



Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Aplicada

Modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Tesis

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática Aplicada

Autor

Pedro Luis Rosales Loarte

Asesor

Msc. Juan Carlos Broncano Torres

Huacho – Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial – Sin Derivadas - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Reconocimiento: Debe otorgar el crédito correspondiente, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se realizaron cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de ninguna manera que sugiera que el licenciante lo respalda a usted o su uso. **No Comercial:** No puede utilizar el material con fines comerciales. **Sin Derivadas:** Si remezcla, transforma o construye sobre el material, no puede distribuir el material modificado. **Sin restricciones adicionales:** No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros de hacer cualquier cosa que permita la licencia.



LICENCIADA

(Resolución de Consejo Directivo N° 012-2020-SUNEDU/CD de fecha 27/01/2020)

Facultad de Ciencias / Escuela de Matemática Aplicada

METADATOS

DATOS DEL AUTOR (ES):		
APELLIDOS Y NOMBRES	DNI	FECHA DE SUSTENTACIÓN
Pedro Luis Rosales Loarte	70856895	26 - 03 - 2024
DATOS DEL ASESOR:		
APELLIDOS Y NOMBRES	DNI	CÓDIGO ORCID
Broncano Torres Juan Carlos	15861538	0000-0002-7148-4554
DATOS DE LOS MIEMBROS DE JURADOS – PREGRADO/POSGRADO-MAESTRÍA-DOCTORADO:		
APELLIDOS Y NOMBRES	DNI	CODIGO ORCID
Carlos Roberto Pesantes Rojas	17937958	0000-0003-4298-5541
Henry Cristhian Zubieta Rojas	43404788	0000-0001-9441-1369
Pedro James Vasquez Medina	16562688	0000-0001-6241-5525

Modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

ORIGINALITY REPORT

16%

SIMILARITY INDEX

15%

INTERNET SOURCES

4%

PUBLICATIONS

8%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1

cumbia.ath.cx

Internet Source

1%

2

repositorio.uam.es

Internet Source

1%

3

digibug.ugr.es

Internet Source

1%

4

Submitted to Universidad TecMilenio

Student Paper

1%

5

repositorioinstitucional.unison.mx

Internet Source

1%

6

rua.ua.es

Internet Source

<1%

7

repositorio.uigv.edu.pe

Internet Source

<1%

8

ddd.uab.cat

Internet Source

<1%

9

fceia.unr.edu.ar

Internet Source

<1%

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO EVALUADOR



Dr. Carlos Roberto Pesantes Rojas

Presidente



Mo. Henry Cristhian, Zubieta Rojas

Secretario



Dr. Pedro James Vásquez Medina

Vocal

Mo. Juan Carlos, Broncano Torres
ASESOR

Msc. Juan Carlos Broncano Torres

Asesor

DEDICATORIA

A mis abuelos, mi madre y a toda mi familia quienes me apoyaron todo el tiempo en mi formación académica, y me alentaron a continuar cuando parecía rendirme.

A mis maestros quienes nunca desistieron al enseñarme, a pesar de múltiples circunstancias, ellos continuaron depositando su confianza en mí.

Para ellos es este reconocimiento quienes me brindaron su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTO

Quisiera agradecer a mis abuelos por su amor desmedido y su apoyo incondicional, en segundo lugar, a mi asesor MSc. Broncano Torres Juan Carlos, quien me guío durante todo el proceso de este proyecto.

También deseo agradecer a la Facultad de Ciencias por permitir mi formación académica necesaria para llevar a cabo este proceso de investigación.

Por último, quiero agradecer a mis compañeros y a toda mi familia, por apoyarme cuando mis ánimos decaían. En especial, quiero hacer mención a mis abuelos y madre, que siempre estuvieron ahí para darme palabras de apoyo y un abrazo reconfortante para renovar energías.

Muchas gracias a todos.

ÍNDICE

	Pág.
DEDICATORIA	vi
AGRADECIMIENTO	vii
ÍNDICE DE TABLAS	xi
INDICE DE FIGURAS.....	xii
RESUMEN	xiii
ABSTRACT.....	xiv
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.1. Descripción de la realidad problemática.....	2
1.2. Formulación del problema	4
1.2.1. Problema general.....	4
1.2.2. Problemas específicos	4
1.3. Objetivos de la investigación	5
1.3.1. Objetivo general.....	5
1.3.2. Objetivos específicos	5
1.4. Justificación de la investigación	5
1.5. Delimitación del estudio	6
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO	8
2.1. Antecedentes de la investigación	8
2.1.1. Investigaciones internacionales.....	8
2.1.2. Investigaciones nacionales	9
2.2. Bases teóricas.....	10
2.2.1. Grafo.....	10
2.2.2. Teorías del aprendizaje	11
2.2.3. Teorías de la enseñanza.....	12
2.2.4. Diseño instruccional.....	12
2.2.5. Trayectoria hipotética de aprendizaje	13

2.2.6.	Fundamentos del aprendizaje y la educación.....	13
2.2.6.1.	Teorías del aprendizaje	13
2.2.6.1.1.	Teoría sociocultural de Vygotsky	14
2.2.6.1.2	Aprendizaje significativo de Ausubel	15
2.2.6.1.3.	La teoría de inteligencia múltiples de Gardner	15
2.2.6.1.4.	La teoría de aprendizaje de Piaget	16
2.2.6.1.5.	La teoría socio constructivista del aprendizaje	16
2.2.6.1.6.	El conectivismo.....	17
2.2.6.2.	Contexto actual del aprendizaje	17
2.2.6.2.1.	La generación Z	18
2.2.6.2.2.	Los millennials en el Perú.....	18
2.2.6.3.	Trayectorias hipotéticas de aprendizaje	19
2.2.6.3.1	Rutas de Aprendizaje	21
2.2.6.3.2.	Mapas de aprendizaje.....	22
2.2.6.4.	¿Qué es la educación?.....	23
2.2.6.4.1	La educación como sistema de comunicación	26
2.2.7.	Modelo Matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.....	27
2.2.7.1.	Teoría de Grafos.....	27
2.2.7.2.	Reseña histórica de los grafos	28
2.2.7.3.	Grafos.....	28
2.2.7.3.1.	Grafo dirigido.....	30
2.2.7.3.2.	Subgrafo.....	31
2.2.7.3.3.	Camino o arco	32
2.2.7.3.4	Grafo conexo.....	32
2.2.7.3.5	Grafo de Hamilton	35
2.2.7.3.6.	Árbol y Bosque	35
2.2.7.3.7.	Grafos isomorfos.....	35
2.2.7.3.8	Grafos de Euler	36
2.2.7.4.	Abstracción matemática de los logros del aprendizaje	38
2.2.7.5.	Abstracción matemática de los objetivos de enseñanza.....	41
2.2.7.6.	Abstracción matemática de las creencias del docente.....	43
2.2.7.7.	Abstracción matemática de las actividades	44
2.2.7.8.	Modelo de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje	46
2.2.7.8.1	Notación del modelo	46
2.2.7.8.2.	Conjunto de datos del modelo.....	48
2.2.7.8.3.	Variables del modelo	51

2.3 Bases filosóficas.....	52
2.4 Definiciones de términos básicos.....	52
2.5 Hipótesis de la investigación.....	53
2.5.1. Hipótesis general.....	53
2.5.2. Hipótesis Específicas	54
2.6 Operacionalización de las variables	54
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	55
3.1. Diseño metodológico	55
3.2. Población y muestra.....	56
3.2.1. Población.....	56
3.2.2. Muestra	56
3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	57
3.4. Técnicas para el procesamiento de la información	58
CAPÍTULO IV. RESULTADOS.....	59
4.1. Análisis de resultados	59
CAPÍTULO V. DISCUSIÓN.....	60
1.1. Discusión de resultados.....	60
CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	62
6.1. Conclusiones	62
6.2. Recomendaciones	63
CAPÍTULO VII. REFERENCIAS	64
7.1. Fuentes bibliográficas	64
7.2. Fuentes electrónicas.....	66
ANEXOS	71
ANEXO N° 1. MATRIZ DE CONSISTENCIA.....	72
ANEXO N° 2. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES E INDICADORES.....	73
ANEXO N° 3. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA	74
1. Análisis de contenido y capacidades.....	74
2. Posibles Caminos de Aprendizaje.....	77
3. Posibles Caminos de Aprendizaje y Dificultades	78
4. Análisis de Tareas	79

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Capacidades para el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas	77
---	----

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Componentes del triángulo interactivo en relación con las TIC.	24
Figura 2. Factores intervinientes del aprendizaje y las competencias.	25
Figura 3. Representación geométrica del problema.....	28
Figura 4. Grafo.....	29
Figura 5. Grafo dirigido.....	30
Figura 6. Orden de un grafo.....	30
Figura 7. Grado de un vértice.	31
Figura 8. Ciclo.	33
Figura 9. Grafos isomorfos.	36
Figura 10. Circuito de Euler.	37
Figura 11. Grafo de Euler.	37
Figura 12. Grafo adjunto.....	37
Figura 13. Diseño de las unidades de aprendizaje.	43
Figura 14. Grafo que recoge los caminos de aprendizaje.....	49
Figura 15. Mapa conceptual general de la función cuadrática	75
Figura 16. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial de la función cuadrática	75
Figura 17. Conexiones y procedimientos	76
Figura 18. Posibles caminos de aprendizaje	78
Figura 19. Posibles caminos de aprendizaje teniendo en cuenta dificultades	79
Figura 20. Ciclo de planificación local	79

RESUMEN

Esta investigación se enmarca dentro de las llamadas teorías del aprendizaje, se pretende elaborar una herramienta que permita contemplar desde un ángulo diferente el aspecto conceptual de los procesos de gestión educativa, con la finalidad de brindar un nuevo panorama para los educadores cuando pretendan planificar sus sesiones de aprendizajes. Para tal fin, se ha generado un modelo matemático en base a la teoría de grafos que pretende describir de manera relacional los objetivos de enseñanza, los logros del aprendizaje y las actividades que describen la experiencia educativa.

La finalidad del modelo es de carácter instrumental para el manejo de algunos aspectos de la complejidad de la experiencia educativa. No obstante, la simplificación estructurada de las unidades de aprendizaje que proporciona el modelo permite apreciar las relaciones entre las causas y los efectos de planificación de las sesiones de clase y la planificación curricular.

El motivo del presente trabajo de investigación fue, satisfacer la necesidad de desarrollo de nuevas herramientas de gestión educativa que permitan un aprendizaje óptimo y eficaz, así como la de brindar nuevos marcos teóricos de discusión que busquen aportar a la conceptualización de la educación matemática.

Palabras claves: Modelo, Trayectorias hipotéticas de aprendizaje, teoría de aprendizaje.

ABSTRACT

The present research is limited within the so-called learning theories, The aim is to describe a tool that allows us to contemplate the conceptual aspect of educational management processes from a different angle, with the aim of helping pedagogues to develop learning strategies. For this purpose, a mathematical model has been generated based on graph theory that aims to relationally describe the teaching objectives, learning achievements and learning activities.

The purpose of the model is instrumental in managing some aspects of the complexity of the educational experience. However, the structured simplification of the learning units provided by the model allows us to appreciate the relationships between the causes and effects of planning class sessions and curricular planning.

The reason for this research work was to satisfy the need for development of new educational management tools that allow optimal and effective learning, as well as providing new theoretical frameworks for discussion that seek to contribute to the conceptualization of mathematics education.

Keywords: Model, Hypothetical learning trajectories, learning theory.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se ha logrado las siguientes propuestas:

1. Desarrollar un modelo matemático para los objetivos de enseñanza, los logros y las actividades de aprendizaje.
2. Construir un modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.
3. Modelar axiomáticamente las creencias de los docentes de matemática.

A continuación, se presenta la descripción del contenido por capítulos:

En el **Capítulo 1**, se expone el problema que motivó esta investigación. En la sección 1, se describe el problema desde la óptica educativa. En la sección 2, se elabora la formulación del problema. En la sección 3, se plantea los objetivos de la investigación. En la sección 4, se justifica la propuesta planteada, surgiendo un nuevo sistema interpretativo del problema planeado en la sección 2.

En el **Capítulo 2**, se presente el marco teórico general dedicado exclusivamente a fundamentar la necesidad de nuestra investigación, señalando los antecedentes de la misma. Además, se exhibe los fundamentos teóricos de nuestra propuesta.

En el **Capítulo 3**, se propone el diseño metodológico de investigación, señalando puntualmente el tipo, el nivel y el diseño de nuestra investigación. Así como la población, muestra y operacionalización de variables.

Se expone los fundamentos del aprendizaje y la educación, en ella se detalla todas las aristas teóricas pertinentes para nuestra propuesta.

Se presenta el modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Finalmente, el Capítulo 4 indican los resultados y las sugerencias de la propuesta.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Actualmente, la planificación educativa, en el ámbito de las matemáticas están orientadas a los logros de aprendizaje que se desee alcanzar. Carriazo et al, (2020) señala “La planificación educativa permite la efectividad del proceso de enseñanza aprendizaje, es una herramienta fundamental para construir una educación con calidad” (p.87).

En ese contexto Carriazo et al (2020) señala que el docente debe planificar “lo que se considera que hacer, como hacer, para que, con que, quien y cuando se debe hacer” (p.88). Por tal motivo Casillas (2019) sostiene “que la práctica educativa solo cobra vida cuando son analizadas e interpretadas a través del ojo crítico de la realidad diaria del docente” (p.14).

No obstante, Trigueros (2021) afirma “que el diagnóstico y la evaluación de habilidades, actitudes y conocimiento son problemas importantes en el ámbito de las ciencias de la educación” (p.8). Existen una gran variedad de métodos de evaluación y diagnóstico. Muchos de ellos se fundamentan en técnicas de análisis cualitativo, las cuales son muy útiles en el caso del estudio de pequeños grupos. Por lo tanto; cuantificar variables mediante una medida específica en educación no es fácil. Estas no se pueden controlar, no se pueden definir con rigor y de manera objetiva.

Por consiguiente, Bocanegra y Devia (2019) sostienen como alternativa a la planificación educativa “Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje por ser una herramienta que brinda posibilidades para la gestión de la enseñanza - aprendizaje, señala el tiempo oportuno para intervenir y generar apoyo en los conocimientos que se deseen obtener” (p.2).

Es decir; permite generar un ciclo de enseñanza y por ende indagar el pensamiento matemático de los alumnos inmersos en el ciclo vital del aprendizaje.

Además; proporciona métodos para analizar las actividades que se utilizaran antes, durante y después de la experiencia educativa con la finalidad de aprender un tema concreto.

Por tal razón, es de interés para los profesores, en particular para los profesores de matemática. A la vez Simón, (2014), citado por Cárcamo et al., (2021) afirma “El constructo trayectoria hipotética de aprendizaje es un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Consta de tres componentes: una meta de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético” (p.47).

Además; Dierdorff et al., (2019) señalan al respecto “La trayectoria hipotética de aprendizaje se infiere de los datos recopilados porque no es posible medir directamente el aprendizaje real de los estudiantes” (p.133)

Membrive (2022) sostiene que “El aprendizaje es inseparable del marco histórico cultural y de las prácticas sociales en las que tiene lugar. Así, su comprensión no puede lograrse al margen de la comprensión del escenario en el que se desarrolla la actividad humana” (p.7).

Por tal motivo es uno de los tópicos más estudiados en psicología y la didáctica. Así mismo Salinas et al., (2022) sostiene que “las investigaciones más recientes y significativas en este campo se refieren los vínculos existentes entre los procesos de aprendizaje y las trayectorias hipotéticas de aprendizaje” (p.75).

Siendo estas últimas, en opinión de Barnhart y Van (2018) “una herramienta que describe desde una perspectiva constructivista el diseño y el uso de las tareas matemáticas para promover el aprendizaje conceptual matemático” (p.87).

Por lo tanto; las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son utilidad para la investigación y la planificación curricular. En ese sentido, Simón (2014) señala que una trayectoria hipotética de aprendizaje está compuesta por “el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje, el pensamiento y el aprendizaje en el que los escolares se aplican” (p.133).

Por otra parte, Franco et al., (2020) sostiene que “existe una gran variedad de trabajos de investigación que indican las dificultades que tienen los profesores al momento de diseñar y planificar sus sesiones de clase” (p.54).

Por consiguiente, el docente debe usar un esquema arquitectónico estructurado (trayectorias hipotéticas de aprendizaje) para presentar experiencias educativas significativas para los estudiantes y, además, proporcionen información relevante sobre el progreso de los estudiantes.

