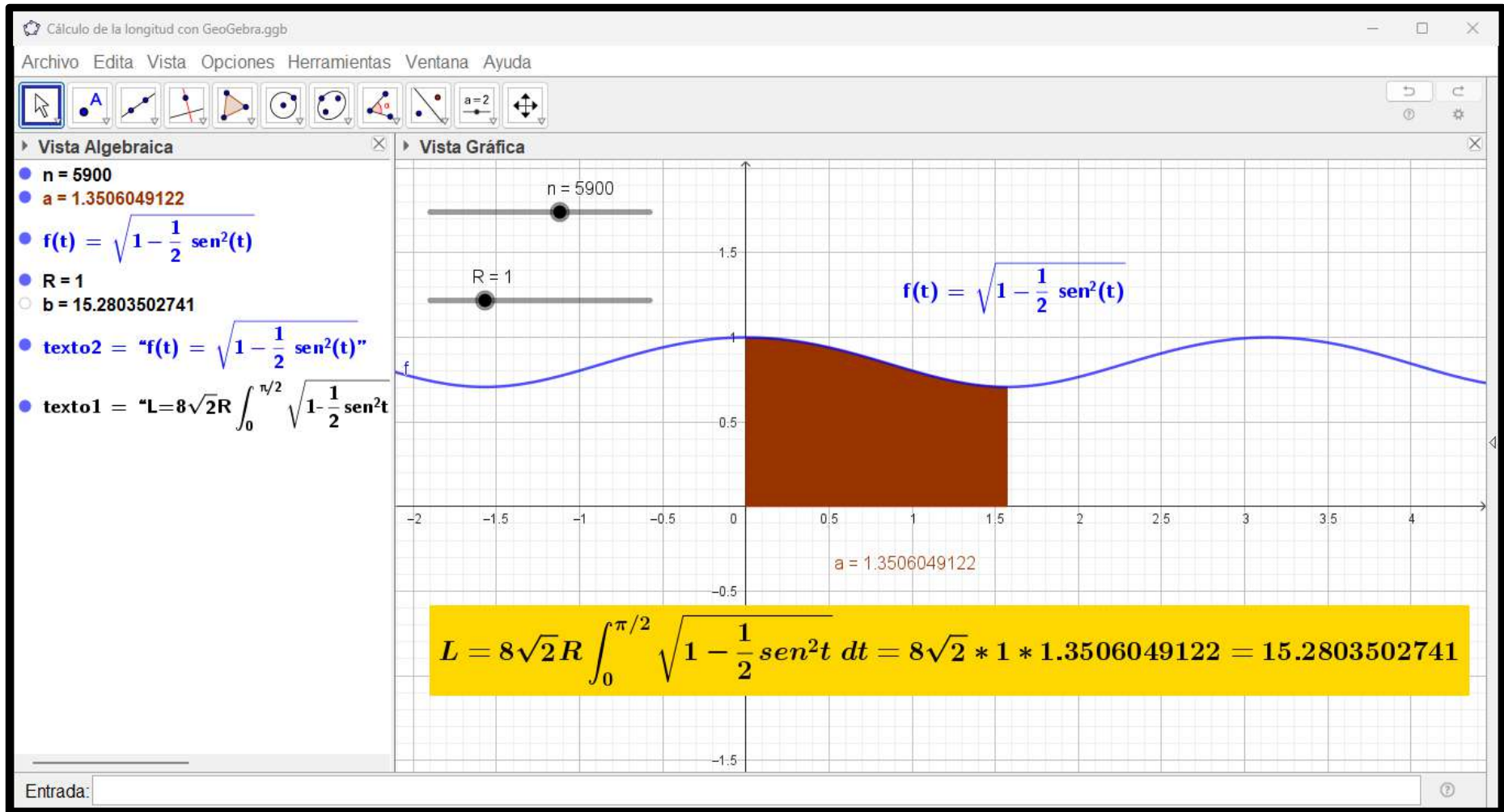


Figura 8: Cálculo de la Longitud de la curva de Viviani con GeoGebra utilizando la herramienta suma inferior con dos deslizadores

SumaInferior(sqrt(1 - 1 / 2 sen²(t)), 0, π / 2, n) ; Deslizadores R: radio del cilindro y n: número de subintervalos del intervalo $[0; \frac{\pi}{2}]$

4.1.5. Objetivo 05: Identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de

Octave para calcular la longitud de la curva.

```
% =====  
% viviani_length.m  
% Longitud de la curva de Viviani (dos vueltas completas)  
% =====  
function L = viviani_length(r)  
    if nargin < 1, r = 1; end % radio por defecto  
  
    % — Rango del parámetro  $\theta$   
    theta0 = 0;  
    theta1 = 4*pi; % 0 ...  $4\pi$  (recorre dos veces la curva)  
  
    % — Norma del vector velocidad  $\|\alpha'(\theta)\|$   
    vnorm = @(th) r .* sqrt(1 + cos(th/2).^2);  
  
    % — Integración numérica (Gauss-Kronrod adaptativo)  
    L = quadgk(vnorm, theta0, theta1, ...  
        'AbsTol', r*1e-12, 'RelTol', 1e-10);  
  
    % — Salida en consola  
    fprintf('\n--- Curva de Viviani ---\n');  
    fprintf('Radio          r = %.12g\n', r);  
    fprintf('Longitud numérica L = %.12g\n', L);  
  
    % — Gráfica opcional  
    th = linspace(theta0, theta1, 600);  
    x = r + r.*cos(th);  
    y = r.*sin(th);  
    z = 2*r.*sin(th/2);  
  
    figure(1); clf  
    plot3(x, y, z, 'LineWidth', 1.3);  
    grid on; axis equal  
    xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');  
    title(sprintf('Curva de Viviani (r = %.3g)', r));  
end
```

