Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática Aplicada

El teorema fundamental del cálculo desde la perspectiva del software de geometría dinámica geogebra

Tesis

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática Aplicada

Autor

Wilson Velásquez Izquierdo

Asesor

Dr. Jorge Luis Rojas Paz

Mg. Jorge Luis Rojas Paz
DOCENTE - UNJFSC

Huacho – Perú

2023

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE LA PERSPECTIVA DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

INFORME DE ORIGINALIDAD

19%	18%	2%	6%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	uvadoc.uva.es Fuente de Internet	3%
2	repositorio.unjfsc.edu.pe Fuente de Internet	3%
3	beta.geogebra.org Fuente de Internet	2%
4	Submitted to Universidad Nacional Jose Faustino Sanchez Carrion Trabajo del estudiante	2%
5	qdoc.tips Fuente de Internet	2%
6	Submitted to Universidad Politecnica Salesiana del Ecuado Trabajo del estudiante	1%
7	pdfcoffee.com Fuente de Internet	1%
8	uomustansiriyah.edu.iq	

JURADO EVALUADOR

Carlos Roberto Pesantes Rojas
LICENCIADO EN MATEMATICAS

MG. CARLOS ROBERTO, PESANTES ROJAS

PRESIDENTE

Universidad Nacional
José Faustino Sánchez Carrión

Dr. Enrique U. Díaz Vega
COMAP 1349
DNU 317

DR. ENRIQUE UBALDO, DÍAZ VEGA

SECRETARIO

Universidad Nacional
"José Faustino Sánchez Carrión"

Mo. Zubieta Rojas Henry Cristhian
DNI 43404788

MO. HENRY CRISTHIAN, ZUBIETA ROJAS

VOCAL

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE LA PERSPECTIVA DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

Wilson Velásquez Izquierdo

TESIS DE LICENCIATURA

ASESOR: Jorge Luis Rojas Paz

UNIVERSIDAD NACIONAL
JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

HUACHO

2022

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres

Wilson Velásquez Izquierdo

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios y a mis padres por su apoyo durante mi vida y en especial, durante el desarrollo de este trabajo

Wilson Velásquez Izquierdo

ÍNDICE

DEDICATORIA **iii**
AGRADECIMIENTO **iv**
RESUMEN **viii**
ABSTRACT **ix**
CAPÍTULO I **11**
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA **11**
1.1 Descripción de la realidad problemática 11
1.2 Formulación del problema 12
1.2.1 Problema general 12
1.2.2 Problemas específicos 12
1.3 Objetivos de la investigación 12
1.3.1 Objetivo general 12
1.3.2 Objetivos específicos 12
1.4 Justificación de la investigación 13
1.5 Delimitaciones del estudio 14
1.6 Viabilidad del estudio 14
CAPÍTULO II **15**
MARCO TEÓRICO **15**
2.1 Antecedentes de la investigación 15
2.1.1 Investigaciones internacionales 15
2.1.2 Investigaciones nacionales 16
2.2 Bases teóricas 17
2.3 Definición de términos básicos 29
2.4 Hipótesis de investigación 30
2.4.1 Hipótesis general 30
2.4.2 Hipótesis específicas 30
2.5 Operacionalización de las variables 30
CAPÍTULO III **32**
METODOLOGÍA **32**
3.1 Diseño metodológico 32
3.1.1. Tipo de investigación 32
3.1.2 Nivel de Investigación 32
3.1.3 Diseño 32

3.1.4. Enfoque 33
3.1.5. Estrategias o procedimientos de contratación de hipótesis 33
3.2 Población y muestra 33
3.2.1 Población 33
3.2.2 Muestra 33
3.3 Técnicas de recolección de datos 34
3.4 Técnicas para el procesamiento de la información 34
CAPÍTULO IV **35**
RESULTADOS **35**
4.1 Análisis de resultados 35
4.2 Contrastación de hipótesis 39
CAPÍTULO V **42**
DISCUSIÓN **42**
5.1 Discusión de resultados 42
CAPÍTULO VI **43**
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES **43**
6.1 Conclusiones 43
6.2 Recomendaciones 43
REFERENCIAS **45**
7.1 Fuentes documentales 45
7.2 Fuentes bibliográficas 45
7.3 Fuentes hemerográficas 45
7.4 Fuentes electrónicas 46

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 18
Figura 2 18
Figura 3 20
Figura 4 21
Figura 5 21
Figura 6 22
Figura 7 22
Figura 8 23
Figura 9 24
Figura 10 25
Figura 11 25
Figura 12 26
Figura 13 35
Figura 14 36
Figura 15 36
Figura 16 37
Figura 17 37
Figura 18 38
Figura 19 39
Figura 20 39
Figura 21 40
Figura 22 41
Figura 23 41

RESUMEN

Objetivo: Construir un modelo dinámico utilizando GeoGebra sobre objetos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo a partir de una función continua $f: I = [a. b] \to \mathbb{R}$, especifica diseñada por el investigador. **Materiales y Métodos:** Para el estudio se planteó la construcción de Applets diseñados por el investigador que permitieron dinamizar y acercarnos a la demostración del teorema fundamental del cálculo, así como establecer a partir de ellos algunas conjeturas que se derivan de la dinámica de los materiales utilizados. El método utilizado en esta investigación es el inductivo-deductivo, así como los métodos gráficos derivados de la geometría dinámica que proporciona el software GeoGebra.