Por consiguiente, el profesorado en el desempeño de sus actividades instruccionales para enseñar a otras personas requiere de herramientas operativas de dimensión planificadora para la preparación de clases o sesiones, tal como lo sostiene Carriazo et al., (2020) al afirmar que las características propias del docente al momento de su desempeño incluyen “el diseño de entornos TIC de aprendizaje o la búsqueda y preparación de recursos y materiales didácticos relacionados con la materia” (p.90).

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Cómo desarrollar un modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?

1.2.2. Problemas específicos

1. ¿Cuáles son las herramientas matemáticas que permiten desarrollar un modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?
2. ¿Qué elementos básicos de la didáctica de la matemática permiten el desarrollo del modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar, un modelo matemático que represente la trayectoria hipotética de aprendizaje.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Seleccionar las herramientas matemáticas que permiten desarrollar un modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.
2. Determinar los elementos básicos de la didáctica de la matemática que permita el desarrollo del modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

1.4. Justificación de la investigación

Esta investigación se justifica por las siguientes razones:

El desarrollo emergente de las Tecnológicas de la información y la comunicación proporciona nuevas oportunidades a los docentes y a las instituciones educativas, para el desarrollo de herramientas que permitan la toma de decisiones antes, durante y después de la planificación y el diseño de sesiones de clase, con la finalidad de afrontar satisfactoriamente las diferentes problemáticas didácticas que involucra el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Según Cobrainza (2018), “todo modelo matemático es una herramienta de aproximación al objeto investigado mediante una organización jerárquica de conceptos, pues permite crear mecanismos de reflexión que regulan el grado de correspondencia entre el objeto y el modelo, su elaboración e interpretación depende del marco teórico” (p. 74). En tal sentido, podemos reafirmar que “un modelo expresa las relaciones entre variables con ayuda de esquemas conceptuales que definida por la dimensionalidad descriptiva y empírica” (p.33).

Tal como lo señala Caraballo (2023).

Una ponderación fuerte que justifica el propósito de esta investigación es su contenido técnico, su originalidad y su alcance universal. Su utilidad es instrumental, pues permitirá generar el desarrollo de procesos cíclicos de la enseñanza - aprendizaje. Además; ayudara de manera definitoria al desarrollo de las dimensionalidades docente: dimensión planificadora, dimensión metodológica, dimensión asesora y tutorial; dimensión evaluadora y dimensión investigadora.

Según Gaitán et al (2018) “en el ámbito de la matemática y la matemática aplicada, hay una aceptación cada vez mayor por la conceptualización de diversas teorías, ya que nos permite visualizar nuevas relaciones y nuevos campos de análisis para unificar diversas construcciones mentales” (p.55).

1.5. Delimitación del estudio

A continuación, con fines metodológicos, el estudio está limitado por los siguientes aspectos:

1. Delimitación espacial

La construcción, evolución, análisis, e interpretación del modelo matemático representa las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que se formula a nivel general, del que se deducen casos especiales y aplicaciones particulares de metodologías de gestión didáctica. Es decir, delimitamos nuestro estudio a nivel jerárquico, dentro del ámbito administrativo de la educación.

2. Delimitación temporal

El estudio es tipo longitudinal en el tiempo y el período de la planificación y desarrollo de la tesis comprendido en los meses de enero hasta diciembre del 2023.

3. Delimitación social

La investigación fue el resultado de la observación de las actividades educativas: planificación de sesiones de aprendizaje y diseño curricular.

4. Delimitación conceptual

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron conceptos interdisciplinarios de la matemática y ciencias de la educación. Concretamente, conjuntos, relaciones, funciones, grafos y la teoría educativa. En resumen, el desarrollo de la investigación requiere fundamentalmente dos ingredientes conceptuales, uno por cada disciplina:

Matemática: $M \leftarrow$ Grafos.

Educación: $E \leftarrow$ Diseño de sesión de clase.

Al integrar estos conceptos en el ambiente de las dos disciplinas mencionadas producirán el modelo para representar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, que denotaremos por (M, E) .

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. Investigaciones internacionales

En la Universidad de Barcelona (España), Membrive (2022), en la tesis doctoral titulada: “La construcción de trayectorias personales de aprendizaje: conexiones entre experiencias de aprendizaje en múltiples contextos, determina las conexiones del aprendizaje y la identidad del aprendizaje”; Utilizó el método cualitativo, nivel descriptivo, de dimensión social, explicativo y no experimental. La principal conclusión fue: “Dimensionar la proyección de las trayectorias de aprendizaje y su relación con la participación en actividades educativas; así concebir un modelo de educación distribuida e interconectada donde las trayectorias personales de aprendizaje son el instrumento conceptual que indican la adquisición de las competencias de los estudiantes”.

En la Universidad distrital Francisco José Caldas (Colombia), Caraballo (2021), en su tesis de maestría titulada: “La argumentación infantil en una trayectoria hipotética de aprendizaje del área y perímetro, diseño una trayectoria hipotética de enseñanza a partir de una trayectoria hipotética de aprendizaje del área y perímetro que incorpore procesos argumentativos”. En ella, logra “identificar algunos procesos de argumentación matemática en base a las trayectorias reales de aprendizaje”. El tipo de investigación es básica, con enfoque cuantitativo, el diseño utilizado fue experimental, transversal y correlacional.

Gómez et al., (2019), en su artículo de investigación titulado: “Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación, realizó una investigación básica, su estudio es descriptivo y explicativo, con un diseño no experimental de corte transversal”. El principal resultado fue: “Mostrar la utilidad de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje teniendo en cuenta dos aspectos de la práctica del profesor de matemáticas: el

análisis de la contribución de una tarea y una secuencia de tareas al logro de un objetivo de aprendizaje; además; luego del análisis de información recolectado, concluyó que la evaluación del aprendizaje debe tener una componente social y motivacional”.

2.1.2. Investigaciones nacionales

En la Universidad de San Martín de Porres, Mori (2020), en su tesis titulada: “Relación entre los estilos de aprendizaje y la trayectoria académica de los estudiantes de la facultad de odontología de la Universidad de San Martín de Porres, egresados en el 2018 y 2019”, determinó y estableció la relación entre los estilos de aprendizaje y la trayectoria académica de los estudiantes de la Facultad de Odontología de la Universidad de San Martín de Porres (FO-USMP). El tipo de investigación fue teórica o básica, con un diseño no experimental, en un nivel correlacional y con enfoque cuantitativo. La principal conclusión fue: “Que existe relación significativa entre los estilos de aprendizaje y la trayectoria académica de los estudiantes de la FO-USMP, egresados en el 2018-II y 2019-I”.

Velázquez (2022), en su artículo de investigación: “Gestión educativa para mejorar la eficiencia del desempeño docente en educación primaria en Perú”. “Análisis del menester de la aplicación de un modelo de gestión educativa que garantice la mejora del desempeño de los docentes de Educación Primaria en el Perú, ya que, desde hace algunos años, ha habido continuos esfuerzos en pro de la descentralización de la gestión educativa, siendo uno de ellos el de evidenciar estudios realizados en esta área de investigación”. Sus conclusiones señalan que “es necesario que, al elaborar un modelo de gestión educativa, se debe tener en cuenta que este implica una variación de pensamiento en el cual la institución es concebida como una misión donde las acciones agrupadas hacen repercusión en un beneficio para todas las partes involucradas”. El enfoque de su investigación fue de revisión sistemática, bajo un enfoque cualitativo. La técnica empleada fue el análisis documental mediante PRISMA.

En la Universidad José Faustino Sánchez Carrión (Huacho), Solorzano (2021), en su tesis titulada: “Modelo categórico del proceso enseñanza aprendizaje, elaboró un modelo matemático del proceso enseñanza aprendizaje, en su investigación manifiesta la posibilidad de argumentar en términos algebraicos algunos elementos de la experiencia educativa, enfatiza en la utilidad interpretativa de su propuesta y en sus posibles implicaciones para la mejora de la praxis docente”. El enfoque de su investigación fue cualitativo, utilizando las modalidades biográficas y de tipo correlacional. Tiene como conclusión principal que gran cantidad de las actividades comunicativas dentro de la experiencia educativa pueden ser modeladas con ayuda de las estructuras algebraicas.

2.2. Bases teóricas

En esta investigación la teoría de grafos es utilizada como herramienta para representar las redes de habilidades que los estudiantes tendrán que adquirir (por esa razón decimos trayectorias hipotéticas de aprendizaje). Sesión de clase tras sesión de clase, unidad tras unidad para consolidar las competencias específicas y genéricas de un curso.

Los grafos en sí permiten expresar de forma visual las relaciones que se dan entre los elementos de nuestro estudio. En tal sentido asumimos la noción conceptual propuesta por Gross (2013) “Un grafo es una representación gráfica de elementos que mantienen una relación entre ellos los cuales por medio de vértices o nodos representan a los elementos como aristas o puentes a la relación entre los elementos” (p.6).

2.2.1. Grafo

Asumimos la noción conceptual propuesta por Gross (2013) “Un grafo es una representación gráfica de elementos que mantienen una relación entre ellos los cuales por medio de vértices o nodos representan a los elementos como aristas o puentes a la relación entre los elementos” (p.6).

2.2.2. Teorías del aprendizaje

Teoría Conductista.

Según Salinas et al. (2022). “El conductismo parte de una concepción empirista del conocimiento, sostienen que mecanismo central del aprendizaje es el asociacionismo, se basa en los estudios del aprendizaje mediante condicionamiento y considera innecesario el estudio de los procesos mentales superiores para la comprensión de la conducta humana” (p.35).

Teoría cognitivista.

Según Siemens (2019). “El aprendizaje bajo la propuesta del cognitivismo se ocupa de la caja negra que media el estímulo y la respuesta (los procesos que el estudiante pone en marcha para aprender). Por lo tanto; el estudiante es un procesador activo mediador entre el estímulo y la respuesta, por esta razón el enfoque cognitivo, promueve el servicio a la persona que a los estímulos” (p.34).

Teoría constructivista.

Según Lamata y Domínguez (2019). “Esta perspectiva es organicista y estructuralista, donde lo fundamental es analizar los cambios cualitativos generados en la organización de las estructuras cognitivas como consecuencia de la interacción entre estas y los objetos a los que se aplica” (p.46).

Teoría socio cultural.

Según, Coll (2016). “Es una forma de socialización, en la que los alumnos construyen sus conocimientos a partir de los saberes previos, pero de forma inseparable al contexto en el que se producen y como consecuencia de una interacción social” (p.49).

2.2.3. Teorías de la enseñanza

Enfoque técnico.

Según Carriazo et al. (2020). “El enfoque técnico racionaliza la actividad de enseñar planteándola como una cuestión tecnológica que tiene que ser abordada a partir de los conocimientos aportados por la ciencia” (p.19).

Enfoque práctico.

Según Casillas (2019). “Este enfoque sostiene el carácter variable, situacional e incierto de la enseñanza; gestiona una realidad compleja que exige la toma de decisiones prudentes y equilibradas” (p.29).

Enfoque sociocrítico.

Según Barnhart y Devia (2019). “Este enfoque sostiene que el comportamiento social se rige por construcciones ideológicas y el soporte de materialización de esa ideología lo constituyen los signos y sus significados” (p.47).

2.2.4. Diseño instruccional

Según, Casillas (2019). “Las teorías de la instrucción son prescriptivas, tratan de mostrar marcos de referencia para organizar el aprendizaje, son las respuestas a planteamientos psicopedagógicos y pretenden reconstruir el pensamiento del alumnado” (p.35).

En ese sentido el diseño instruccional es una herramienta que permite estructurar de forma estratégica, planificada, los diferentes elementos de un curso, tales como temas, contenidos, actividades, recursos de apoyo y evaluaciones. Con la finalidad de optimizar el aprendizaje, y hacer el seguimiento necesario para obtener los objetivos propuestos.

Según Modino (2018). “El diseño instruccional está soportado en cuatro pilares, los cuales le dan fundamento y coherencia: teoría general de sistemas, teoría de la comunicación, teorías del aprendizaje y modelos conceptuales de instrucción” (p.78).

2.2.5. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Según, Simón (2016). “El termino trayectoria hipotética de aprendizaje, una visión constructivista de la enseñanza de las matemáticas y presume que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades” (p.13).

Por lo tanto; se reafirma la propuesta de Bocanegra y Devia (2019) las trayectorias hipotéticas de aprendizaje “son un modelo teórico compuesto por tres componentes; el objetivo u objetivos de aprendizaje que definen la dirección, las actividades de aprendizaje planificadas, y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje” (p.77)

2.2.6. Fundamentos del aprendizaje y la educación

En este capítulo se pretende mostrar algunos rasgos de la sociedad actual, con la finalidad de conceptualizar el significado de aprender y educar en el siglo XXI. Luego, plantearemos el estudio del aprendizaje basado en las trayectorias personales de aprendizaje, como paradigma emergente de la investigación educativa.

2.2.6.1. Teorías del aprendizaje

El ser humano se encuentra inmerso dentro de un marco histórico y cultural, donde el que hacer social promueve los paradigmas culturales sin importar el lugar, espacio y tiempo. Por lo tanto; el aprendizaje como capacidad inherente al ser humano debe ser visto desde esta óptica, con la finalidad de dimensionarla dentro del escenario de la actividad humana. En tal sentido, el aprendizaje en sí, es considerado un objeto de investigación para las ciencias de la educación y, concretamente, en psicología de la educación. La naturaleza del aprendizaje en esta sociedad digital ha sufrido una extensión cualitativa en su esencia articuladora entre lo

cultural y lo individual, producto de las nuevas formas de relacionarse, comunicarse y, participar en la vida social. Por lo tanto; el marco natural del desenvolvimiento del aprendizaje producto de la fricción entre alumno/docente muestra la necesidad de una diversificación de contextos para la experiencia educativa en cuestión. Debido al importante desafío que tiene la educación para preparar a las nuevas generaciones. En tal sentido, Engelet al. (2019), sostiene “que nos encontramos ante una nueva ecología del aprendizaje un nuevo ecosistema de la actividad social donde se han consolidado más entornos, actores y recursos” (p. 22).

Según Barron (2018). “Una ecología de aprendizaje hace referencia al conjunto de contextos, configuraciones de actividades, materiales y recursos que ofrecen oportunidades para aprender tanto en contextos físicos como virtuales e híbridos” (p.33).

1. Condicionamiento clásico. “Es el aprendizaje por condicionamiento y sustenta que este es el medio por el cual se efectúa un cambio en la conducta a través de la experiencia o la asociación de eventos o estímulos. La capacidad de aprender promueve la adaptación de todo individuo a cambios en su entorno y el reconocimiento de las señales del mundo externo”.

2. Condicionamiento operante. “Propone, que el sujeto no aprende solo por medio de estímulos, sino que es necesario aplicar el uso de reforzadores positivos o negativos, con la finalidad de “persuadir” al individuo de dar continuidad a la conducta deseada”.

2.2.6.1.1. Teoría sociocultural de Vygotsky

En opinión del laboratorio de innovación educativa española (2010). “La teoría sociocultural de Vygotsky, defiende que el desarrollo humano está sujeto a procesos históricos, culturales y sociales más que a procesos naturales o biológicos: el desarrollo psicológico del individuo es el resultado de su interacción constante con el contexto socio-histórico en el que vive” (p.62)

En ese sentido Flores (1995) sostiene “el hecho de tener experiencias sociales diferentes no sólo proporciona un conocimiento distinto, sino que estimula el desarrollo de diferentes tipos de procesos mentales” (p.44). Por tanto, se reafirma lo sustentado por Vygotsky “el aprendizaje es un proceso donde lo social y lo individual se interrelacionan: las personas construyen el conocimiento dentro del medio social en el que viven” (p.22).

2.2.6.1.2 Aprendizaje significativo de Ausubel

Según Ausubel (1983), “En el aprendizaje significativo los conceptos, proposiciones e ideas, pueden ser aprendidas, si es posible establecer relaciones con ideas, conceptos y proposiciones preexistentes en el individuo” (p.34). Por lo tanto; el conocimiento no es resultado arbitrario de un cumulo de información, es consecuencia de una relación pre existente en la estructura cognitiva del estudiante.

Novak, Ausubel y Hanesian (1983) explican que “La esencia del aprendizaje significativo reside en el hecho de que las ideas están relacionadas simbólicamente y de manera no arbitraria (no al pie de la letra) con lo que el alumnado ya sabe” (p.15).

En ese sentido Ausubel sostiene, “ que el aprendizaje significativo es un proceso de enseñanza personal y activa, siempre que el alumno participe en el cumplimiento de las actividades y tareas de aprendizaje” (p.47).

2.2.6.1.3. La teoría de inteligencia múltiples de Gardner

Según Gardner (1995) “La inteligencia no es un conjunto unitario de información que agrupe diferentes capacidades específicas, por el contrario, es una red de conjuntos autónomos relacionados entre sí” (p.15).