Salida del programa

Curva de Viviani

Radio r = 1

Longitud numérica L = 15.2807911561

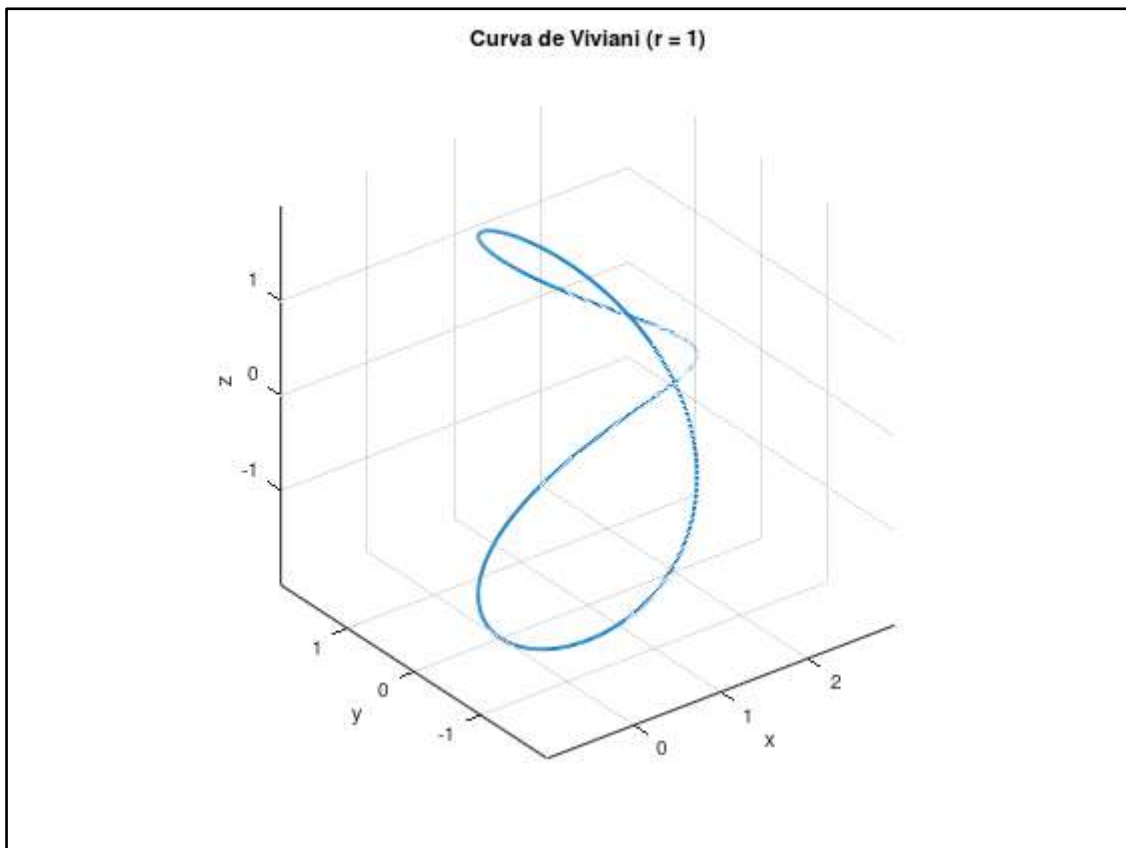


Figura 9: Curva de Viviani para $r=1$ <https://www.mycompiler.io/view/Cv7CILDMfe5>

4.1.6. Objetivo 06: Determinar las ventajas y limitaciones de GeoGebra y Octave en la representación y cálculo de la longitud de la Curva de Viviani.

Se ha logrado determinar que GeoGebra destaca por su representación intuitiva y rápida de la curva de Viviani y más aún con la utilización de deslizadores incorporados en el software, nos permite verificar empíricamente propiedades formales, experimentar con parámetros y generar conjeturas en un ciclo de retroalimentación inmediata entre acción y visualización. Por tanto, GeoGebra, convierte la curva de Viviani en un objeto manipulable en tiempo real. Mientras tanto Octave es ideal para: cálculos numéricos rigurosos y reproducibles; permite fijar tolerancias, evaluar el error y documentar scripts que se ejecutan por lotes o se versionan. A continuación, se establece una tabla de Ventajas y limitaciones de GeoGebra y Octave:

Tabla 6

Ventajas y Limitaciones de GeoGebra y Octave

Dimensión	GeoGebra – Ventajas	GeoGebra – Limitaciones	Octave – Ventajas	Octave – Limitaciones
Visualización 3D	Motor gráfico: rotación fluida. Deslizadores (r, θ): exploración en tiempo real.	Máximo de subdivisiones para una curva 4000; más puntos requiere scripts y ralentiza la escena.	plot3, mesh y surf permiten vistas 3D básicas y exportables a formatos vectoriales.	Interactividad mínima; rotación/zoom poco fluida. No hay controles nativos tipo deslizador
Cálculo de longitud	Comando Length[curve] rápido y directo: resultado inmediato para demostraciones. Convergencia intuitiva al aumentar Subdivisiones.	imposibilidad de fijar tolerancias de error. Sin estimador de error ni salida del nº de evaluaciones.	quadgk, integral, quadl, quad ⇒ integración adaptativa con control AbsTol, RelTol y estimador de error. Alcanzable error $\approx 10^{-14}$	Selección inadecuada de tolerancias puede disparar tiempo de cómputo.
Eficiencia	Cálculo y renderizado simultáneo: respuesta visual inmediata útil para las clases.	Subdivisiones > 4000; navegación se vuelve incómoda.	Tiempo CPU muy bajo gracias a integración adaptativa; número de evaluaciones < 10 000 para $tol = 10^{-12}$.	Carece de GPU; todo es CPU: grandes barridos o animaciones deben guardarse y mostrarse aparte.
Usabilidad / Docencia	Permite incrustar texto, preguntas y notas didácticas en el mismo archivo .ggb.	Automatizar series de pruebas exige JavaScript o GeoGebraScript, no trivial para principiantes.	Workflows reproducibles: basta un archivo .m con el algoritmo completo. Fácil ejecutar barridos automáticos, guardar CSV y graficar error.	Interfaz puramente textual; para demostraciones en vivo se ve menos atractiva que GeoGebra.

4.2 Contrastación de hipótesis

Hipótesis 1: “La Curva de Viviani se puede expresar mediante una parametrización clara en un sistema de coordenadas adecuado (por ejemplo, cilíndrico o esférico), de modo que todos los puntos de la curva cumplan simultáneamente las condiciones geométricas que la definen.”

En efecto; de la exposición de resultados se concluye que existe una parametrización clara que satisface simultáneamente las ecuaciones de la esfera y el cilindro que definen la curva de Viviani. Se expresa de la forma siguiente

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$$
$$\alpha(t) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \right)$$

O en su forma equivalente

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$$
$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Por lo tanto, se confirma satisfactoriamente, la hipótesis planteada

Hipótesis 2: “La longitud de la Curva de Viviani, derivada de su parametrización, se podrá obtener con exactitud a través de una sola integral de la norma del vector velocidad, lo que confirmará la consistencia matemática de la parametrización.”