Resultados: Como resultado de la investigación al aplicar el teorema fundamental del cálculo haciendo uso de la geometría dinámica, se concluye que no se necesita de la derivabilidad total de una función continúa para garantizar su aplicación, Así mismo, a partir de la dinámica de los Applets generados se puede conjeturar que existe un punto $c \in I =$ [a, b] donde $f: I = [a. b] \to \mathbb{R}$ es continua, tal que

$$F(c) = \int_a^c f(t)dt = f(c)$$

Conclusiones: El uso de la geometría dinámica en las demostraciones presentadas, ofrecen diversas posibilidades de análisis gracias a su utilización, no solo en el campo de la didáctica como seria natural, sino también permite proponer futuras actividades de exploración grafica que conllevan al establecimiento de conjeturas e inducir propiedades en funciones que no necesariamente cumplan con las hipótesis involucradas en el teorema fundamental del cálculo.

Palabras claves:

Geometría dinámica, Applets con GeoGebra, Teorema fundamental del cálculo.

ABSTRACT

Objective: To build a dynamic model using GeoGebra on mathematical objects related to the fundamental theorem of calculus from a continuous function $f:I=[a.b]\rightarrow R$, specified by the researcher. Materials and Methods: For the study, the construction of Applets designed by the researcher was proposed, which allowed us to dynamize and approach the demonstration of the fundamental theorem of calculus, as well as to establish from them some conjectures that derive from the dynamics of the materials used. . The method used in this research is the inductive-deductive method, as well as the graphical methods derived from dynamic geometry provided by the GeoGebra software.

Results: As a result of the investigation when applying the fundamental theorem of calculus using dynamic geometry, it is concluded that the total derivability of a continuous function is not needed to guarantee its application. Likewise, from the dynamics of the Generated applets it can be conjectured that there exists a point $c \in I=[a,b]$ where $f:I=[a.b]\rightarrow R$ is continuous, such that

$$F(c) = \int_{a}^{c} f(t)dt = f(c)$$

Conclusions: The use of dynamic geometry in the demonstrations presented, offer various possibilities of analysis thanks to its use, not only in the field of didactics as it would be natural, but also allows to propose future graphic exploration activities that lead to the establishment of conjectures. and induce properties in functions that do not necessarily comply with the hypotheses involved in the fundamental theorem of calculus.

Keywords:

Dynamic geometry, GeoGebra applets, Fundamental theorem of calculus.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años el avance progresivo de las tecnologías de información y comunicación han despertado el interés académico no solo en su utilización como herramientas para el aprendizaje sino como medios a través del cual se pueden explorar conceptos y definiciones por ejemplo en el campo de las matemáticas que permitan abordarlos desde otra óptica y a partir de ello establecer conjeturas o propiedades que pueden derivarse a partir de la dinámica impuesta en las construcciones.

En este sentido, y desde un punto de la geometría dinámica proporcionada a partir del software GeoGebra esta tesis busca dinamizar los conceptos clave inherentes en el teorema fundamental del cálculo y derivar a partir de ello en conjeturas que sean plausibles de abordar en próximas investigaciones y o confirmar en futuros estudios que podrían ser realizados por otros investigadores desde el punto de vista no sólo dinámico sino desde las propias herramientas que proporciona el análisis matemático.

Se presentan por tanto en los capítulos siguientes de esta investigación los applets construidos para funciones continuas específicas y al mismo tiempo las conjeturas que derivan de las mismas, con el propósito de establecer su validez y sustentación; así como se plantean ideas que podrían ser abordados en futuras investigaciones.

CAPÍTULO I
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

El uso de la tecnología de la información y comunicación en diversos campos del conocimiento es hoy en día una prioridad para el análisis e interpretación de múltiples situaciones de contexto real y académico e introduce nuevas formas de abordar y desarrollar la investigación científica tanto en las ciencias formales como en las ciencias fácticas Bunge (1992).

En el contexto de la matemática como ciencia formal clasificación establecida siguiendo a Bunge (1992), el uso de geometría dinámica permite tener nuevas perspectivas y herramientas para abordar el conocimiento existente, pero fundamentalmente permite establecer formas interactivas de interpretación de teorías lo que provocará en un futuro no muy lejano la creación de estrategias de prueba y demostración apoyadas en software de geometría dinámica como ya lo está desarrollando en la actualidad GeoGebra y conforme lo expresa Casado (2022), quien en su reciente artículo establece que se: “ha presentado un ejemplo de la utilización de GeoGebra como herramienta tecnológica para la resolución y demostración de problemas matemáticos” (párr. 1).