En ese sentido; para Gardner el individuo necesita de más de un tipo de inteligencia para relacionarse con su entorno. Por lo tanto; para Gardner (1995), “el colegio debería ser el de desarrollar las inteligencias, y ayudar a la gente a alcanzar los fines vocacionales y aficiones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias” (p.17).

2.2.6.1.4. La teoría de aprendizaje de Piaget

Según Piaget (1973), el desarrollo mental es “un progresivo equilibrarse, un paso perpetuo de un estado menos equilibrado a un estado superior de equilibrio” (p.27)

En ese sentido, Garcia et al (2017) sostiene que para Piaget “el individuo hace su propia construcción del conocimiento, pues el aprendizaje es un proceso interno, que realiza a través de la interacción con su entorno, es decir, no es una transmisión y acumulación de conocimientos, sino un proceso activo” (p.22). Por lo tanto; para obtener aprendizaje, es necesario propiciar espacios, medios y recursos necesarios para que el alumno lo construya mediante la interacción activa.

2.2.6.1.5. La teoría socio constructivista del aprendizaje

Según, Coll (2016) “la construcción individual del conocimiento de los estudiantes está inmersa y es inseparable de la construcción colectiva que llevan a cabo profesores y estudiantes en un entorno específico culturalmente organizado que es el aula” (p. 13). En ese sentido, Lamata y Domínguez (2019), afirman que “el aprendizaje es una construcción idiosincrásica: es decir, está condicionado por el conjunto de características sociales, físicas, culturales, incluso políticas y económicas del sujeto que aprende. Condicionamientos que también son válidos para el docente” (p. 23).

2.2.6.1.6. El conectivismo

La influencia de la tecnología se encuentra en todos los ámbitos, tales como: educación, salud y hogar. En ese sentido, para Siemens (2019). “El conectivismo es una teoría del aprendizaje para la era digital, que toma como base el análisis de las limitaciones del cognitivismo, el conductismo y el constructivismo, para explicar el efecto que la tecnología ha tenido sobre la manera en que actualmente vivimos, nos comunicamos y aprendemos” (p.20)

Por lo tanto; para Lamata y Domínguez (2019) “el Conectivismo define el aprendizaje como un proceso continuo en diferentes escenarios, incluyendo redes personales, comunidades de práctica y en el desempeño de tareas en el lugar de trabajo” (p.49)

2.2.6.2. Contexto actual del aprendizaje

Andersen (1991) señala: “Lo que el futuro depara es cada vez más información, la nueva materia prima y el primer factor de producción. El éxito estará supeditado para aquellos que aprendan a gestionar la información en tiempo real” (p. 8)

Por lo tanto; Amata y Prado (2017) sostienen que “la educación pasa a promover y crear entornos favorables de auto instrucción donde lo esencial no es consumir lo producido, sino redescubrirlo y reconstruirlo. Así el aprendizaje ha salido de su capullo temporal y conservador, ha pasado a ser una actividad y una actitud continúa durante toda la vida” (p.33)

Según Ibáñez et al., (2018). “El estudiante del siglo XXI considera la educación como mercancía, la que puede ser consumida y adquirida. Por este motivo, esperan que el aprendizaje sea lo más rápido, sencillo y entretenido posible, maximizando la relación entre resultados obtenidos y tiempo de estudio” (p. 36).

Por tal razón este tipo de estudiante debe tener un pensamiento crítico, creativo e innovador, (aprender a aprender) al tener información de los diferentes medios información debe: comparar, razonar, seleccionar ampliar y asimilar.

2.2.6.2.1. La generación Z

Según, Beldona, et al (2015) “La generación Z o millennials, está conformada por personas nacidas con la World Wide Web y presente en sus hogares” (p.40).

Para Mondino (2018) “el aprendizaje de los jóvenes de esta generación se encuentra condicionado por el fenómeno digital, en ese sentido, el árbol del conocimiento se encuentra en la nube y es jerárquica y ramificada” (p.11). Por esa razón, Modino afirma que “los miembros de la Generación Z construyen su propio conocimiento a través de la captura, procesamiento y reflexión de la información que seleccionan, por ello, es necesario dotarles, de capacidades académicas, culturales y sociales” (p.18).

2.2.6.2.2. Los millennials en el Perú

Según Datum internacional, en la edición 2022 de la Encuesta Millennial, “uno de cada cuatro peruanos es millennials y sostiene que los valores de una marca que los lleva a adquirir un bien o servicio son: calidad, confiabilidad, innovación y popularidad. En el Perú, 7 millones 820 mil personas son millennials, es decir, 1 de cada 4 peruanos tiene entre 19 y 35 años. De ese total, el 33% no trabaja, el 51% trabaja y el 11% estudia y trabaja. Además, el 99% Facebook, 81% YouTube, 42% Instagram y 25% Twitter. En Perú el 19% de los millennials dice sentirse estresado, pero muy pocos a su vez, manifiestan sentirse no estresados (9%)”. Esto significaría según Andersen (1991) que “muchos tienen un nivel intermedio de stress oculto. Con respecto a su situación económica y social se preocupan, según el siguiente orden: su futuro, el de sus padres, de que algún familiar pueda fallecer y al final de sus finanzas personales” (p.33)

2.2.6.3. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Fue Simón (2014), quien definió la trayectoria hipotética de aprendizaje. “Una trayectoria hipotética de aprendizaje consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes” (p. 46).

Una Trayectoria hipotética de aprendizaje es un modelo teórico para el diseño o planificación de las sesiones de clase durante un periodo de tiempo, en particular en la educación matemática.

La construcción de trayectorias de aprendizaje es un problema abierto que enfrenta actualmente la educación matemática. Es también uno de los problemas para el que hacer docente porque es la herramienta que permite la comprensión de los tópicos matemáticos por parte los estudiantes.

En ese contexto Cárcamo et al., (2021) señala que el objetivo de Simón “Era proporcionar un modelo de base empírica del pensamiento pedagógico basado en las ideas constructivistas, refiriéndose a todas las contribuciones a una intervención de instrucción incluyendo las realizadas por los especialistas curriculares, los que desarrollan materiales, y el profesor” (p. 77)

Mira (2019), sostiene que “la construcción de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje ha proporcionado un marco teórico para investigadores, profesores y diseñadores de currículos a medida que planifican la instrucción para el aprendizaje conceptual” (p. 42)

Simón utilizó la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje “para sostener el ciclo de enseñanza de las matemáticas. Este modelo, era su propuesta para reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista y abordaba la tensión existente entre una visión constructivista del aprendizaje”.

Para Simón (2014). “la instrucción tenga en cuenta y se adapte a las actuaciones de los estudiantes, y una idea de la planificación de esa instrucción, basada en la búsqueda de unos objetivos predeterminados y en el diseño de tareas para lograrlos” (p. 61)

En este sentido, Modino (2018) señala que “la reflexión sobre la actividad-efecto proporciona referencias para pensar en cómo una tarea puede promover el aprendizaje identificar objetivos de aprendizaje conceptual y contribuir a una evaluación detallada de las comprensiones matemáticas de los estudiantes” (p. 33).

Según Mira (2019), Tzur (1999) identifica 3 tipos de tareas que “dirigen al estudiante a la construcción de un nuevo concepto que son tareas dirigidas a producir un progreso en las distintas fases del proceso de abstracción” (p. 43).

Esta caracterización surgió a partir del desarrollo de diseños de las sesiones y tuvo en consideración los siguientes supuestos:

Tzur (2000) dice que “La premisa fundamental que sustenta la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción” (p.44).

En ese sentido Simón (2014) señala que “Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos” (p.33)

Para Mira, (2019) “la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje” (p.43)

Según Garduño (2020) “La comunidad de investigadores de la enseñanza de la matemática identifica tres elementos centrales de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje objetivos de aprendizaje, tareas matemáticas e hipótesis sobre el proceso de aprendizaje” (p.55)

Por lo tanto; la trayectoria hipotética de aprendizaje es in objeto de investigación y para la planificación educativa.

2.2.6.3.1 Rutas de Aprendizaje

Según Pacheco y Porras (2020). Las rutas de aprendizaje son secuencias de actividades para los estudiantes que tienen por finalidad el desarrollo de ciertas competencias. Un aspecto importante de las rutas de aprendizaje según Garduño (2020) “es el beneficio que adquiere cada alumno al construir la mejor metodología de enseñanza de acuerdo con los materiales disponibles” (p. 78)

Por otro lado, Carrión (2020) señala que el MINEDU define las rutas de aprendizaje como “un conjunto de herramientas que proponen orientaciones pedagógicas y sugerencias didácticas para la enseñanza efectiva de los aprendizajes fundamentales de los estudiantes” (p.6).

Según Garduño (2020), las rutas de aprendizaje son “espacios de expresión que conectan los contextos e identidades de las personas con los contenidos curriculares” (p. 55)

Existen dos tipos de rutas de aprendizaje:

Rutas de Aprendizaje Generales. La ruta de aprendizaje general “se enfoca en habilidades más amplias que involucran a muchos sectores diferentes. Es una ruta que proporciona los conocimientos necesarios que la institución educativa desea impartir” (Garduño, 2020, p. 18).

Rutas de Aprendizaje Específicas. “La ruta de aprendizaje específica está segmentada y sirve para un público específico de alumnos que quieren desarrollar competencias y habilidades profundas en un tema de interés de estudio en particular” (Garduño, 2020, p.19).

Por lo tanto, Garduño (2018), afirma que las rutas de aprendizaje “son construcciones, deconstrucciones y reconstrucciones representadas por la libertad de acción en la toma de decisiones sobre el qué, cómo, cuándo, dónde y para qué aprender” (p. 8).

2.2.6.3.2. Mapas de aprendizaje

Según Kendal (2019) “Los mapas de aprendizaje trabajan con estándares que son descripciones claras y específicas de las habilidades y conocimientos que el estudiante debe adquirir en un momento determinado de su escolaridad” (p. 54).

En consecuencia, afirma Carrión (2020) “los mapas de aprendizaje muestran el progreso del estudiante en su recorrido de aprendizaje. Es una manera de estandarizar el aprendizaje y progreso de los estudiantes” (p.31).

En ese contexto el MINEDU sostiene que: “Los mapas de aprendizaje se concretan y especifican a través de las Rutas de aprendizaje, entendidas como actividades concretas y adaptadas a los ciclos y áreas para garantizar que los aprendizajes se han conseguido al finalizar los ciclos correspondientes. Son como modelos de actividades que debe proponer el profesor para garantizar que los estudiantes desarrollen las capacidades, competencias y aprenden los contenidos de las distintas áreas” (Kendal, 2019, p. 54)

En ese contexto, La torre y Seco (2018) sostienen que “los mapas de aprendizaje describen la secuencia en que comúnmente progresa el estudiante en su aprendizaje en determinadas áreas o competencias clave que se consideran fundamentales en la formación” (p. 32).

Por lo tanto; se pretende que los mapas de aprendizaje constituyan un marco de referencia para dialogar sobre el aprendizaje que se espera. Al respecto, La torre y Seco (2018) concluyen que:

“Los mapas de aprendizaje muestran una coherente y detallada estrategia curricular con el fin de establecer una estandarización curricular en la realización de las tareas escolares. La creación, uso e interpretación de las tareas escolares está en la centralidad del poder estandarizado de los mapas de aprendizaje”. (p. 45)

Además; concluyen que: “Los mapas de aprendizaje indican ¿qué se debe observar y con qué criterios debe observar el docente? Ofrecen indicadores precisos para observar el logro de los aprendizajes fundamentales a lo largo de la escolaridad. Describen qué es lo central que el docente debe observar en el aprendizaje de los estudiantes para poder monitorear y apoyar el progreso de aprendizaje”. (La torre y Seco, 2018, p. 40)

2.2.6.4. ¿Qué es la educación?

La presente investigación tiene como referencia al concepto de educación propuesto por Dierdorp et al. (2019), el cual permite tratarla desde varias aristas: como proceso, como interacción y como sistema.

Definición 2.2.6.4.1. (Educación).

Según Carrión (20220) “La educación es una acción y un proceso intencional, continuo y sistemático de perfeccionamiento de la persona en cualquiera de sus dimensiones (física, intelectual, profesional, estética, ética, etc.)” (p.69)

En consecuencia, el conocimiento es un proceso de construcción que se fundamenta en el intercambio de información entre docentes y alumnos, circunscritos a cierto contexto. Por tanto; el proceso de aprendizaje es una aproximación entre los significados que construye el

estudiante y los significados que representan y vinculan los contenidos presentados por el docente durante la experiencia educativa.



Figura 1. Componentes del triángulo interactivo en relación con las TIC.

Según Mira (2019), “El rol del profesor en este caso tiene una influencia educativa en conexión con las TIC; es decir, abarca aspectos pedagógicos, tecnológicos, didácticos, y comunicativos” (p.77). En ese sentido afirma Gomez (2020) “que las TIC, se constituyen en herramientas mediadoras en la actividad conjunta profesor, estudiantes, contenido, en un contexto de actividad mental constructiva y de relaciones interpersonales” (p.39). En consecuencia es propicio establecer un modelo apropiado para la comunicación entre el profesor y el alumno, pues como indica Salinas et al., (2022):

“El desarrollo de las actitudes, aptitudes, aptitudes procedimentales tiene correspondencia con la formación en el ser, en el pensar, el hacer y el saber. El aprendizaje logrado da lugar a los llamados aprendizajes significativos de esa integración entre conocimiento con sentido y experiencia resulta el desarrollo de la competencia” (p. 91).

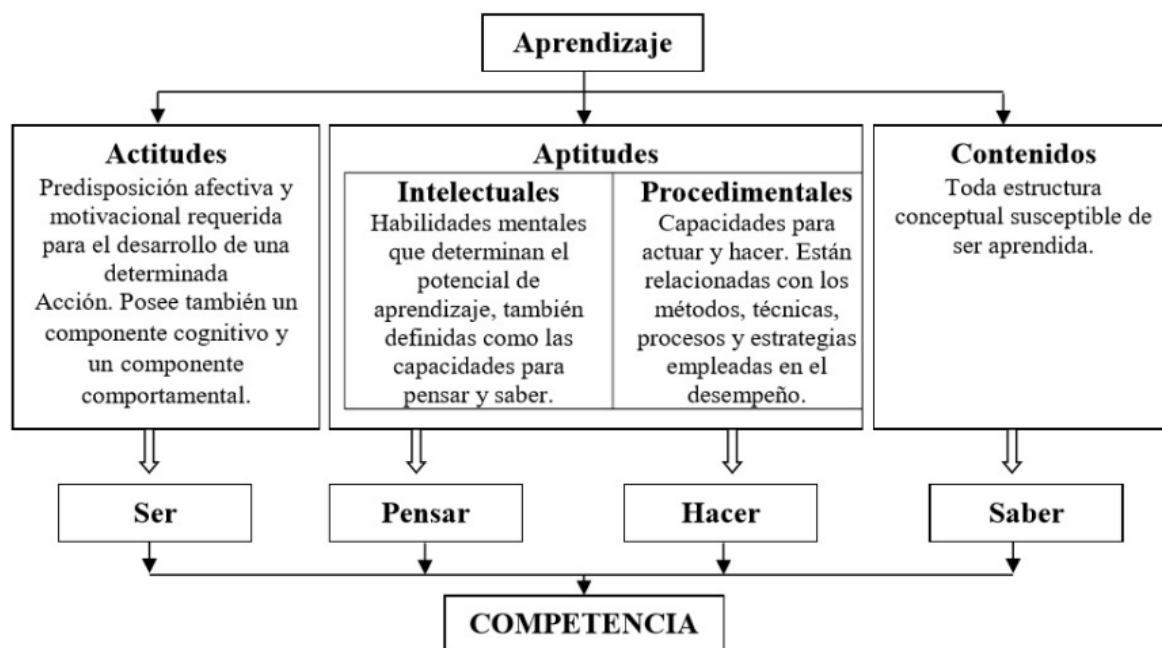


Figura 2. Factores intervinientes del aprendizaje y las competencias.

Definición 2.2.6.4.2. (Creencias).

Savasci-Acikalin (2019), señala que “Las creencias se definen como teorías o sustentaciones que las personas generan para poder adaptarse al entorno, interpretar hechos, dar explicaciones a situaciones y guiar su comportamiento” (p.123).

Por lo tanto; las creencias son parte del conocimiento, subjetivos y poco elaborados, que se fundamentan en los sentimientos y las experiencias, lo que los hace muy consistentes y duraderas en el tiempo.

En tal sentido, Gómez (2020), sustentan que: “las creencias constituyen un esquema conceptual que filtra las nuevas informaciones sobre la base de las procesadas anteriormente, cumpliendo la función de organizar la identidad social del individuo y permitiéndole realizar anticipaciones y juicios acerca de la realidad” (p.110).