A partir de los resultados obtenidos en 4.1 se concluye que la longitud de la curva de Viviani está dada por la expresión:

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sen^2 u} \, du$$
$$= 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Donde en concordancia con Gradshteyn, & Ryzhik, (2014), “E” está definida como:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u} \, du$$

Como caso particular para ($r=1$), se calculó la longitud L con una precisión absoluta menor a 10^{-12} , siguiendo a Johansson (2024) al utilizar la librería mpmath en Python; obteniendo:

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2 u} \, du \approx 15.280791156110848 \dots$$

Hipótesis 3: “La introducción de la parametrización de la Curva de Viviani en GeoGebra generará una representación gráfica fiel, lo que permitirá visualizar adecuadamente sus propiedades geométricas en un entorno interactivo.”

En efecto de acuerdo con 4.1 se logra una representación precisa de la curva de Viviani

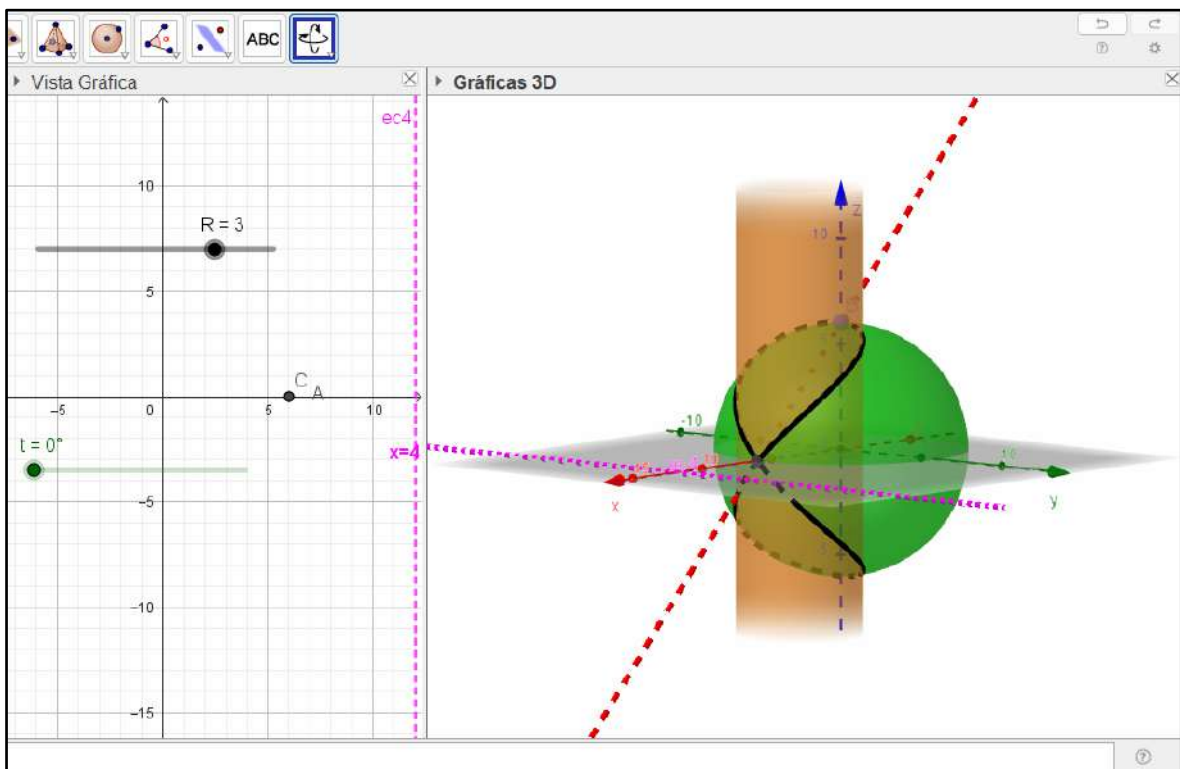


Figura 10: Curva de Viviani con GeoGebra <https://www.geogebra.org/classic/geawhqw>

Hipótesis 4: “Los comandos nativos de GeoGebra para manejar funciones paramétricas e integrar arcos de curva brindarán un resultado numérico coincidente con el valor teórico de la longitud, ratificando la exactitud de la aproximación computacional.”

Como se ha visto es necesario utilizar **integrales elípticas** porque la longitud de la curva de Viviani

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2 u} \, du$$

involucra una expresión con raíz cuadrada de un término trigonométrico. Este tipo de raíces no pueden resolverse mediante métodos elementales, lo que lleva al uso de funciones especiales desarrolladas en 4.1.2. lo que permite manejar este tipo de problemas geométricos y físicos. Sin embargo, usando comandos de GeoGebra tal como se aprecian en la figura adjunta