Definición 2.2.6.4.3. (Creencias docentes).

Ferreyra (2019), “las creencias de los docentes son las posturas o posicionamientos que estos tienen respecto a su práctica educativa y los ayudan a controlar la incertidumbre y la ambigüedad que pueda presentarse en su práctica” (p.11).

En tal sentido Savasci - Acikalin (2019) afirman que “las creencias docentes, actúan como filtros de la nueva información y usualmente operan a nivel tácito; son difíciles de articular y explorar” (p. 51).

2.2.6.4.1 La educación como sistema de comunicación

Según Coll (2016) la práctica educativa como modelo de comunicación debe hacer explícito los siguientes elementos:

- a) “La intencionalidad del proceso de comunicación (objetivos del curso)”.
- b) “La forma de caracterizar la señal a transmitir (relación entre unidades didácticas, acciones docentes y objetivos)”.
- c) “Las funciones del transmisor (profesor) y receptor (alumno)”.
- d) “Los distintos tipos de ruido que pueden afectar al proceso (problemas educativos)”
- e) “Los procesos de codificación (diseño y secuenciación de las unidades didácticas y acciones docentes) y decodificación (asimilación del mensaje por parte del alumno) de dicha señal”.
- f) “Los resultados de la comunicación (efectividad del curso)”.

2.2.7. Modelo Matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

2.2.7.1. Teoría de Grafos

Según Harary y Norman (1965) “la teoría de grafos modela numerosos problemas de diseño y optimización de mundo real. El concepto de grafo nace por primera vez en el siglo XVIII, cuando su creador Leonhard Euler (1707-1783) se planteaba el Problema de los siete puentes de Königsberg, (actualmente Kaliningrado, Rusia)” (p.33).

Königsberg, cuenta con dos islas en el río Pregel que se unen a la tierra firme mediante siete puentes. La interrogante planteada por Euler es, si sería posible dar un paseo iniciando en un punto cualquiera de tierra firme y volviendo al mismo punto después de haber cruzado cada puente exactamente una sola vez.

De acuerdo con Cobrinza (2018) “En el año 1736 Euler responde a dicha pregunta señalando que no existe ningún camino cumpliendo esas características. En su demostración, representó cada parte de tierra por puntos (vértices) y cada puente, por una línea (arista). Luego señaló que los puntos intermedios de un posible recorrido tienen que estar necesariamente conectados a un número par de aristas, de forma que los puntos inicial y final serían los únicos que podrían estar conectados por un número impar de líneas, lo cual no puede suceder pues este debe ser el mismo”. (p.31)

En la Figura adjunta, podemos ver la originalidad de Euler al representar de manera geométrica el problema de los siete puentes de Königsberg.

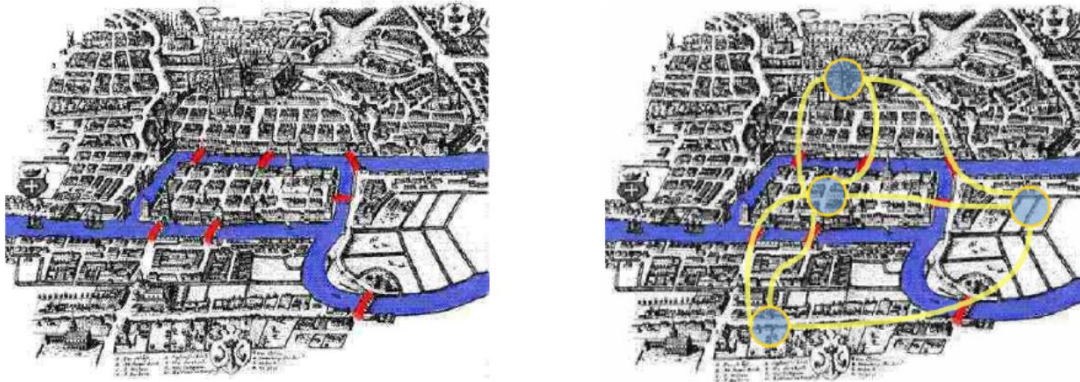


Figura 3. Representación geométrica del problema

2.2.7.2. Reseña histórica de los grafos

Según Combariza (2018), “la historia de los grafos se remonta al año de 1736, cuando Euler se interesó en resolver el problema de los siete puentes Königsberg”. (p. 45)

A demás hace referencia a una publicación hecha de 1929 por Karinthy, quien describe, aunque como ciencia ficción, una de las verdades fundamentales sobre la estructura de los grafos que ha sido base de gran variedad de investigaciones científicas

Combariza, también menciona que Solomon y Rapoport “presentaron el primer estudio sistemático del grafo aleatorio y continúan narrando su evolución histórica, mencionando los trabajos de Erdős y Renyi” (p. 30).

2.2.7.3. Grafos

La Teoría de grafos está ligada a otros campos de las matemáticas como la topología pues es en realidad una topología mono dimensional, la teoría de grupos, la combinatoria y la teoría de conjuntos. Los grafos pueden ser considerados formalmente como diagramas.

Definición 2.2.7.3.1. (Grafo).

Según Restrepo et al. (2004). “Un grafo es un par $G = (V ; E)$, donde V es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos y E o $E(G)$ es un conjunto de elementos llamados aristas o lados, juntos con una aplicación

$$\gamma G : E \rightarrow \{\{v_i, v_{i+1}\} : v_i, v_{i+1} \in V\}$$

$$e_i \rightarrow \gamma G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$$

llamada aplicación de incidencia” (p.122)

Ejemplo 2.2.7.3.2. En la Figura adjunta

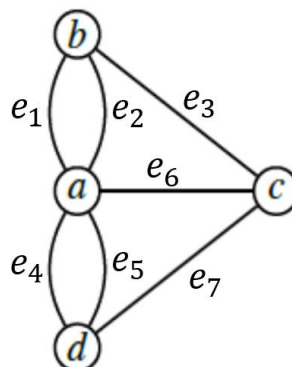


Figura 4. Grafo

Se representa gráficamente el grafo, correspondiente al problema de los siete puentes de Königsberg, donde el conjunto de vértices es $V = \{a, b, c, d\}$ y conjunto de aristas es $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Además, la aplicación de incidencia está dada por:

$$\gamma G(e_1) = \gamma G(e_2) = \{a, b\}, \quad \gamma G(e_3) = \{b, c\}, \quad \gamma G(e_4) = \gamma G(e_5) = \{a, d\},$$

$$\gamma G(e_6) = \{a, c\}, \quad \gamma G(e_7) = \{c, d\}.$$

Observación.

Cuando los $e_i, e_j \in E$ son tales que $\gamma G(e_i) = \gamma G(e_j)$ se llaman aristas paralelas. En nuestro ejemplo, e_1 y e_2 son paralelas; lo mismo ocurre con e_4 y e_5

2.2.7.3.1. Grafo dirigido

Definición 2.2.7.3.3. (Grafo dirigido).

Según Harary y Norman (1965). “Un grafo dirigido G es un grafo junto a dos funciones: $s, t : E \rightarrow V$. Tales que a cada arista e le asigna un vértice de inicio $s(e)$ y un vértice final $t(e)$ ” (p.23).

Observación 2.2.7.3.4.

Cuando se tiene un grafo dirigido puede suceder que la orientación de los caminos sea en un sentido.



Figura 5. Grafo dirigido.

O la orientación sea en ambos sentidos y en este caso la arista se llama loop (o bucle) pues $s(e) = t(e)$ para cualquier $e \in E$.

Definición 2.2.7.3.5. (Orden de un grafo).

Según Harary y Norman (1965). “El orden de un grafo G es el número de vértices que tiene. Este será denotado por $|G|$ ” (p.24)



Figura 6. Orden de un grafo.

Definición 2.2.7.3.6. (Grafo finito).

Según Harary y Norman (1965). Sea G un grafo, “ G es finito si $|G| < \infty$. Caso contrario se llama infinito” (p.46)

2.2.7.3.2. Subgrafo**Definición 2.2.7.3.7. (Subgrafo).**

Según Harary y Norman (1965). Sea $G = (V ; E)$ un grafo. El par $G' = (V' ; E')$ es llamado subgrafo de G si $E' \subseteq E, V' \subseteq V$ y se verifica que $\gamma_G(e) = \gamma_{G'}(e)$, para cualquier $e \in E'$

Ejemplo 2.2.7.3.8.

Según Harary y Norman (1965). Un subgrafo para el grafo del Ejemplo 2.2.7.3.2. es $V = V' = \{a, b, c, d\}$ y $E' = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$.

Definición 2.2.7.3.9. (Grado de un vértice).

Según Harary y Norman (1965). Sea $G = (V ; E)$ un grafo. El grado de un vértice a , denotado por $d(a)$, es el número de aristas que inciden en ese vértice.

Observación 2.2.7.3.10. En el grafo adjunto

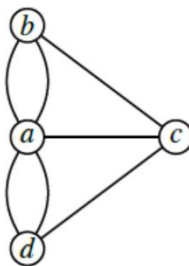


Figura 7. Grado de un vértice.

Se deduce que $d(c) = 3$.

Definición 2.2.7.3.11. (Grafo regular).

Según Harary y Norman (1965). Un grafo G se llama regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

2.2.7.3.3. Camino o arco**Definición 2.2.7.3.12. (Camino o arco).**

Según Harary y Norman (1965). Si G es un grafo. Un camino o arco de longitud $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de aristas e_1, e_2, \dots, e_n y una sucesión de vértices v_1, v_2, \dots, v_{n+1} tales que $\gamma G(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. En tal caso el camino e_1, e_2, \dots, e_n va del vértice v_1 al vértice v_{n+1} .

Observación 2.2.7.3.13.

El camino de longitud cero se define como aquel camino cuya sucesión de vértices es un conjunto unitario y cuya sucesión de aristas es vacía. Observe también que si e_1, e_2, \dots, e_n es un camino o arco de v a u , entonces $e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1$ es un camino de v a u .

Definición 2.2.7.3.14. (Camino cerrado).

Según Harary y Norman (1965). Es un camino donde coinciden el primer y el último vértice.

Definición 2.2.7.3.15. (Grafo completo).

Según Harary y Norman (1965). “Un grafo G se llama completo si para todo par de vértices existe un camino que los ligue. Estos grafos son denotados por K_n , donde n representa el número de vértices” (p.48)

2.2.7.3.4 Grafo conexo**Definición 2.2.7.3.16. (Grafo conexo).**

Según Harary y Norman (1965). “Un grafo G se llama conexo si para cualquier par de vértices de G existen al menos un camino que los une. Caso contrario G se llama desconexo” (p.49)

Definición 2.2.7.3.17. (Recorrido).

Según Harary y Norman (1965). Se denomina recorrido a un camino en el que no aparecen aristas repetidas.

Definición 2.2.7.3.18. (Camino simple).

Según Harary y Norman (1965). Es un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo el primer y el último).

Definición 2.2.7.3.19. (Circuito).

Según Harary y Norman (1965) “Es un recorrido que es a la vez camino cerrado. Por lo tanto, en un circuito puede haber o puede no haber vértices repetidos. Sin embargo, no puede haber aristas repetidas” (p.50).

Definición 2.2.7.3.20. (Ciclo). Es un circuito que es a su vez un camino simple.

Ejemplo 2.2.7.3.21. Dado el grafo

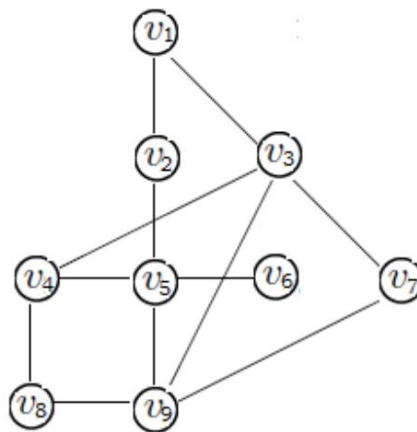


Figura 8. Ciclo.

Se tiene.

- a) $v_7, v_3, v_9, v_5, v_4, v_8, v_8, v_3$, es un camino de longitud 7 que une v_7 con v_6 . No es un recorrido, porque la arista que une v_3 con v_9 aparece dos veces en el camino.

- b) $v_1, v_3, v_9, v_8, v_4, v_8, v_3, v_7$ es un camino de longitud 6 que une los vértices v_1 y v_7 que es un recorrido, pues ninguna arista se repite, pero el camino pasa dos veces por el vértice v_3 . Por lo tanto, no es un camino simple.
- c) v_3, v_4, v_8, v_9 es un camino simple de longitud 3.
- d) $v_1, v_3, v_7, v_8, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1$ es un camino cerrado y un circuito de longitud 8 y no es un ciclo pues el vértice v_3 se repite.
- e) $v_1, v_2, v_5, v_9, v_7, v_3, v_1$, es un ciclo.

Proposición 2.2.7.3.22. *Sea G un grafo. Si existe un camino de u a v , entonces existe un camino simple de u a v .*

Demostración:

En efecto; supongamos que $u = v_1, v_2, \dots, u_n = v$ es un camino que une los vértices u y v . Si el no fuera simple debería existir por lo menos los vértices repetidos, por ejemplo u_i y v_j con $i < j$ si este fuera el caso el camino $u = v_1, v_2, \dots, u_i u_{j+1} \dots u_n = v$ es un camino que une u y v y si este no fuera un camino simple se procede como el caso anterior hasta lograr un camino simple.

Proposición 2.2.7.3.23. *Sea G un grafo, si definimos la relación: uRv si existe un camino de u a v . Sobre V , entonces es una relación de equivalencia.*

Demostración: En efecto; debemos verificar los siguientes ítems.

- a) Reflexividad. Es reflexiva ya que todo vértice está unido consigo mismo por un camino de longitud cero.
- b) Simetría. Es simétrica pues si $v_1, v_2 \dots v_n$ es un camino de u a v , entonces es un camino de v a u .
- c) Transitividad. Si $v_1, v_2 \dots v_n$ es un camino de u a v , y $w_1, w_2 \dots w_m$ es un camino de v a t , entonces $v_1, v_2 \dots v_n w_1, w_2 \dots w_m$ es un camino de u a t .

Observación 2.

Un grafo es conexo si el conjunto cociente por la relación definida en la Proposición 2.2.7.3.23. tiene un solo elemento.

2.2.7.3.5 Grafo de Hamilton**Definición 2.2.7.3.25. (Camino de Hamilton).**

Según Harary y Norman (1965). “Es un camino que recorre todos los vértices una sola vez” (p.60).

Definición 2.2.7.3.26. (Circuito de Hamilton).

Según Harary y Norman (1965). “Es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez (salvo los extremos)” (p.61).

Definición 2.2.7.3.27. (Grafo Hamiltoniano).

Según Harary y Norman (1965). “Un grafo conexo G es Hamiltoniano si existe un circuito de Hamilton” (p.61).

2.2.7.3.6. Árbol y Bosque**Definición 2.2.7.3.28. (Árbol).**

Según Harary y Norman (1965). “Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos” (p. 62).

Definición 2.2.7.3.29. (Bosque).

Según Harary y Norman (1965). “Un bosque es una unión disjunta de árboles” (p. 62).

2.2.7.3.7. Grafos isomorfos**Definición 2.2.7.3.30. (Homomorfismo entre grafos).**

Según Harary y Norman (1965). “Si $G = (V; E)$ y $G' = (V'; E')$ son dos grafos, entonces un homomorfismo es una función $\phi: G \rightarrow G'$ que satisface la siguiente condición: si $i, j \in V$ están unidos por una arista, entonces $\phi(i), \phi(j) \in V'$ y también están unidos por una arista de G' ” (p. 66).

Definición 2.2.7.3.31. (Grafos isomorfos).

Según Harary y Norman (1965). “Sean $G = (V ; E)$ y $G' = (V' ; E')$ dos grafos. Estos son isomorfos si existe $\phi : V \rightarrow V'$ una función biyectiva tal que si $a, b \in E$, entonces $\phi(a)\phi(b) \in E'$ para todo $a, b \in V$. En tal caso ϕ es llamado isomorfismo; además cuando $G = G'$ llamaremos a ϕ automorfismo” (p. 66).

Observación 2.2.7.3.32.

Según Harry y Norman (1965) “Dos grafos isomorfos son indistinguibles. En general, es complicado determinar si dos grafos son isomorfos. Claramente, si dos grafos son isomorfos deben tener igual número de vértices e igual número de aristas” (p.87). Sin embargo, esto no es suficiente, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

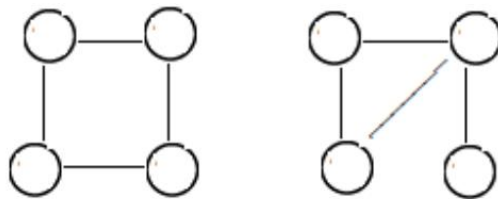


Figura 9. Grafos isomorfos.