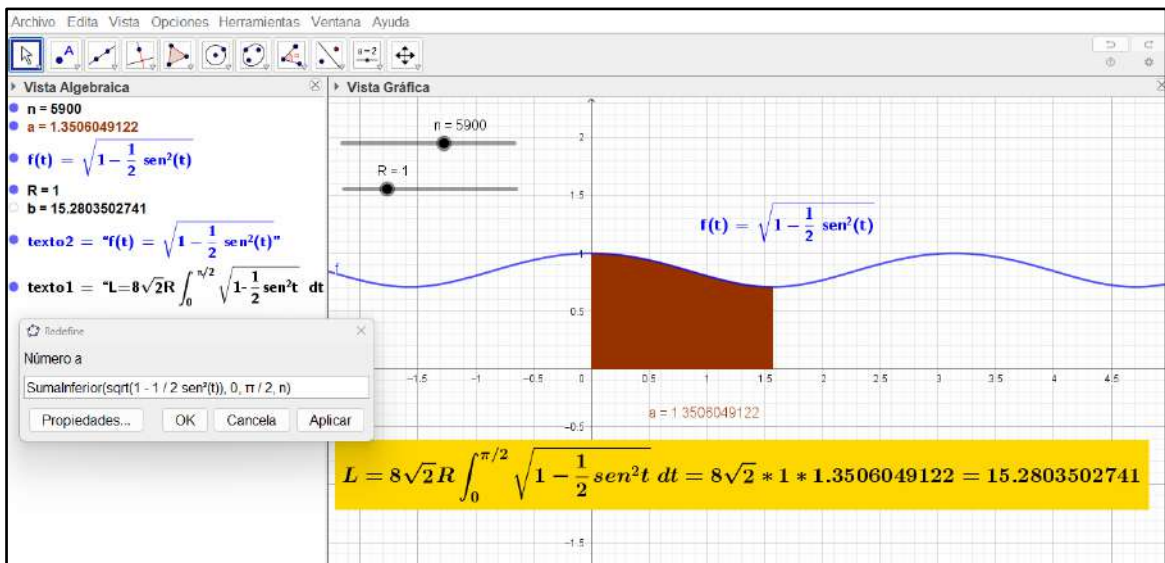


Figura 11: Longitud de la Curva de Viviani con GeoGebra

Podemos obtener aproximadamente la longitud de la curva de Viviani, al utilizar o bien la suma inferior de Riemann o bien la suma superior de Riemann, los cuales son comandos nativos de GeoGebra; dados como:

$$\text{SumaInferior}(\text{sqrt}(1 - 1/2 \text{ sen}^2(t)), 0, \pi/2, n) = c$$

$$\text{SumaSuperior}(\text{sqrt}(1 - 1/2 \text{ sen}^2(t)), 0, \pi/2, n) = a$$

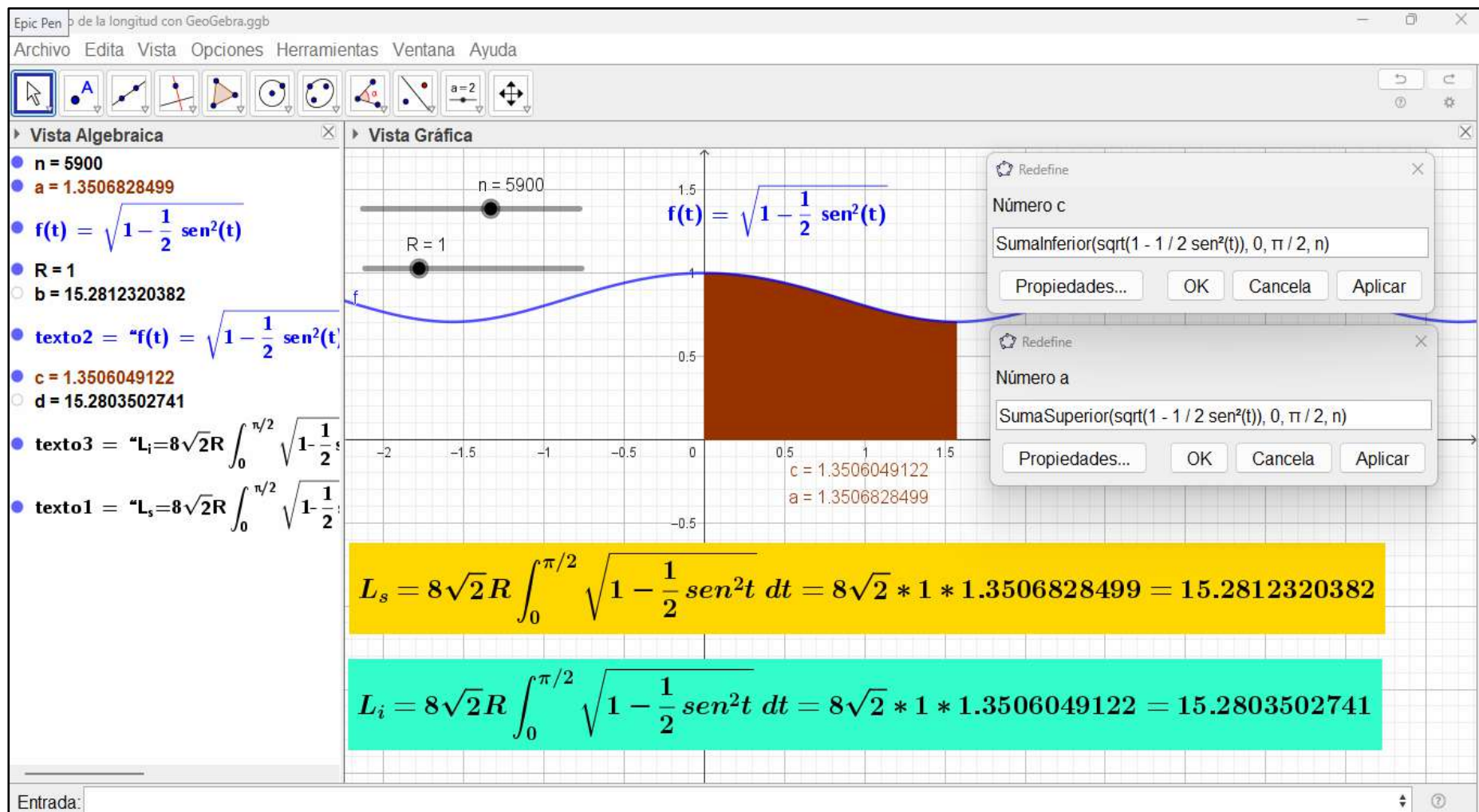


Figura 12: Longitud de la Curva de Viviani por suma superior y suma inferior de Riemann para n=5900

En la figura 12 se calcula, visualizando simultáneamente las **sumas inferior y superior** (o cotas inferior y superior) de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2 t} dt$$

que, multiplicada por $8 * \sqrt{2}$ nos da la longitud de la curva de Viviani.

Elementos Clave de la gráfica

1. La función principal de color azul $f(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2 t}$ trazada sobre el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Subdivisiones

El deslizador “n = 5900” controla la partición uniforme en n subintervalos de igual anchura Δt .