Pues ambos tienen cuatro vértices y cuatro aristas, y sin embargo no son isomorfos.

2.2.7.3.8 Grafos de Euler**Definición 2.2.7.3.33. (Camino de Euler).**

Según Harary y Norman (1965). “Sea $G = (V ; E)$ un grafo conexo. Un camino de Euler es un recorrido en el que aparecen todas las aristas” (p.67).

Definición 2.2.7.3.34. (Circuito de Euler).

Según Harary y Norman (1965). “Es un camino de Euler que es cerrado” (p.67)

Ejemplo 2.2.7.3.35. El siguiente gráfico representa un circuito de Euler.

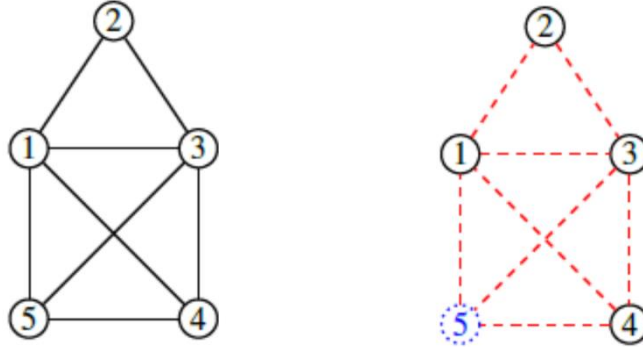


Figura 10. Circuito de Euler.

Definición 2.2.7.3.36. (Grafo de Euler).

Según Harary y Norman (1965). “Es un grafo con un circuito de Euler” (p.68).

Ejemplo 2.2.7.3.37. El siguiente gráfico representa a un grafo de Euler.

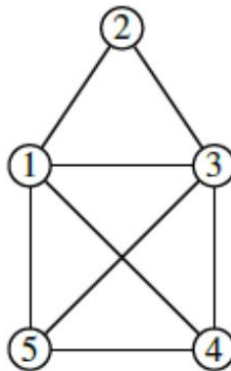


Figura 11. Grafo de Euler.

Observación 2.2.7.3.38. Si consideramos el grafo adjunto

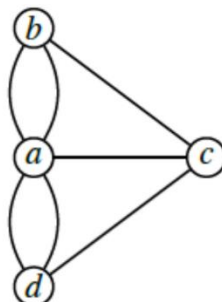


Figura 12. Grafo adjunto.

Vemos que a, b y d tiene grado 3, mientras que a tiene grado 5. Como todos los vértices tienen grado impar, se deduce que no existe ningún circuito de Euler. Por tanto, el problema no tiene solución.

2.2.7.4. Abstracción matemática de los logros del aprendizaje

Para caracterizar matemáticamente las trayectorias de aprendizaje es necesario tener claro la abstracción de los logros de aprendizaje, pues como se indicó este es uno de los indicadores del modelo que deseamos proponer.

Definición 2.2.7.4.1. (Logros de aprendizaje).

Según Cárcamo et al (2020) “es el conjunto de conductas o acciones que manifiestan los estudiantes mediante el desarrollo de conocimientos, habilidades, capacidades y actitudes, a través del proceso de enseñanza en un lapso de tiempo determinado” (p.11).

Estos serán denotados como δ y se caracterizan por que el docente desea que sus estudiantes los puedan alcanzar.

Con la finalidad de obtener el modelo matemático de los objetivos de aprendizaje se propone los siguientes axiomas.

Axioma 2.2.7.4.1. Existe un conjunto (finito) y no vacío de logros de aprendizaje que el docente espera que sus estudiantes puedan alcanzar. Este conjunto será denotaremos por

$$\mathcal{L} = \{ \alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta \}$$

Axioma 2.2.7.4.2. Los logros de aprendizaje son independientes entre sí.

Axioma 2.2.7.4.3. Los logros de aprendizaje se definen y establecen de manera consecutiva durante la planificación curricular.

Axioma 2.2.7.4.4. El docente puede medir si un estudiante alcanzó o no el logro δ . Es decir, el docente utiliza una función $\beta: \mathcal{L} \rightarrow \{0,1\}$

$$\beta(\delta) = \begin{cases} 1; & \text{si el estudiante alcanzó el logro} \\ 0; & \text{si el estudiante no alcanzó el logro} \end{cases}$$

Observación 2.2.7.4.1

En la práctica educativa se puede distinguir dos tipos de logros: General (de las unidades que componen un curso) y específico o particular (de cada tema que compone una unidad). Por tanto; no pueden descomponerse en otros logros. Estos serán denotados por δ_i donde el subíndice indica la unidad $i \in \mathbb{N}$ a la cual pertenece el logro.

Axioma 2.2.7.4.4. Si \mathcal{E} es el conjunto de logros de aprendizaje alcanzado por los estudiantes entonces existe al menos un estudiante tal que $\text{Card}(\mathcal{E}) \neq 0$.

Lema 2.2.7.4.6. Si δ_i, δ_j son logros de aprendizaje particulares, entonces $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$,
 $\forall i \neq j$,

Demostración: Como δ_i, δ_j son logros de aprendizaje particulares por Axioma 2.2.7.4.2. se tiene $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$.

Lema 2.2.7.4.7. Si δ_i es un logro de aprendizaje particular, entonces $\beta(\delta_i) \in \{0,1\}$

Demostración: El resultado es evidente por Axioma 2.2.7.4.4.

Proposición 2.2.7.4.12. Si δ es un logro de aprendizaje de una unidad, entonces $\delta = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$

Demostración: El resultado es evidente por Definición de logro de aprendizaje y Lema 2.2.7.4.6.

Lema 2.2.7.4.14. Dado $\delta = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$, si definimos la relación $\delta_i \preceq \delta_j$ si y solo si $i \leq j$ entonces \preceq es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Demostración: En efecto; el resultado se deduce de manera inmediata pues \leq es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Proposición 2.2.7.4.15. (δ, \preceq) tiene ínfimo para cada $\delta \in \mathcal{L}$

Demostración: Por Lema 2.2.7.4.14. y Axioma 2.2.7.4.3. es evidente que $\delta_i \preceq \delta_j, \forall i \leq j$. Luego δ_i es por definición el ínfimo de (δ, \preceq)

Proposición 2.2.7.4.16. (δ, \preceq) tiene supremo para cada $\delta \in \mathcal{L}$

Demostración: Dado que $\delta = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$ y $\delta_i \preceq \delta_j$ si y solo si $i \leq j$ entonces δ_n es por definición el supremo de (δ, \preceq)

Teorema 2.2.7.4.17. (δ, \preceq) es un retículo.

Demostración: Es consecuencia de la Proposición 2.2.7.4.15 y 2.2.7.4.16

Observación 2.2.7.4.11. Según Ebbinghaus (1885) “Todo ser humano cuando aprende algo describe una curva de aprendizaje que indica lo que se ha aprendido sobre una tarea o actividad en un tiempo determinado” En ese sentido, logros de aprendizaje pueden asumir diferentes niveles de su consecución, Por tanto; es posible redefinir el criterio del docente mediante la siguiente definición:

Definición 2.2.7.4.13.

Si δ_i es un logro de aprendizaje particular, entonces $\beta(\delta_i(t)) \in [0,1]$ cuantifica el nivel de estudiante durante un determinado tiempo.

Definición 2.2.7.4.14. (proceso de aprendizaje)

Es aquello definido institucionalmente como una cuantificación de la relación entre la recepción y la asimilación de los saberes transmitidos durante un lapso de tiempo en una unidad específica de aprendizaje. Si A denota el aprendizaje de un estudiante entonces $|A|$ indicará su cuantificación.

Definición 2.2.7.4.14. (Aprendizaje)

Sea $\delta = \cup_{i=1}^n \delta_i$ y $|A_\delta| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta(\delta_i(t))$. Si $0 < |A_\delta| < 1/2$ entonces el estudiante está en progreso y si $1/2 < |A_\delta| \leq 1$ entonces el estudiante alcanzo el logro de aprendizaje δ .

2.2.7.5. Abstracción matemática de los objetivos de enseñanza

Para caracterizar matemáticamente las trayectorias de aprendizaje es necesario tener en claro la abstracción de los objetivos de enseñanza, pues como se indicó este es uno de los indicadores del modelo que deseamos proponer.

Definición 2.2.7.5.1. (Objetivos de enseñanza).

Es el conjunto de los conceptos, procedimientos y actitudes que se espera que adquiera el alumno al final de la unidad de aprendizaje. Sera denotado por O .

Con la finalidad de sustentar el modelo matemático de los objetivos de aprendizaje se propone los siguientes axiomas.

Axioma 2.2.7.5.2. Los objetivos de enseñanza deben ser dependientes entre sí.

Axioma 2.2.7.5.3. Los objetivos de enseñanza tienen el mismo valor académico para el docente.

Axioma 2.2.7.5.4. Los objetivos de enseñanza son independientes de la dificultad de temas particulares relacionados a estos.

Definición 2.2.7.5.5. (Micro objetivo de enseñanza).

Es aquel objetivo de enseñanza que no puede descomponerse en objetivos más elementales. Será denotado por O_j , donde $j = 1, 2, \dots, n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.7.5.6. (Macro objetivo de enseñanza).

Es un objetivo institucional, regido por los lineamientos del sistema educativo vigente. En particular se define así: $\widehat{O}_j = \bigcup_{i=1}^n O_{ji}$, donde O_{ji} es un micro objetivo de enseñanza para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposición 2.2.7.5.7. $\widehat{O}_j = \bigcup_{i=1}^n O_{ji}$, donde O_{ji} es un micro objetivo de enseñanza para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración: El resultado es consecuencia de la Proposición 2.2.7.5.1.

Observación 2.2.7.5.8. De acuerdo a la definición anterior se puede representar de forma matricial la estructura de cierta unidad de aprendizaje respecto a los contenidos C_i y los micro objetivos O_j definidos anteriormente. Es decir; c_{ij} representan los contenidos relacionados con los micro objetivos de aprendizaje, pues estos deben ser: pertinentes, factibles y evaluables.

U. didáctica	O_1	O_2	...	O_j	...	O_N
C_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1N}
C_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2N}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
C_i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{iN}
\vdots		\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots
C_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mN}

Figura 13. Diseño de las unidades de aprendizaje.

2.2.7.6. Abstracción matemática de las creencias del docente

Para caracterizar matemáticamente las trayectorias de aprendizaje es necesario tener en claro la abstracción de las creencias de los docentes, pues estos personajes definen los niveles de pensamiento que sus estudiantes deben lograr y para ello pre juzgan las capacidades de sus estudiantes.

Definición 2.2.7.6.1. (Creencias).

Savasci y Acikalin (2019), “las creencias se definen como teorías o sustentaciones que las personas generan para poder adaptarse al entorno, interpretar hechos, dar explicaciones a situaciones y guiar su comportamiento” (p.121).

En tal sentido, Gómez (2020), sustentan que: “las creencias constituyen un esquema conceptual que filtra las nuevas informaciones sobre la base de las procesadas anteriormente, cumpliendo la función de organizar la identidad social del individuo y permitiéndole realizar anticipaciones y juicios acerca de la realidad” (p.110).

Definición 2.2.7.6.2. (Creencias docentes).

Según Ferreyra (2019), “las creencias de los docentes son las posturas o posicionamientos que estos tienen respecto a su práctica educativa y los ayudan a controlar la incertidumbre y la ambigüedad que pueda presentarse en su práctica” (p.14). En tal sentido Barboza (2018) señala “las creencias docentes, actúan como filtros de la nueva información y usualmente operan a nivel tácito; son difíciles de articular y explorar” (p.53).

Por lo tanto; con la finalidad de sustentar el sistema de creencias de los docentes se propone los siguientes axiomas.

Axioma 2.2.7.6.3. El docente conoce las consecuencias lógicas de sus conocimientos.

Axioma 2.2.7.6.4. El docente conoce sólo verdades.

Axioma 2.2.7.6.5. El docente puede acceder a su conocimiento base y saber qué es lo que conoce y lo que no.

Axioma 2.2.7.6.6. El docente no puede, mantener creencias contradictorias sobre un hecho.

Axioma 2.2.7.6.7. Si el docente sabe algo, entonces también lo cree.

Axioma 2.2.7.6.8. Si el docente cree algo, entonces conoce lo que cree.

2.2.7.7. Abstracción matemática de las actividades

Para caracterizar matemáticamente las trayectorias de aprendizaje es necesario tener en claro la abstracción de las actividades académicas, pues como se indicó este es uno de los indicadores del modelo que deseamos proponer.

Tomamos como referencia la Teoría Antropológica de lo didáctico propuesta por Yves Chevallard (1991, 1994, 1999). Chevallard basa su teoría, tres conceptos primitivos: objetos (\tilde{O}), instituciones (I) y personas (X). Así como en los conceptos de relaciones personales de un individuo con el objeto, y de las relaciones institucionales de una institución con el objeto.

El objeto (\tilde{O}), es toda entidad, sea material o no, que pueda existir en el momento. Para Chevallard, todo es un objeto, porque, el objeto existe solo si es reconocido. y conocer este objeto, es tener una relación personal con estos. Así por ejemplo $R(X, \tilde{O})$ representa las relaciones entre el objeto y la personas, y la relación Institucional de I con \tilde{O} , es representado por $R(I, \tilde{O})$.

Para Chevallard, el aprendizaje de X ocurrirá en relación con \tilde{O} , si hay un cambio en la relación $R(X, \tilde{O})$. Por lo tanto, si no hay cambios en esta relación, y el sujeto no cumple con las normas y sujeciones de la institución en cuanto al objeto, el cambio esperado no ocurre y se puede decir que no estuvo aprendiendo. Estudiante aprendiendo a conocer razones trigonométricas en triángulo rectángulo, por ejemplo, ocurrirá en el momento en que ocurra la modificación en la relación del estudiante con este saber.

Por lo tanto; el conocimiento matemático, como forma específica de conocimiento es el resultado de la acción humana e institucional sobre la matemática. En consecuencia, modelar la actividad matemática, implica definir un constructo llamado praxeología. El significado de una Praxeología se puede obtener uniendo las palabras: Práctica (praxis) y conocimiento (logos), los cuales estarán compuestos por cuatro elementos, los cuales son: tipo de tarea (T), técnica (τ), tecnología (θ) y teoría (Θ). La tarea surge de desarrollarse a partir de una técnica, en la que esta técnica puede ser considerada como una “manera de hacer” la tarea.

Por lo tanto, esta Praxeología esta articulada por estos elementos, que presente como $[T, \tau, \theta, \Theta]$, que según Bosch y Chevallard (1999), puede ser dividido en dos bloques importantes. El bloque practico - técnico (praxis) es donde el tipo de tarea (T) y la técnica (τ), identificada como saber hacer. y, el bloque tecnológico - teórico (logos) es donde encontramos tecnología (θ) y teoría (Θ), identificado como conocimiento. Es decir; la praxeología está relacionada con actividades matemáticas en términos de tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría.

2.2.7.8. Modelo de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

El modelo matemático que se desarrollará en esta investigación es un modelo que tiene dos aristas: una referida a la optimización y la otra específicamente al modelado matemático mediante grafos. El modelo propuesto pretende agrupar los objetivos de enseñanza, los logros de aprendizaje, nivel de pensamiento y las actividades con la finalidad de visualizar las trayectorias de aprendizaje y luego calcular la ruta óptima que debe elegir el profesor para que los estudiantes puedan adquirir ciertos conocimientos de algún tema matemático en específico. El modelo formulado no será implementado en ningún lenguaje de programación pues escapa al objetivo de la investigación.

2.2.7.8.1 Notación del modelo

Como se ha mencionado anteriormente el problema que se estudia consiste en representar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje necesarias para comprender algún tema específico de matemáticas, ello supone que los estudiantes realizan todas las actividades planteadas por el profesor, las cuales obedecen a ciertos objetivos de enseñanza.

Además, se supone que la realización de las tareas por parte de los estudiantes permite la obtención de ciertos logros específicos. Por tanto, se supone que el mayor “coste” del problema de la definición de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje lo determina la cantidad de errores que comenten los estudiantes al momento de resolver las actividades, por lo que se busca minimizar dicho parámetro. Para la correcta formulación del modelo se deben tener una serie de consideraciones:

1. Se dispone de un número suficiente de actividades para lograr los objetivos de enseñanza, y estas actividades a su vez se compone de un número determinado de técnicas.
2. Mezclar y dividir actividades ahorra el tiempo del o los logros de aprendizaje, pero aumenta la cantidad de errores.
3. El o los logros de aprendizaje pueden llegar a utilizar grandes cantidades de actividades sin llegar en ningún caso a superar la capacidad del tiempo planificado de la unidad didáctica. Por tanto, debido a la cantidad de errores que se genera, no se permitirá dividir una actividad en varios sub actividades.
4. Por el mismo motivo mencionado en el ítem anterior, se evitará mezclar diferentes actividades en una misma sesión de clase. Esto último no limita el uso de recursos tecnológicos para la obtención de distintos logros de enseñanza siempre y cuando el tiempo lo permita y el tema o los temas a enseñar se encuentren inmerso en una teoría general.
5. Se consideran unidades didácticas convencionales, compuestos de logros de aprendizaje, logros de enseñanza, contenidos y actividades.
6. El número de unidades didácticas es limitado y conocido, así como el número de actividades necesarias para lograr cada logro de aprendizaje.
7. Cada estudiante debe socializar las actividades planteadas por el profesor.
8. Cada estudiante puede socializar las actividades más de una vez, pero deberá llegar a realizar la actividad propuesta por el profesor.

2.2.7.8.2. Conjunto de datos del modelo

Según, Cobariza (2018) “la cantidad de datos que tiene un problema está fuertemente relacionado con las dimensiones del mismo” (p.44).

En el caso de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, las cantidades pueden ser muy variables y por tanto se podrá trabajar con distintos volúmenes de datos. Se considera dato todo aquello que define el modelo que se pretende hallar. En este caso se definen los siguientes datos y conjuntos de datos:

$[T, \tau]$: hace referencia al conjunto de actividades y técnicas existentes respecto a un tema en específico. Todos ellos tienen un lugar asignado y conocido dentro de la planificación didáctica.

Conjunto L: hace referencia al conjunto de logros de aprendizaje desde el cual el profesor puede proponer una serie determinada de actividades. En el grafo que define el modelo, los nodos serán un conjunto compuesto de elementos del conjunto $[T, \tau]$ además de:

- a) El nodo origen, representado como $\{\widehat{L}_j\}$, que será punto de partida y de retorno para todas las actividades propuestas.
- b) Una serie de micro objetivos O_j que conectan los nodos del conjunto $[T, \tau]$ para formar el layout (“palabra que hace referencia a la manera en que están distribuidos los elementos y las formas dentro de un diseño”) de la unidad didáctica, pero desde los cuales no se alcanza ningún logro de aprendizaje.

Los nodos, denominados vértices, que componen el grafo (de ahora en adelante trayectorias hipotéticas de aprendizaje) son los siguientes $V = (L, O_j, \widehat{L}_j)_{1 \leq j \leq n}$

Así, por ejemplo.

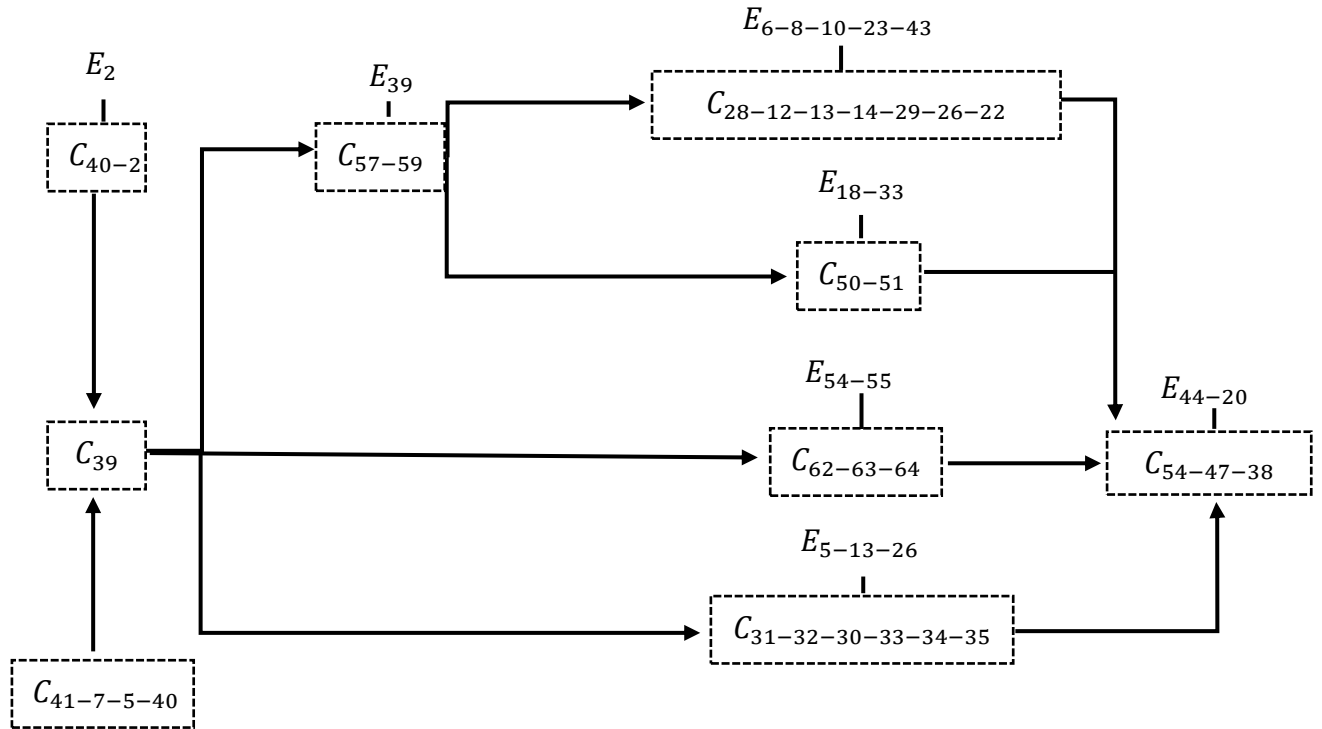


Figura 14. Grafo que recoge los caminos de aprendizaje.

Donde:

- E_i representa el error cometido al realizar la actividad por el estudiante, esto suele ocurrir cuando no se tiene claro τ
- C_i representa el tema que el profesor desea que aprendan sus estudiantes, esto ocurre cuando no se tiene claro Θ .
- Las actividades se conectan mediante los O_i .

El grafo se llamará trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Conjunto \hat{L}_j : hace referencia al conjunto de logros de aprendizaje particulares, donde se originan las actividades que serán planteadas por el profesor. Desde cada localización L se podrán elaborar un subconjunto de actividades. Como se ha mencionado en la definición del

conjunto $[T, \tau]$, cada tema particular tiene asignado una cantidad de actividades y técnicas las cuales son previamente elaboradas y conocidas por el profesor.

Conjunto \hat{O} : hace referencia al conjunto de macro objetivos de enseñanza que se propone el profesor, de las cuales deben considerarse los O_j .

$L_{\hat{O}}$ representará el subconjunto de L desde las que se alcanzan todos los $[T, \tau]_{\hat{O}}$.

D_{ij} es una matriz de datos que hace referencia a la distancia que hay entre el nodo i y el nodo j del grafo, es decir, distancias entre posiciones consecutivas de la unidad didáctica. Esta matriz de datos es la que define el Layout de la unidad didáctica. Se trata de una matriz simétrica, ya que para cada arco $i - j$ existe otro arco $j - i$ tal que $d_{ij} \equiv d_{ji}$. Todas las distancias han de ser positivas o cero en caso de que no exista conexión entre los nodos implicados.

B es un parámetro que representa el tiempo de duración de la sesión de clase, es decir, el determina el número máximo de actividades que los estudiantes deben realizar durante la experiencia educativa. Es un valor pre fijado por la institución es independiente del profesor.

C es el número máximo de actividades por sesión de clase. Es conocido y fijado al inicio de la experiencia educativa. Junto con el parámetro B definen la capacidad total de actividades que tienen las sesiones de clase.

2.2.7.8.3. Variables del modelo

Como en todo modelo matemático, las variables del modelo serán aquellas cuyo valor podrá variar dando lugar a una solución u otra según los criterios establecidos. Para el problema de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se tiene:

X : Es una variable binaria. Su valor determina si el estudiante realiza las actividades sin errores. Si esta variable X vale 1, indicará que la actividad fue realizada sin ningún error por parte del estudiante. Si por el contrario el valor que toma es 0, el estudiante cometió errores al momento de realizar la actividad.

X_{ij} : Es una variable binaria. Su valor determina la ruta que realiza el estudiante cuando resuelve las actividades. Si esta variable vale 1, indicará que la realización de las actividades de los estudiantes recorre el camino o arco descrito por los nodos consecutivos $i - j$, donde " i " representa el nodo de inicio y " j " el nodo de salida. Si por el contrario el valor que toma la variable es 0, el arco $i - j$ no formara parte del recorrido de las actividades.

Y_i : Es una variable binaria. Su valor determina los nodos recorridos. Si esta variable vale 1, indicará que se realizó el nodo " i ". Si por el contrario el valor que toma es 0, el nodo " i " no será ninguno de los nodos recorridos.

E_{ij} : Es una variable binaria. Se ha definido de manera auxiliar para indicar que se recorre el camino entre dos nodos consecutivos $i - j$, sin tener en cuenta en qué dirección se realice. Si este variable vale 1, indicara que se recorre el arco $i - j$ y/o el arco $j - i$. El orden de los subíndices no indica en este caso el orden del recorrido.

G_i : Es una variable entera. Su valor determina el grado de cada nodo para el recorrido de cada actividad. El grado de un nodo o vértice, indica el número de arcos parten de él. El valor entero que tome la variable G_i : indicará el número de arcos que se recorre con nodo de inicio "i"

2.3 Bases filosóficas

Es necesario fundamentar el estudio de la entidad conceptual que vamos a tratar, con la finalidad de dar cuenta del cómo, y el proceso de constitución del desarrollo de los conocimientos de esta propuesta de investigación. En ese sentido, cabe preguntarnos: ¿Qué tipo de conocimiento y de que naturaleza se ha generado con esta investigación? Se desea generar un conocimiento de tipo conceptual y cualitativo que represente un modelo para el proceso de enseñanza aprendizaje, a partir del análisis y la reflexión de la estructura relacional de los copartícipes en la experiencia educativa, con la finalidad de generar un modelo matemático que permita lograr los objetivos planteados al momento de diseñar los planes de clase.

2.4 Definiciones de términos básicos

1. Modelo.

Asumimos la definición propuesta por Popper (1985). “El modelo es un medio que posibilita la comprensión lo que la teoría intenta explicar, enlazando lo abstracto con lo concreto” (p. 87).

2. Modelo Conceptual.

Asumimos la definición propuesta por Alarcón et al. (2007). “Un modelo conceptual es una representación de un sistema, mediante la composición de conceptos, con la finalidad de conocer, comprender o simular un tema que representa el modelo” (p.112)

4. Aprendizaje.

Asumimos la definición propuesta por Ausubel (2002). “El aprendizaje significa organización e integración de información en la estructura cognoscitiva, destacando la importancia del conocimiento y la integración de los nuevos contenidos o conocimientos en las estructuras previas del sujeto” (p.65).

5. Aprendizaje de conceptos.

Asumimos la definición propuesta de Ausubel (2002). “Los conceptos representan regularidades de eventos u objetos, y son representados también por símbolos particulares o categorías y representan abstracciones de atributos esenciales de los referentes” (p. 105)

6. Objetivo de aprendizaje.

Asumimos la definición propuesta de Gómez et al (2002). “un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representan y los fenómenos que organiza” (p.56).

7. Camino de aprendizaje.

Asumimos la definición propuesta de Gómez et al (2002). “una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir” (p.59)

2.5 Hipótesis de la investigación

2.5.1. Hipótesis general

Según manifiesta Barrantes (2014) “toda investigación descriptiva no admite hipótesis pues no es de tipo causa efecto” (p.45). Por lo tanto; no admite hipótesis.

2.5.2. Hipótesis Específicas

No admite hipótesis específicas por las razones expuestas anteriormente.

2.6 Operacionalización de las variables

Variable

X = Modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Indicadores:

1. X_1 = Objetivo de la enseñanza.
2. X_2 = Logros de aprendizaje
3. X_3 = Niveles de pensamiento.
4. X_4 = Actividades

Ver anexo 1

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

3.1. Diseño metodológico

Dado que nuestra propuesta se enmarca dentro de los modelos con características de paradigma interpretativo-cualitativo, porque tiene por finalidad describir y comprender la realidad educativa a través del análisis de las percepciones e interpretaciones de los sujetos intervinientes en el que va a hacer educativo.

3.1.1 Tipo de investigación

En el ámbito de la investigación hay gran abundancia de clasificaciones, en ese sentido según Hernandez et al. (2006), esta investigación es básica: porque tiene como finalidad interpretar las interacciones de los estudiantes con las tareas. Y de acuerdo con Barrantes (2014), tiene un enfoque cualitativo y se enmarca en el paradigma interpretativo: porque se centra en el estudio de los significados de las acciones de aprendizaje.

3.1.2 Nivel de investigación

De acuerdo a Hernandez et al. (2006), esta investigación reúne las características de un estudio básico, descriptivo y explicativo: porque busca especificar y explicar las propiedades, las características y los perfiles de personas y grupos, con ayuda de argumentos matemáticos.

3.1.3 Diseño de investigación

De acuerdo con Barrantes (2014), esta investigación tiene un diseño observacional y descriptivo no experimental: porque se busca formular matemáticamente aspectos relacionados a la enseñanza y aprendizaje, que involucran nociones matemáticas, cognitivas, sociales, culturales y semióticas, con la finalidad de profundizar en el diseño y análisis de secuencias didácticas.

En el marco de la investigación realizada el eje principal para la formulación del modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje fue el docente, considerado actor que propone y despliega diversas actividades que buscan determinar la eficacia de algún diseño didáctico con la finalidad del desarrollo conceptual de los estudiantes. De otro lado, el tipo de experimento realizado buscó realizar secuencias de aprendizaje que fundamentan una sesión de enseñanza para el nivel de educación secundaria, específicamente tercero grado respecto a un tema específico de matemáticas.

El objetivo fue crear versiones a escala de la ecología de un aprendizaje el cual será estudiado en profundidad con ayuda de la teoría de grafos.

3.1.4 Fases metodológicas de la investigación

Esta investigación se fundamenta en la elaboración de las secuencias didácticas elaboradas por los docentes encargados de impartir el curso de matemática para el tercer grado de educación secundaria. En consecuencia, se consideró como fundamento:

1. Elaboración del objetivo de la enseñanza.
2. Elaboración de las hipótesis de los logros que deben alcanzar los estudiantes.
3. Hipótesis de los niveles de pensamiento según la taxonomía de Bloom que los estudiantes deben desarrollar.
4. Actividades específicas que deben desarrollar los estudiantes.

3.2. Población y muestra

3.2.1. Población

Estructuras algebraicas y didáctica de la matemática

3.2.2. Muestra

Teoría de grafos, relaciones y funciones, diseño instruccional y taxonomía de Bloom

3.3. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Las sesiones de trabajo con los profesores se realizaron de manera semanal, específicamente los días viernes, entre los meses de febrero y mayo del 2023. El tiempo aproximado por sesión fue de 45 minutos, durante ese tiempo se realizaron grabaciones de video, entrevistas y anotaciones que luego fueron sistematizados y analizados según los indicadores y descriptores de la actividad, permitiendo dar cuenta del proceso relacionado con la organización de diversas situaciones de aprendizaje. Durante la entrevista se realizó una pregunta al respecto de la institucionalización de las actividades, y sobre las estrategias que van a emplear para comunicar y realizar las actividades durante la sesión de clase.

Al finalizar las sesiones se procedió a recolectar las sesiones de clase propuestas por los docentes, luego se procedió a realizar anotaciones relevantes sobre las líneas de secuencias didácticas, vinculación contenido-realidad; vinculación contenido conocimientos y experiencias de los alumnos; uso de las Apps y recursos de la red y la obtención de evidencias de aprendizaje. Es importante resaltar que, de las actividades diseñadas, tan solo 6 fueron consideradas, pues estas se vinculan a los cuatro primeros niveles de pensamiento propuesto por Bloom.

Técnicas a emplear

Dentro de las técnicas para la recolección de información en campo, se empleará la observación del participante. En la observación participante, el registro se realiza por medio de video, ya que posteriormente se interpretarán la estructura y las relaciones entre las componentes de las sesiones de clase elaboradas por los profesores. En cuanto al registro en video, este cumple la función de captar la formulación de la estructura de la sesión de clase y las relaciones entre sus componentes, argumentos relacionales que pueden proporcionar pistas de cómo se construye una secuencia didáctica.