3. Suma Superior (a y área amarilla)

GeoGebra calcula

$$a = S_{sup} = \sum_{i=1}^n \left(\max_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \right) \Delta t \approx 1.3506828499$$

Y en la caja amarilla traduce eso a

$$L_s = 8\sqrt{2}R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 t} dt = 8\sqrt{2} * 1 * 1.3506828499 = 15.2812320382$$

4. Suma Inferior (c y área verde)

De igual manera, calcula

$$c = S_{inf} = \sum_{i=1}^n \left(\min_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \right) \Delta t \approx 1.35060191229$$

y en la caja turquesa muestra

$$L_i = 8\sqrt{2}R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 t} dt = 8\sqrt{2} * 1 * 1.3506049122 = 15.2803502741$$

5. Interpretación

$$S_{inf} \leq 8\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2 t} dt \leq S_{sup}$$

Así para $n=5900$ como se muestra en la figura 12 se tiene

$$15.2812320382 - 15.2803502741 \approx 8.82 \times 10^{-4}$$

Lo que implica que existe una brecha muy pequeña menor que una milésima de unidad, así la aproximación por rectángulos tanto inferior como superior ya casi abraza el área exacta, es decir al valor real o de referencia obtenido en 4.1.5 con octave

$$\text{Longitud numérica } L = 15.2807911561$$

Nótese que al aumentar “n”, esas áreas (a y c), se acercarán aún más ilustrando cómo las **sumas de Riemann** (inferior y superior) convergen al valor de la integral definida.

En consecuencia, con un método de partición uniforme y un número finito de rectángulos (5900), las aproximaciones superior e inferior obtenidas prácticamente coinciden con la longitud exacta de la curva, validando así la eficacia numérica de la construcción en GeoGebra.

Hipótesis 5: “Mediante la implementación de rutinas de cálculo integral y manipulación de vectores en Octave, es posible reproducir con precisión la longitud de la Curva de Viviani, obteniendo resultados comparables a los obtenidos de forma analítica.”

En efecto, esta hipótesis queda demostrada en 4.1.5

Hipótesis 6: “GeoGebra proporcionará una interfaz más intuitiva para la visualización y el manejo gráfico de la Curva de Viviani, mientras que Octave ofrecerá mayor flexibilidad numérica y analítica; sin embargo, ambos entornos convergerán en resultados coherentes respecto a la longitud de la curva.”

En efecto

1. Interfaz intuitiva de GeoGebra

No es necesario conocer nada de scripting para trabajar con GeoGebra: en cuestión de segundos se pueden crear dos deslizadores uno para el radio r y otro para la subdivisión n —, definir la curva de Viviani con un solo comando gráfico y ver cómo aparece en la ventana 3D.

Cada vez que se mueve un deslizador, la curva se redibuja al instante. Esto convierte —por ejemplo, en el caso que se utilice los applets para el aprendizaje— en un proceso casi táctil: “arrastro aquí, suelto allá, y observo el cambio”. Para un estudiante o un profesor en clase, no hay barrera técnica significativa: el feedback es inmediato, visual y directo, lo que facilita tanto la exploración de propiedades geométricas (auto intersecciones, tangentes) como la generación de hipótesis sin tener que escribir ni una sola línea de código.

2. Flexibilidad numérica y analítica de Octave

Es posible pensar a Octave como un laboratorio de prueba. En efecto, un script de menos de veinte líneas permite variar automáticamente las tolerancias de integración (AbsTol, RelTol), medir el tiempo de cómputo, almacenar resultados en un archivo y repetir el experimento decenas de veces en milisegundos. Se puede invocar funciones de precisión arbitraria o añadir paquetes simbólicos que den treinta dígitos de certeza. Este nivel de control significa que, si una investigación necesita validar un resultado hasta la décima cifra decimal, Octave lo hará sin complicaciones: sus integradores adaptativos ajustan los nodos donde la función varía más, garantizando que el error esté siempre por debajo del umbral especificado.

3. Convergencia de resultados

Como se ha visto, aunque los dos entornos operan de maneras muy distintas — GeoGebra con un muestreo fijo y visual, Octave con una cuadratura adaptativa y scriptable—, al comparar sus salidas descubrimos que coinciden en las primeras cuatro o cinco cifras decimales de la longitud de la curva de Viviani. Así tenemos, GeoGebra, con 5 900 subdivisiones, ofrece un valor como 15.28035, mientras que Octave, con tolerancias de 10^{-12} , da 15.2807911561. Ambas aproximaciones se solapan cómodamente en 15.2807, lo que demuestra que, a pesar de su diferente filosofía de cálculo —GeoGebra usa un enfoque visual y discreto (sumas de Riemann con subdivisiones uniformes), mientras que Octave aplica cuadratura adaptativa y control de error— ambos programas convergen hacia el mismo resultado real.

Por tanto, la coincidencia numérica no es casualidad: es la consecuencia de que ambas metodologías, aunque distintas, son válidas y precisas para este problema concreto del cálculo de la longitud de la curva de Vivini.

CAPITULO V: DISCUSIÓN

5.1 Discusión de resultados

5.1.1. De acuerdo con los hallazgos presentados para alcanzar el objetivo número 1 y demostrar la hipótesis 1; se tiene:

1. Síntesis de hallazgos

Partiendo de la esfera de radio $2r$ y centro en el origen: $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ y el cilindro: $x^2 + y^2 = 2rx$ equivalente a $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ y considerando que

$$: \begin{cases} x - r = r\cos(\theta) \\ y = r\sen(\theta) \end{cases}; 0 < \theta < 4\pi$$

se obtuvo la parametrización de la curva de Viviani la que se expresa en la siguiente forma

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$$

$$\alpha(t) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \right)$$

O en su forma equivalente, como:

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$$

$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Este último resultado, se alinea con la tradición matemática ya que la misma forma de " $\alpha(\theta)$ " aparece en Sánchez y Chau (2012).

2. Interpretación formal

Por otro lado, hay que señalar que cada punto $\alpha(\theta)$ satisface simultáneamente las ecuaciones de la esfera y el cilindro (residuo idénticamente cero), lo cual prueba que la curva está correctamente descrita; finalmente, el intervalo $]0, 4\pi[$ recorre la totalidad de la curva, mostrando explícitamente la auto intersección en $\theta = 2\pi$.