Descripción de los instrumentos

Instrumento del diseño. Este instrumento fue desarrollado por el investigador, y en él se consigna la información relevante sobre la actividad a diseñar, teniendo en cuenta el objetivo de la enseñanza, los logros de aprendizaje, los niveles de pensamiento y las actividades. Su estructura es:

- a) Asignatura:
- b) Unidad temática:
- c) Tema:
- d) Contenidos:
- e) Duración de la secuencia y número de sesiones previstas:
- f) Finalidad, propósitos u objetivos:
- g) Logros de aprendizaje:

Instrumento de análisis a priori. En este instrumento se relacionaron las hipótesis, los indicadores y procesos considerados en las actividades del nivel de pensamiento.

Su estructura es:

- a) Nivel de pensamiento según Bloom.
- b) Indicador de nivel.

Instrumento de progresión de niveles de pensamiento. En este instrumento se observa e indica los niveles de pensamientos involucrados en la planificación de la sesión de aprendizaje por parte de los estudiantes.

3.4. Técnicas para el procesamiento de la información

El procesamiento de la información recopilada pasa por los siguientes procesos: Clasificación, registro y codificación.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS

4.1. Análisis de resultados

Primera. - Se ha logrado interpretar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje con ayuda de la teoría de grafos. Además, la formulación propuesta se sustenta en el empirismo y el racionalismo para extraer su contenido.

Segunda. - Se ha demostrado que se puede modelar los objetivos de enseñanza, los logros de aprendizaje y las actividades.

Tercero. - Se ha obtenido como valor agregado una posible un problema de optimización de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje en función de las actividades realizadas por el estudiante.

Cuarto. - Se ha utilizado un modelo axiomático de las creencias de los profesores de matemáticas

CAPÍTULO V. DISCUSIÓN

1.1. Discusión de resultados

De acuerdo al conjunto de datos y variables del modelo se tiene que nuestro modelo va a consistir en una serie de actividades conectados entre sí. Cada actividad se comunica exclusivamente con aquellas otras actividades con los que está conectada mediante una serie de micro objetivos de enseñanza. Cada actividad puede generar, conocimiento y habilidades a los estudiantes con los que está interactuando. Cada actividad brindará información necesaria para decidir qué operación realizará el estudiante sobre cada actividad posterior, en general, el estudiante tendrá que variar su técnica en diferentes actividades. En general se puede decir que el estado s de un nodo i responde a la siguiente formulación:

$$s_i(t + 1) = f(s_i(t), g(w_{ij}(t), s_j(t)))$$

Donde:

1. N es el número de actividades e i, j satisfacen $0 < i, j < N$.
2. $s_i(t)$ representa el estado de la actividad i en el tiempo t .
3. $w_{ij}(t)$ representa la matriz de conectividad de la actividad i .
4. La entrada que llega de otras actividades es representada por g .

El modo en el cual el estado actual y la entrada de las actividades vecinas afecta el estado siguiente se calcula mediante la función de transición f . Esta función no varía con el tiempo. A continuación, se presentan algunos ejemplos que muestran el comportamiento global de una red bajo diferentes dinámicas.

Caso 1.

Una actividad se genera al azar de un banco de preguntas previamente alimentada por el profesor $S_i = source(t_0) = 1$ y es distribuido en la red de actividades. Recuerde que cada conexión tiene asociada un micro objetivo de enseñanza. La fiabilidad de la realización de la actividad se refleja en el hecho de que conexiones más largas se tiene una mayor tendencia a errores. Por lo tanto; la fiabilidad de la red se implementa asignando menor probabilidad de transmitir la actividad a las ramas más cortas (asignando menor tiempo de ejecución) y modificando $w_{ij}(t)$ adecuadamente.

Caso 2.

En este caso se ha introducido un retraso en la ejecución de la actividad en consecuencia se asocia un retraso d_{ij} a cada conexión. Conexiones más largas producen un retraso mayor en la obtención de los logros de aprendizaje.

Caso 3.

Una actividad no realizable en su totalidad es propuesta por el profesor y socializado por cada estudiante durante la experiencia educativa. Para evitar cualquier sesgo de razonabilidad a priori el estudiante selecciona al azar con quien socializara la actividad.

En relación con el trabajo de investigación, se enfatiza la reflexión propuesta de Gaitán et al (2012) “El saber didáctico no se reduce a la mera formulación de un tratado o método acerca de lo que se enseña, sino que se constituye en un campo específico del quehacer docente, que cubre toda una gama de reflexiones en torno a la relación que el maestro tiene con sus alumnos y las condiciones en las cuales se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 105).

Además; mejora la propuesta de Velásquez (2022) al relacionar matemáticamente las variables de involucradas en el diseño de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, ya que implementa una comprensión heurística de diseño.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones

- a) El modelo matemático construido es una propuesta que toma en consideración la relación entre los contenidos y los objetivos de aprendizaje.
- b) El modelo propuesto usa un formalismo matemático simple basado en la teoría de grafos enriquecidos de axiomas y proposiciones que caracterizan su estructura algebraica.
- c) Esta investigación amalgama herramientas matemáticas como: grafos, conjuntos, y relaciones, así como conceptos pertinentes de la educación como: trayectorias de aprendizaje, diseño instruccional, y logros de aprendizaje con la finalidad de elaborar un instrumento de utilidad para la planificación educativa.
- d) El modelo matemático obtenido es una abstracción para el entendimiento relacional de los elementos constitutivos involucrados en la planificación educativa. En tal sentido, propone una nueva óptica del diseño curricular y consecuentemente para la planificación educativa.

6.2. Recomendaciones

Las sugerencias de los trabajos futuros son:

Por ser la experiencia enseñanza-aprendizaje uno de los paradigmas del aprendizaje, un trabajo futuro pendiente de nuestra propuesta sería la formulación del problema de optimización asociado a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Proponer cartografiar las unidades didácticas de un curso de matemáticas en el nivel de la educación básica regular.

Implementar un marco interpretativo matemático desde las redes sociales y la teoría de juegos para los diversos paradigmas de la teoría del aprendizaje.

Extender nuestra propuesta de interpretación a la teoría de control óptimo con la finalidad de simular el comportamiento de los estudiantes.

CAPÍTULO VII. REFERENCIAS

7.1. Fuentes bibliográficas

- Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. 2ª edición, Barcelona: Ed. Paidós-Ibérica. Recuperado de <https://acortar.link/94hAEK>
- Amaya, J., y Prado, E. (2007). *Estrategias de Aprendizajes para universitarios un enfoque constructivista*. México: Editorial Trillas. Recuperado de <https://www.buscalibre.pe/libro-estrategias-de-aprendizaje-para-universitarios-un-enfoque-constructivista/9788466584173/p/2868524>
- Barrantes, R. (2014). *Investigación. Un camino al conocimiento, Un enfoque Cualitativo, cuantitativo y mixto*. Costa Rica: Editorial EUNED. Recuperado de https://www.academia.edu/38766459/Investigacion_un_camino_al_conocimiento_Barantes_Echavarr%C3%ADa
- Bunge, M. (1979). *La ciencia. Su método y su filosofía*. Buenos Aires: Editorial Siglo Veintiuno. Recuperado de la fuente <https://www.der.unicen.edu.ar/wp-content/uploads/2021/06/05.-BUNGE.pdf>
- Bolívar, A. Barbera, E y Calvo, J. R. (2000). *El constructivismo en la práctica*. Barcelona, España: Editorial Grao. Recuperado de <https://www.casadellibro.com/libro-el-constructivismo-en-la-practica/9788478272273/713064>
- Flórez, R. (1995). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill. Recuperado de <https://educativopracticas.files.wordpress.com/2014/05/haciaunapedagogiadelconocimiento-110416185236-phpapp01.pdf>

- Garner, H. (1983). *Inteligencias Múltiples. La Teoría en la Práctica*. Barcelona, España: Editorial Paidós Ibérica. Recuperado de <https://www.casadellibro.com/libro-inteligencias-multiples-la-teoria-en-la-practica/9788449325946/1862454>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill. Recuperado de https://apiperiodico.jalisco.gob.mx/api/sites/periodicooficial.jalisco.gob.mx/files/metodologia_de_la_investigacion_-_roberto_hernandez_sampieri.pdf
- Lamata, R. y Domínguez, R. (2019). *La construcción de procesos formativos en educación no formal*. Madrid: Editorial Narcea. Recuperado de https://www.lacasademar.es/es/libro/la-construccion-de-procesos-formativos-en-educacion-no-formal_M670080003
- Popper, K. (1985). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Editorial Tecnos. Recuperado de <https://educacion.uncuyo.edu.ar/upload/popper-logica-inv-cientifica-cap1.pdf>
- Rodríguez, D. y Valldeoriola, J. (2014). *Metodología de la investigación*. España: Editorial Eureka Media. Recuperado de https://openaccess.uoc.edu/bitstream/10609/77608/1/metodolog%c3%ada%20de%20a%20investigaci%c3%b3n_portada.pdf
- Harary, F.; Norman, R. (1965). *Graph Theory as a Mathematical Model in Social Science*. Cambridge, Reino Unido: Centro de Investigación de Dinámica de Grupos. Recuperado de <https://www.amazon.com/-/es/Frank-Harary/dp/B0006ATL6I>
- Richard, P. (1952). *The tropical rain forest*. Reino Unido: Universidad de Gales, Bangor. Recuperado de https://www.cambridge.org/gb/universitypress/subjects/life-sciences/plant-science/tropical-rain-forest-ecological-study-2nd-edition?site_view=desktop

7.2. Fuentes electrónicas

- Barnhart, T., y Van, E. (2018). Studying teacher noticing: examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, Vol. 45, núm. 3 p. 83-93. Recuperado de <https://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005>
- Bocanegra, I. y Devia, M. (2019). *Construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje en torno al proceso de generalización geométrica* (Tesis pregrado). Recuperado de <http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11913/TE24055.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Barboza, F. (2018). *Uma Abordagem para Ensino baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa utilizando a Teoría das Categorias* (Tesis posgrado). Recuperado de <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/14332/1/AbordagemEnsinoBaseada.pdf>
- Bunge, M. (1981). Analogy between Systems. *International Journal of General Systems*, 7(4), 221-223. Recuperado de <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081078108934823>
- Casillas, C. (2019). Currículum, ideología y capacidad crítica en la docencia universitaria. *Revistas Educación*. Vol. 43, núm. 1, 2021, p. 1-17. Recuperado de <https://www.redalyc.org/journal/440/44057415034/44057415034.pdf>
- Cárcamo, A., Fortuny, J. M., y Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Revista enseñanza de las ciencias*, 39-1, 45-64. Recuperado de <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v39-n1-carcamo-fortuny-fuentealba/2857-pdf-es>
- Carriazo, C, Pérez, M, Gaviria, K. (2020). Planificación educativa como herramienta fundamental para una educación con calidad. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, Vol.

- 25, núm. 3, 2020, p. 87-94. Recuperado de <https://www.redalyc.org/journal/279/27963600007/27963600007.pdf>
- Carrión, V. (2020). Rutas del aprendizaje: La nueva educación plástica y la pérdida de rumbo educativo. *REDDOLAC*, Recuperado de <https://reddolac.org/forum/topics/rutas-del-aprendizaje-la-nueva-educacion-plastica-y-la-perdida-de>
- Combariza, G. (2018). Una introducción a la teoría de grafos. *Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*. 565-591. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/33252609.pdf>
- Coll, C. (2016). Constructivismo e intervención educativa. Como enseñar lo que hay que construir. *Propuesta Educativa*, 5(8), 48-57. Recuperado de <https://es.scribd.com/document/339879939/Constructivismo-e-intervencion-educativa-Como-ensenar-lo-que-se-ha-de-construir-pdf>
- Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H., y Van, J. (2019). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 132-151. Recuperado de <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538294>
- Ferreira, A. (2019). *Creencias y concepciones docentes sobre la evaluación de los aprendizajes en el contexto universitario* (Tesis pregrado). Recuperado de https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4425/FERREYR_A_DIAZ_ANA_CREENCIAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Franco, J., López, H. y Arango, D. (2020). La satisfacción de ser docente: un estudio de tipo correlacional. *Revista Complutense de Educación*. Vol. 31, num.1, pp. 55-67. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.5209/rced.61775>

- García, F. Moctezuma, E. y Yuren, T. (2017). Aprender a aprender en universidades 4.0. *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria*, 33(1), 221-241. Recuperado de <https://revistas.usal.es/tres/index.php/1130-3743/article/view/teri.23548>
- Gaitán C, López E, Quintero, M y Salazar, W (2018) Orientaciones pedagógicas para la Filosofía en la educación media. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Garduño. E (2020). Rutas de aprendizaje en la inducción, ingreso y seguimiento de un proceso de formación. *Revista educación*, 44(2). Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44062184012>
- Gómez, P.; González, M.; Romero, I. (2021). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, Vol. 18, n°um.13, 2019. Pp. 319-338. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf>
- Gómez, I. (2020). La tarea intelectual de las matemáticas. Afecto, meta afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 225-247. Recuperado de <https://docta.ucm.es/rest/api/core/bitstreams/2e9a8e9b-6e69-4efa-9191-67e299c6b607/content>
- La torre, A. y Seco, C. (2018). Diseño curricular nuevo para una nueva sociedad. Teoría: qué cambiar y cómo cambiar. *Universidad Marcelino Champagnat*. 86 pg. Recuperado de https://catalogo.umch.edu.pe/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=45253&shelfbrowse_itemnumber=45248#holdings
- Mira M (2019). *Desarrollo de la comprensión del concepto de Límite de una función. Características de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (Tesis posgrado). Recuperado de <http://hdl.handle.net/10045/53830>

- Modino G. (2018). Modelos conceptuales y mentales: Elementos para repensar la enseñanza y el aprendizaje. *Revista Enfoques*, 26(1), 57-78. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/259/25933773004.pdf>
- Pacheco E. y Porras S (2020). Los momentos de la sesión a través de las rutas de aprendizaje. Propuesta de trabajo para los alumnos de las carreras de educación secundaria de la UNDAC. *Revista Horizonte de la Ciencia* 4 (7). Recuperado de <https://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/243/255>
- Restrepo C, Hernán J, Sánchez C. (2004). Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de dijkstra para determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad. *Revista Scientia Et Technica* Año X (26). 121-126 UTP. ISSN 0122-1701 Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/849/84911640035.pdf>
- Savasci, F. (2019). Teacher beliefs and practice in science education. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, 10(1). Recuperado de https://www.academia.edu/69096393/Teacher_beliefs_and_practice_in_science_education
- Salinas, J., Benito, B., Moreno, J. y Lizana, A. (2022). Nuevos diseños y formas organizativas flexibles en educación superior: construcción de itinerarios personales de aprendizaje. *Revista de Medios y Educación*, Vol. 53, núm. 1, p. 65-91. Recuperado de <https://doi.org/10.12795/pixelbit.91739>
- Solorzano, G. (2021). *Modelo categórico del proceso enseñanza-aprendizaje* (Tesis pregrado). Recuperado de <https://repositorio.unjfsc.edu.pe/bitstream/handle/20.500.14067/4507/sol%20c3%93rzan%20o%20ram%20n%20c%20gianfranco%20urbigenes.pdf?sequence=1&isallowed=y>
- Siemens, G. (2019). Conectivismo: Una teoría de aprendizaje para la era digital. *Creative Commons* 2.5. Recuperado de

https://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/_media/cursos/tic/s1x1/modul_3/conectivismo.pdf

Cárcamo, A., Fortuny, J. M, y Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanzas de las Ciencias*, 39-1, 45-64. Recuperado de <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/10.5565-rev-ensciencias.2857>

Tansley, A. (1935). The use and abuse of vegetational concepts and terms. *Ecology* 16, p. 284-307. Recuperado de <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/1930070>

Trigueros, M. (2019) *Un modelo de medida con interacción*. (Tesis de posgrado). Recuperado de <https://eprints.ucm.es/id/eprint/2261/1/T23476.pdf>

Vallejo, M. (2021). El diseño de investigación: una breve revisión metodológica. *Archivos de Cardiología de México*. 72: 8-12. Recuperado de <https://www.scielo.org.mx/pdf/acm/v72n1/v72n1a2.pdf>

Velásquez, F. (2022). Gestión educativa para mejorar la eficiencia del desempeño docente en educación primaria en Perú. *Revista Científica Hacedor - AIAPAEC*. Vol. 6, Núm. 1, pp.161 -175–ISSN: 2520 -0747. Recuperado de <https://revistas.uss.edu.pe/index.php/HACEDOR/article/view/2122>

ANEXOS

ANEXO N° 1. MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPOTESIS PRINCIPAL	VARIABLES	DISEÑO METODOLÓGICO
¿Cómo elaborar un modelo matemático que represente y describa las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?	Desarrollar, un modelo matemático que represente la trayectoria hipotética de aprendizaje	No admite	Variable No admite	<p>Tipo de estudio: Básica</p> <p>Diseño: Observacional y descriptivo</p> <p>Área de estudio: Matemática y Ciencias de la Educación</p> <p>Población y muestra Diez profesores de matemática de EBR del tercer grado de educación secundaria del centro educativo particular, cubano - peruano "la edad de oro". Ubicado en la urbanización los Cipreses V-1315136 perteneciente a la UGEL 09 de la provincia de Huacho.</p> <p>Instrumentos: Entrevistas y anotaciones.</p> <p>Valoración estadística Ninguno.</p>
PROBLEMAS ESPECIFICOS	OBJETIVOS ESPECIFICOS	HIPOTESIS ESPECÍFICOS		
1. ¿Qué conceptos matemáticos son necesarios para el desarrollo del modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?	1. Seleccionar las herramientas matemáticas que permiten desarrollar un modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.	No admite		
2. ¿Qué elementos de la teoría cognitiva del aprendizaje permitirá la descripción general de la organización e interrelación entre las componentes de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje?	2. Determinar los elementos básicos de la didáctica de la matemática que permita el desarrollo del modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.	No admite		

ANEXO N° 2. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES E INDICADORES

VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIONES	INDICADORES
Modelo matemático de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje	Representación relacional que describe los caminos de aprendizaje que los estudiantes adquieren durante la experiencia educativa	Sistema relacional que busca analizar el recorrido y la evolución del aprendizaje de los estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"> • Logros de aprendizaje • Habilidades 	<ul style="list-style-type: none"> • Calificación • Comprensión del tema • Compromiso y responsabilidad • Socializa durante la experiencia educativa • Implementa acciones de mejora.

ANEXO N° 3. APLICACIÓN DE LA PROPUESTA

1. Sobre el contenido y las capacidades

Supongamos que el profesor desea planificar su clase sobre el tema: función cuadrática, en particular su representación gráfica. Es evidente que el docente va a desarrollar capacidades necesarias para los estudiantes puedan resolver problemas que involucran el significado de los parámetros de la función cuadrática. Es decir; dado $f(x) = ax^2 + bx + c$ se desea enseñar que sucede con la gráfica cuando se manipulan los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Es evidente que todo docente supone, que “la mayoría de sus alumnos son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento y la caracterización de esta función. Por ejemplo, identificar sus diferentes representaciones algebraicas, las formas de sus gráficas, evaluar la función”.

Sin embargo, la experiencia del profesor muestra que los estudiantes tienen dificultades para establecer la relación entre las diferentes representaciones algebraicas y la representación gráfica de la función. Esto quiere decir, por ejemplo, dada la forma algebraica $f(x) = \pm a(x \pm b)^2 \pm c$ o $f(x) = ax^2 + bx + c$ el estudiante no es capaz de reconocer aquellos parámetros que involucran cambios sustanciales en la gráfica como, por ejemplo: orientación, dilatación, corrimientos y expansión, puntos de corte, máximos o mínimos.

En resumen, “el interés del profesor es lograr que los alumnos sean capaces de resolver problemas que involucra el significado gráfico de los parámetros”. El problema para el docente es hallar métodos para que los alumnos puedan superar estas dificultades.

En primer lugar, el docente debe tener en cuenta el siguiente esquema cognitivo de la función cuadrática.

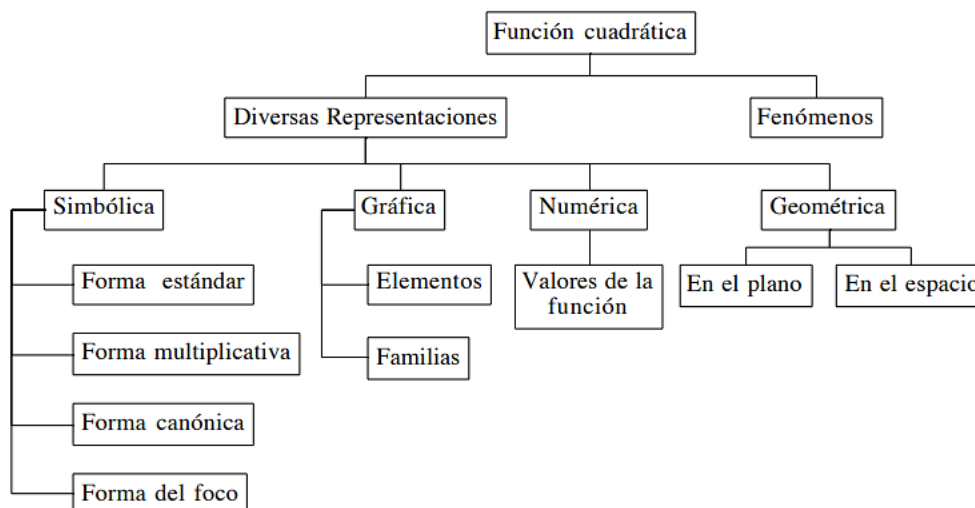


Figura 15. Mapa conceptual general de la función cuadrática

En segundo lugar, el profesor debe “buscar las diversas relaciones que se establecen entre elementos de las diferentes formas algebraicas y elementos de la representación gráfica (vértice, cortes con los ejes, foco, directriz). Por lo tanto, desde el punto de vista del análisis de contenido”, el docente puede visualizar la complejidad del tema en cuestión.

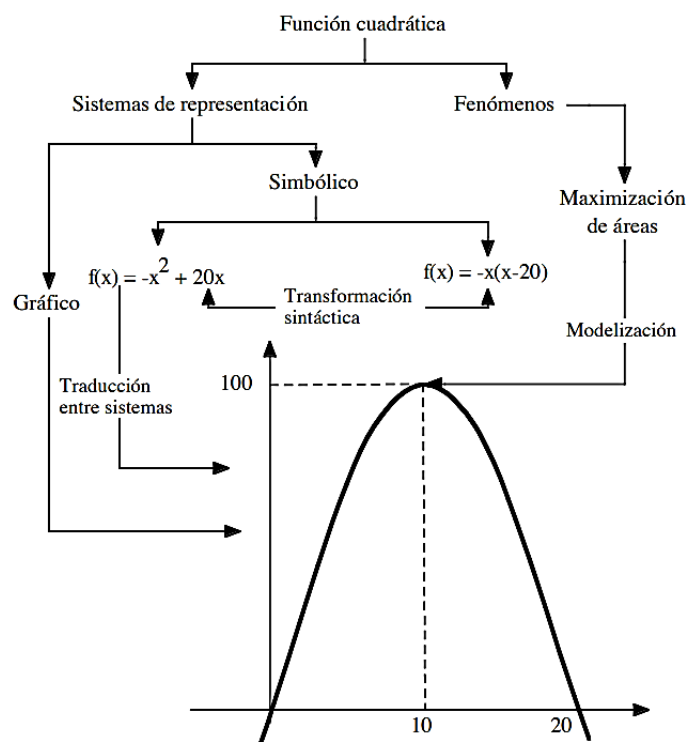


Figura 16. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial de la función cuadrática

Luego de haber, realizado los dos primeros pasos se tiene “la definición de los aspectos cognitivos que surgen de la descripción y del análisis de contenido del concepto matemático. Por tanto, las capacidades que deseamos que los escolares desarrollen y las dificultades que ellos pueden tener al abordar tareas”.

En ese contexto Rodríguez et al (2014) señala “que el análisis más detallado muestra que, desde una perspectiva cognitiva, el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar, al menos, el manejo de los procedimientos para transformar una forma algebraica en otra, los procedimientos algebraicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica y las transformaciones gráficas a partir de la forma algebraica estándar”. (p.44)

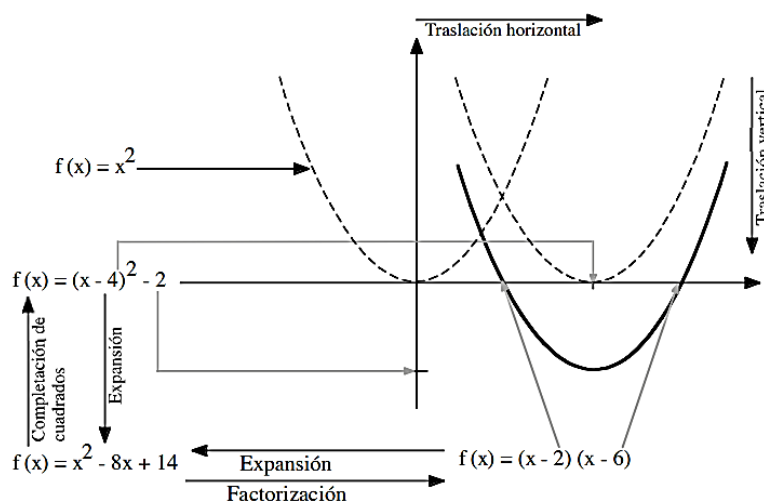


Figura 17. Conexiones y procedimientos

En tercer lugar, el análisis de contenido proporciona la mayor parte de la información necesaria para identificar las capacidades que se pretenden desarrollar.

Luego, de acuerdo a Lupiáñez et al (2018), “se ha identificado algunas de las capacidades que están implicadas en este problema y hemos marcado aquellas competencias a las que ellas contribuyen” (p.12).

Tabla 1. Capacidades para el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas

Capacidades		Competencias							
		PM	J	C	EC	R	F	M	D
Ejecutar, Comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas									
C1	Completación de cuadrados		✓	✓		✓			✓
C2	Expansión		✓	✓		✓			
C3	Factorización		✓	✓		✓			
C4	Forma canónica (a, h, k)		✓	✓	✓				
Ejecutar, Comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas									
C5	Forma foco (p, h, k)		✓	✓	✓				
C6	Forma estándar (a, b, c)		✓	✓	✓				
C7	Forma Multiplicativa (a, r ₁ , r ₂)		✓	✓	✓				
Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos									
C8	Coordenadas del vértice		✓	✓	✓				
C9	Puntos de corte con el eje y		✓	✓	✓				
C10	Puntos de corte con el eje x		✓	✓	✓				
C11	Coordenadas del foco		✓	✓	✓				
C12	Ubicación de la directriz		✓	✓	✓				
C13	Ubicación del eje de la simetría		✓	✓	✓				
Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones graficas									
C14	Traslación horizontal		✓	✓		✓			
C15	Traslación vertical		✓	✓		✓			
C16	Dilatación		✓	✓		✓			

PM: Pensamiento matemático, J: justificar, C: comunicar, EC: estructura conceptual, R: representaciones, F: fenomenología, M: modelización, D: dificultad.

2. Caminos de Aprendizaje

Desde la perspectiva propuesta por Simón (20220) “bordar el problema que hemos propuesto implica recorrer el camino que lleve a los escolares de una situación en que han desarrollado unas capacidades básicas con respecto a la función cuadrática, a otra situación en la que los escolares son capaces de resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática” (p.33).

En la Figura adjunta hemos identificado algunas capacidades (C_i) y algunos caminos y hemos diferenciado algunos vínculos con una línea continua para indicar una selección de caminos.

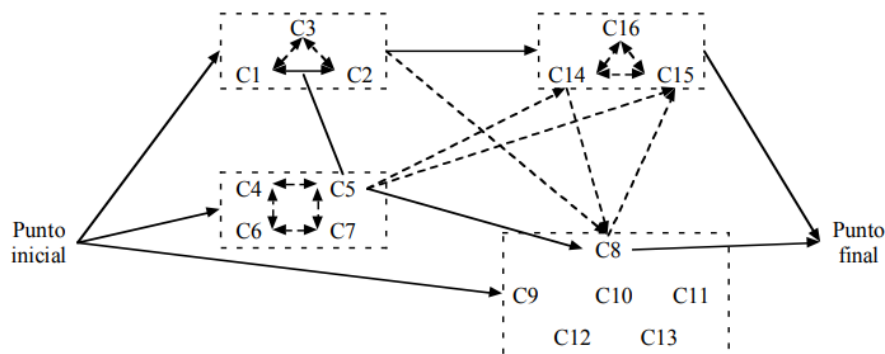


Figura 18. Posibles caminos de aprendizaje

Así, por ejemplo, una tarea puede requerir la determinación de las coordenadas del foco de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ y, en consecuencia, puede involucrar completar cuadrados (C1), la identificación de los parámetros de la forma del foco (C5) y la identificación de las coordenadas del vértice (C7).

Con lo que se reafirma lo planteado por Siemens (2019) y Carrión (2020) “El análisis de los posibles caminos puede inducirlo a cambiar la tarea, dependiendo de su percepción de cuáles son las capacidades relevantes en ese momento. Por ejemplo, puede decidir diseñar una tarea que ponga en juego ciertas capacidades porque ellas contribuyen a unas competencias que se consideran importantes dentro del diseño curricular” (p.73).

3. Caminos de Aprendizaje y Dificultades

Según Kendal (2019) “Hay otro criterio que el profesor debe utilizar para identificar los posibles caminos de aprendizaje y seleccionar las tareas: el profesor debe tener en cuenta su conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos de los escolares en el tema” (p.22). Por ejemplo, el profesor puede saber que sus estudiantes tienen dificultades para identificar el foco de la parábola, para diferenciar las coordenadas del foco de una parábola de las

coordenadas de su corte con el eje de las ordenadas, o para relacionar diferentes expresiones dentro de un mismo sistema de representación (en el procedimiento de completar cuadrados).

Diseñará entonces una tarea que implique que todos los caminos pasen por esa capacidad. En la Figura, sugerimos una colección de posibles caminos de aprendizaje que involucran la capacidad en cuestión.

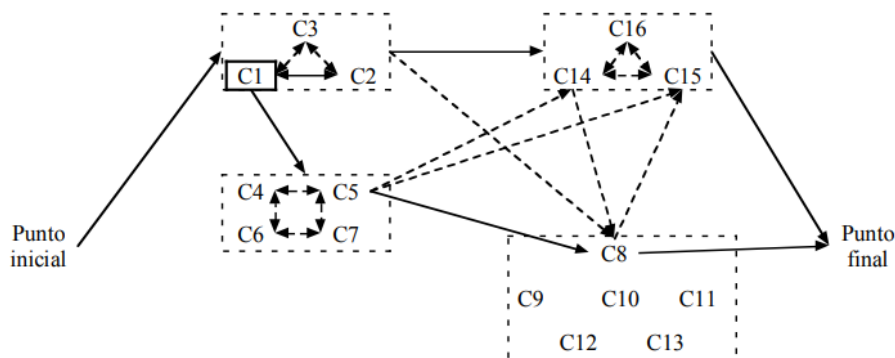


Figura 19. Posibles caminos de aprendizaje teniendo en cuenta dificultades

4. Análisis de Tareas

Según Pacheco (2020) “el procedimiento para identificar y organizar las capacidades de los estudiantes antes y después de la instrucción y para tener en cuenta las dificultades de los escolares en la descripción de los posibles caminos a lo largo de los cuales se puede desarrollar el aprendizaje” (p.37). Pero, esta reflexión no ha incluido la selección de las tareas. Qué caminos recorran los escolares dependerá de las tareas que se les proponga. Dado que, en el caso de la formación inicial, las tareas no se llevarán a la práctica, el proceso es hipotético.

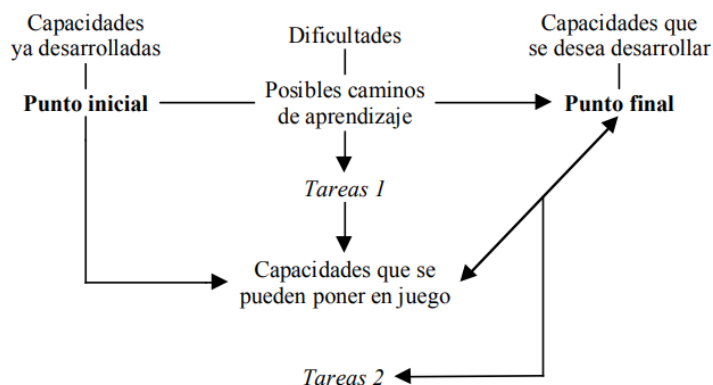


Figura 20. Ciclo de planificación local

En consecuencia, es notorio la afirmación propuesta por Dierdrop et al (2019) “La caracterización de las capacidades antes y después de la instrucción y de los posibles caminos de aprendizaje, le dan luces al profesor sobre las capacidades que sería deseable que los escolares pusieran en juego al realizar las tareas” (p.55). Con esta información, se puede diseñar y seleccionar una primera versión de esas tareas. Una vez que tiene identificadas unas tareas, se debe verificar cuáles son las capacidades que ellas requieren y aquellas que los escolares pueden poner en juego al abordarlas.