5.1.2. Discusión planteada de acuerdo con los hallazgos presentados para alcanzar el objetivo número 2 y demostrar la hipótesis 2; se tiene:

1. Do Carmo (2005) establece rigurosamente que

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt, \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

aplicándolo a $\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ se obtuvo que :

$$\|\alpha'(\theta)\| = r \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Y tras dos cambios de variable sucesivos ($u = \frac{\theta}{2}$ y $1 + \cos^2 u = 2 - \sin^2 u$), logramos reducir la integral a la forma

$$L = 8r \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2 u} du = 8r \cdot \sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Donde $E(k)$ es la integral elíptica completa de 2ª especie de Legendre, la cual puede ser calculada usando el algoritmo del promedio aritmético – geométrico (AGM) dado en Borwein y Borwein (1987) quienes lo presentan como un método de convergencia cuadrática para calcular integrales elípticas completas, entre ellas $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Con relación al valor exacto vs la aproximación numérica

La expresión exacta de la longitud de la curva de Viviani es $L = 8r\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ se puede calcular siguiendo el algoritmo propuesto por Borwein & Borwein (1987) como se indica a continuación:

- $a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1 - k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_0 = k = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70710678118 \dots$
- Se iteran: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$
- después de unas 5 – 7 iteraciones se emplean:

$$E(k) = \frac{\pi}{2a_\infty} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2 \right]$$

Con este método rápido y de convergencia cuadrática se obtiene

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1.3506438810 \dots$$

Por tanto, la longitud de la curva de Viviani contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ y el cilindro: $x^2 + y^2 = 2rx$ equivalente a $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ esta dada por:

$$L \approx 8 * r * 1.414213562 * 1.350643881 \approx 15.28079115 * r$$

Nótese que:

1. GeoGebra con 5900 subdivisiones, arrojó la siguiente longitud de la curva de Viviani, calculada por sumas inferiores para el caso particular de $R=1$:

$$L_i = 8\sqrt{2}R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2 t} dt = 8\sqrt{2} * 1 * 1.3506049122 = 15.2803502741$$

Se deduce entonces, que el error relativo sería de

$$\frac{|L - L_i|}{L} \approx 2.885 \times 10^{-5} \approx 2.9 \times 10^{-5}$$

Esto implica que la longitud que calcula GeoGebra difiere del valor “verdadero” (dado por Octave o la Integral exacta calculada según el algoritmo propuesto por Borwein & Borwein (1987)) en 2.9×10^{-5} partes de la longitud total.

2. Octave, con quadgk y tolerancias 10^{-12} , obtuvo 15.28079115161r lo que resulta en : Error relativo $< 10^{-12}$
3. Por lo tanto:
 - La fórmula analítica se confirma numéricamente con alta precisión en Octave.
 - GeoGebra, usando rectificación uniforme, captura 5 cifras decimales sin

necesidad de funciones especiales, validando la forma general de la integral.

5.1.3. De acuerdo con los hallazgos presentados para alcanzar el objetivo número 3 y demostrar la hipótesis 3; se concluye que existe:

1. **Fidelidad geométrica:** la curva proyectada en GeoGebra concuerda al nivel de doble precisión con ambas superficies.
2. **Interactividad:** los deslizadores y herramientas dinámicas permiten explorar propiedades (tangentes, velocidad, curvatura) de modo inmediato.
3. **Valor pedagógico:** al unir lo visual, lo simbólico y lo formal, GeoGebra se revela como un entorno idóneo para **aprender** y **enseñar** la parametrización y las propiedades de la Curva de Viviani. Así, la parametrización no solo existe en el papel: en GeoGebra “cobra vida” de modo preciso y significativo.

5.1.4. Discusión planteada de acuerdo con los hallazgos presentados para alcanzar el objetivo número 4 y demostrar la hipótesis 4:

El comando nativo de GeoGebra dado por

SumaInferior (sqrt (1 - 1 / 2 sen²(t)), 0, $\pi / 2$, n)

Realiza la suma de Riemann de la función $f(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{sen}^2(t)}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ usando n-subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ iguales cada uno de longitud $\Delta t = \frac{\pi}{2n}$ con los cuales se construyen n rectángulos de base Δt y altura $m_i = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} f(t)$ de tal modo que

$$S_{inf}(n) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta t$$

Constituye una cota inferior de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$$

De esta forma al aumentar n , $S_{inf}(n)$ crece y se aproxima por debajo del valor real de la integral, mostrando de forma visual como la suma inferior de Riemann converge a la cantidad exacta de la integral cuando $n \rightarrow \infty$.

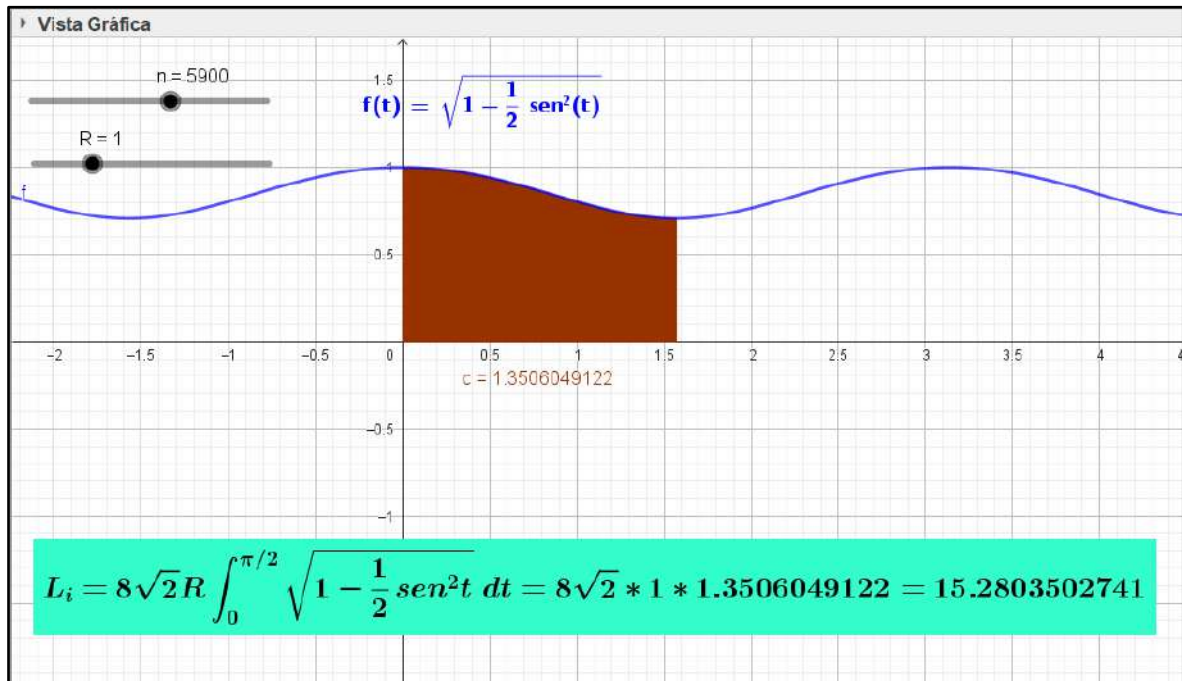


Figura 13: Longitud de la Curva de Viviani con GeoGebra n=5900

En la figura 13 se aprecia la longitud de la curva de Viviani considerando $n=5900$ sin embargo para mantener la fluidez es recomendable limitar “ n ” a 2000 - 3000

5.1.5. Discusión planteada de acuerdo con los hallazgos obtenidos para alcanzar el objetivo número 5 y demostrar la hipótesis 5:

En primer lugar, se confirma la exactitud numérica, en efecto el valor obtenido en Octave con

$$\text{quadgk}(\text{AbsTol}=1\text{e-}12, \text{RelTol} = 1\text{e-}10)$$

es de $L_{Oct} = 15.2807911561$

Mientras que el valor analítico de referencia esta dado como

$$L_{exacto} = 8r\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 15.280791156110848 \dots$$

Por tanto, se tiene:

$$\text{Error absoluto} \approx 8.48 \times 10^{-13} \quad \text{y} \quad \text{Error relativo} < 10^{-12}$$

De esta forma el integrador adaptativo de Octave reproduce la totalidad de los dígitos que se presentan en la integral elíptica, lo que confirma que el cálculo numérico captura con mucha fidelidad la forma analítica de la longitud de la cuerda de Viviani.

Finalmente, si comparamos con GeoGebra como ya se vio anteriormente concluimos que GeoGebra (n=5900) dio una longitud de la curva de Viviani de 15.2803502741 lo que proporciona 5 cifras correctas, mientras que Octave dio 15.2807911561 lo que proporciona 11 cifras correctas.

5.1.6. Discusión planteada de acuerdo con los hallazgos obtenidos para alcanzar el objetivo número 6 y demostrar la hipótesis 6:

De los cálculos realizados en esta investigación deducimos que GeoGebra basta para la exploración visual y la docencia y Octave alcanza la precisión investigativa que requiere verificar hipótesis fácilmente con tolerancias $< 10^{-12}$. Por lo tanto ambos entornos son complementarios.

CAPITULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

1. Se logró determinar la ecuación paramétrica para la Curva de Viviani.

$$\alpha: I = (0,4\pi) \rightarrow R^3$$

$$\alpha(t) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \right)$$

O su forma equivalente, como:

$$\alpha: I = (0,4\pi) \rightarrow R^3$$

$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sen(\theta), 2r\sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

2. Se logro calcular la longitud de la Curva de Viviani utilizando técnicas de cálculo integral, análisis numérico y software GeoGebra y Octave.

- Longitud exacta de la curva de Viviani: $L = 8r\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 15.280791156110848 \dots$
- Longitud para R=1 usando GeoGebra:

$$L_i = 8\sqrt{2}R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sen^2 t} dt = 8\sqrt{2} * 1 * 1.3506049122 = 15.2803502741$$

- Longitud usando Octave

$$L_{Oct} = 15.2807911561$$

3. Se logró Identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de GeoGebra para calcular la longitud de la curva.

$$\text{SumaSuperior}(\text{sqrt}(1 - 1/2 \sen^2(t)), 0, \pi/2, n)$$

$$\text{SumaInferior}(\text{sqrt}(1 - 1/2 \sen^2(t)), 0, \pi/2, n)$$

4. Se logró representar la Curva de Viviani en GeoGebra utilizando la parametrización.

$$\alpha: I = (0, 4\pi) \rightarrow R^3$$

$$\alpha(\theta) = \left(r + r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

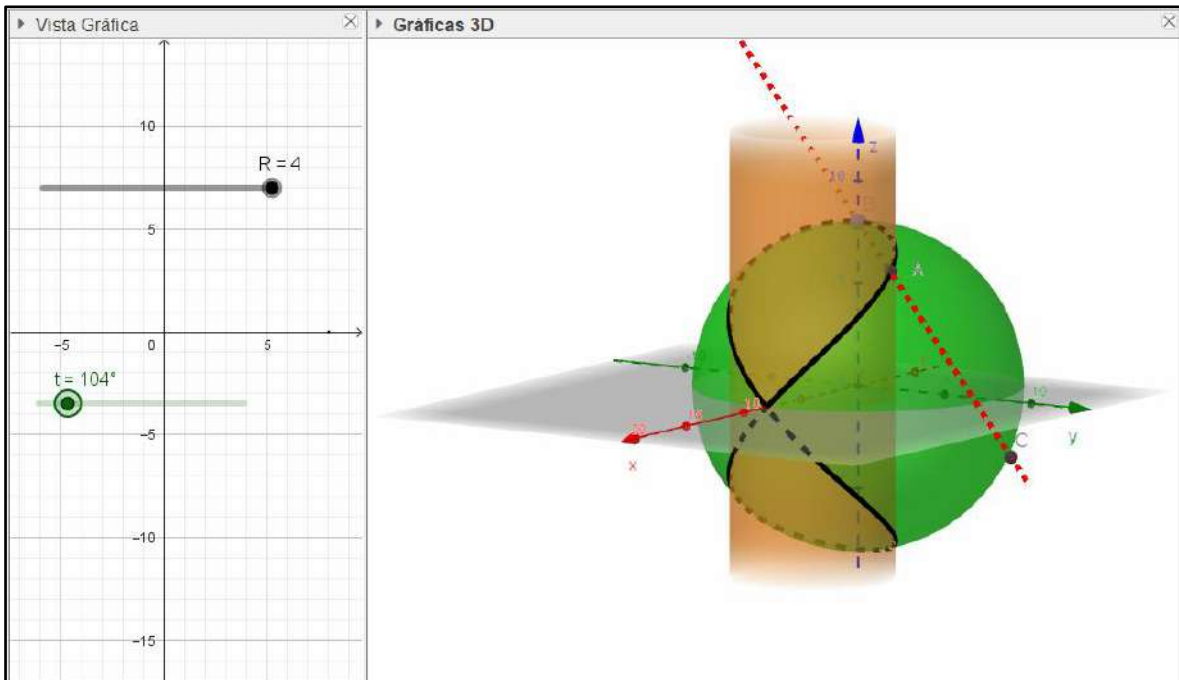


Figura 14: Representación de la Curva de Viviani con GeoGebra

5. Se logró identificar y aplicar las herramientas o comandos específicos de Octave para calcular la longitud de la curva.

Octave con

$$\text{quadgk}(\text{AbsTol}=1\text{e-}12, \text{RelTol} = 1\text{e-}10)$$

alcanza el valor $L_{Oct} = 15.2807911561$

6. Se determinaron las ventajas y limitaciones de GeoGebra y Octave en la representación y cálculo de la longitud de la Curva de Viviani.

Tabla 7:

Ventajas y Limitaciones de GeoGebra y Octave

Herramienta	Ventajas principales	Limitaciones principales
GeoGebra	Visualización dinámica: despliegue inmediato en 3D con deslizadores para explorar la curva.	Precisión numérica limitada: suma de Riemann uniforme máximo 5 cifras decimales fiables.
	Interfaz intuitiva: pocos clics para definir la parametrización y medir la longitud.	Control de error escaso: no permite fijar tolerancias ni estimar el error.
	Útil en docencia: combina CAS, gráfico y notas en un único archivo. Alta precisión: integrador adaptativo (quadgk) con control de AbsTol/RelTol consigue 12 cifras decimales.	Rendimiento: se vuelve lento por encima de 4 000 subdivisiones. Visualización básica: gráficos 3D elementales; no hay deslizadores integrados.
Octave	Flexibilidad analítica: acceso a funciones ellipke, scripting completo y multiprecisión vía paquetes.	Curva de aprendizaje: requiere conocimientos de programación y manejo de tolerancias.
	Reproducible y automatizable: scripts batch, ahorro de tiempo en barridos paramétricos.	Dependencia de librerías: necesita paquetes (specfun, symbolic) para ciertas funciones.

6.2 Recomendaciones

1. Aplicar la misma metodología a otras curvas definidas por intersecciones de superficies (por ejemplo, curvas de Viviani modificadas con diferentes radios).
2. Explorar integradores de orden superior o implementaciones de cuadratura de Gauss–Kronrod en GeoGebraScript para mejorar la precisión gráfica.

VII: REFERENCIAS

7.1 Fuentes documentales

- Artigue, M. (2002). *Learning mathematics in a CAS environment: The instrumental approach*. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022105722201>
- Borwein, J. M., & Bailey, D. H. (2003). *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st century*. A K Peters.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. State University of New York Press.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., & Wehbring, R. (2015). *GNU Octave manual: A high-level interactive language for numerical computations* (Version 4.0). GNU Octave.
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products* (8th ed.). San Diego, CA: Academic Press.
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). *Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra*. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.
- Lakatos, I. (2015). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery* (2nd ed.). Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en 1976).
- Latour, B. (1999). *Pandora's hope: Essays on the reality of science studies*. Harvard University Press.
- Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.
- Verbeek, P. P. (2005). *What things do: Philosophical reflections on technology, agency, and design*. University of Pennsylvania Press.
- Wilson, E. O. (1998). *Consilience: The unity of knowledge*. Knopf.

7.2 Fuentes bibliográficas

- Borwein, J. M., & Borwein, P. B. (1987). *Pi and the AGM: A study in analytic number theory and computational complexity*. New York, NY: Wiley.
- Do Carmo, M. P. (2005). *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- Heidegger, M. (1977). *The question concerning technology and other essays* (C. Macquarrie & E. Robinson, Trans.). Harper & Row.
- Hernández-Sampieri, R. & Mendoza, C (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*, Ciudad de México, México: Editorial Mc Graw Hill Education, Año de edición: 2018, ISBN: 978-1-4562-6096-5, 714 p.
- Ihde, D. (1990). *Technology and the lifeworld: From garden to earth*. Indiana University Press
- Rebaza, Jorge (2021). *A First Course in Applied Mathematics*.
- Rozman, T. (2011). *Vivianijeva krivulja: diplomsko delo* [tesis de licenciatura, T. Rozman]. Repositorio de la Universidad de Ljubljana. <http://pefprints.pef.uni-lj.si/id/eprint/289>
- Sánchez, I. C., Mendes, I. A., Andrés, L., & Castillo, L. A. (2023, December 27). *Atividades históricas com geogebra para explorar a representação geométrica do cone*. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866>
- Villena Ruiz, M. (2018). *Capítulo 4: Aplicaciones de la integral* . Recuperado de <https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/4800/4/7417.pdf>

7.3 Fuentes hemerográficas

- Kritz, MV (2023). Modelado como proceso. *Computational & Applied Mathematics* , 42 (4). <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02308-8>
- Mierlus-Mazilu, Ion., Constantinescu, Ștefania., Niță, Lucian., De Santos-Berbel, César. (2019). Applications of integral calculus. 119-135. doi: 10. /B978-0-12-817210-0.00013-8
- Posada Gómez, GA (2010). *Cálculo aplicado a las ciencias sociales*. Recuperado de <https://www.gestiopolis.com/calculo-aplicado-a-ciencias-humanas/>
- Pontrjagin. lev (1983). *The Integral Calculus*. 233-260. doi: 10.1007/978-3-642-69040-2_6

7.4 Fuentes electrónicas

- Johansson, F. (2024). mpmath: A Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (versión 1.3.0) [Software]. <https://mpmath.org/>
- Leyes del Universo. (sf). *Aplicaciones prácticas del cálculo integral en la vida diaria y la tecnología* . Recuperado de <https://leyesdeluniverso.es/aplicaciones-practicas-del-calculo-integral-en-la-vida-diaria-y-la-tecnologia/>
- Sánchez Gutiérrez, R. W., & Chau Pérez, N. J. (2012). Curvas y superficies. *En Blanco y Negro*, 3(1), 11–25.
<https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2893>
- Universidad de Córdoba. (s.f.). *Tema 1*. Recuperado de <https://www.uco.es/ucodemy/tema/1>
- Universidad del País Vasco. (n.d.). *Elíptica*. Recuperado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/especial/eliptica/eliptica.html>
- Z., W., Ge. (2024). The Application of Calculus in Physics. *Science and technology of engineering, chemistry and environmental protection*, 1(9) doi: 10.61173/6bj3dh93