En este contexto, surge la idea plasmada en este proyecto orientada a generar una forma distinta de abordar el teorema fundamental del cálculo integral desde la perspectiva de la geometría dinámica concebida de acuerdo con Costa y Sombra del Río (2019) como : “entornos que permiten explorar, visualizar, conjeturar y reflexionar” (p.77), de modo que se analicen los conceptos matemáticos que lo conforman y se logre hacer diversas interpretaciones, involucrando los conceptos previos que sirven de sustento en su construcción y demostración, utilizando como herramienta el software GeoGebra.

1.2 Formulación del problema

Se formularon en este estudio los siguientes problemas de investigación:

1.2.1 Problema general

¿Se puede construir un modelo dinámico utilizando GeoGebra, que permita describir, analizar y establecer conjeturas sobre objetos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo; a partir de una función continua $f: I = [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$ especifica?

1.2.2 Problemas específicos

1. ¿De qué manera se puede diseñar un modelo dinámico para una función continua especifica $f: I = [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$, que permita visualizarla y recorrerla en todo su dominio?

2. ¿De qué manera se puede dinamizar los principales objetos matemáticos que intervienen en la concepción del teorema fundamental el cálculo, dada una función continua específica?

3. ¿De qué manera se puede diseñar, construir y describir un modelo dinámico, que permita analizar y establecer conjeturas acerca del teorema fundamental del cálculo, a partir de una función continua específica ?

1.3 Objetivos de la investigación

En este estudio se plantearon los siguientes objetivos:

1.3.1 Objetivo general

Construir un modelo dinámico utilizando GeoGebra sobre objetos matemáticos relacionado con el teorema fundamental del cálculo a partir de una función continua $f: I = [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$, especifica.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Diseñar y describir un modelo dinámico para una función continua especifica $f: I = [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando GeoGebra que permita visualizarla y recorrerla en todo su dominio

2. Dinamizar utilizando GeoGebra, los principales objetos matemáticos que intervienen en la concepción del teorema fundamental el cálculo; dada una función continua específica.

3. Diseñar y describir un modelo dinámico utilizando GeoGebra, que permita analizar y establecer conjeturas acerca del teorema fundamental del cálculo; a partir de una función continua específica.

1.4 Justificación de la investigación

Justificación Teórica: Este estudio se justifica teóricamente porque ha permitido desarrollar, comprobar y hacer conjeturas a partir de la teoría existente sobre el teorema fundamental del cálculo desde un punto de vista del análisis matemático y de la geometría dinámica.

Justificación Metodológica: Se justifica metodológicamente, al presentarse un método desarrollado con geometría dinámica que permitirá explorar los objetos matemáticos involucrados en la concepción del teorema fundamental del cálculo a partir del cual se puedan establecer conjeturas

Justificación práctica: Contribuirá con el diseño y construcción de Applets que serán utilizados en esta investigación para alcanzar los objetivos planteados, a partir de los cuales se pueden utilizar diferentes funciones continuas lo que constituye un importante material interactivo accesible para ser utilizado por docentes investigadores y estudiantes de diferentes Universidades del País y en general por cualquier persona que incursione en el mundo del cálculo integral e intente comprender, interpretar y conjeturar desde la óptica dinámica utilizando tan importante teorema.

1.5 Delimitaciones del estudio

Delimitación espacial: El estudio se realizará en la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, Biblioteca de la Facultad de Ciencias.

Delimitación temporal: Cubrirá un Periodo de 3 meses desde la segunda semana de mayo a la segunda semana de agosto del año 2022.

Delimitación Temática: Este estudio se realizará reconstruyendo y dinamizando conceptos y teorías desarrolladas sobre el primer y segundo teorema fundamental del cálculo integral. Para tal efecto se seguirá la bibliografía y material existente en la biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, Escuela profesional de Matemática Aplicada; durante el Ciclo Académico 2021 – II.

1.6 Viabilidad del estudio

El estudio es viable técnicamente porque el investigador posee laptop y PC de escritorio, sumado a ello la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, a través de la Escuela profesional de Matemática Aplicada proporcionará el material bibliográfico necesario para la realización de la misma.

El estudio es viable económicamente, los gastos económicos ascendentes a 5000 soles serán íntegramente asumidos por el investigador.

El estudio es viable temporalmente puesto que solo se recogerá información bibliográfica durante 15 días comprendidas entre la quincena y fines de mayo

El estudio finalmente presenta viabilidad ética y moral puesto que la estrategia metodológica puesta a disposición se alinea con los principios y valores que propugna la Escuela Profesional de Matemática Aplicada, sus docentes, alumnos y egresados.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la investigación

No se han encontrado tesis referenciadas en el ámbito nacional ni internacional bajo el acercamiento dinámico que se pretende dar en este trabajo de investigación al teorema fundamental del cálculo integral, no obstante, el investigador considera pertinente algunos resultados trascendentes alcanzados y publicados en importantes repositorios de Universidades y revistas de divulgación científica; las que se detallan a continuación:

2.1.1 Investigaciones internacionales

Oviedo (2019) en su tesis titulada Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo para optar el Título de Ingeniero Civil, plantea tres objetivos a saber: "Señalar la interpretación tangible del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral, Definir operaciones topológicas que representen a la diferencial y a la integral. y Mostrar la aplicación del concepto al ámbito de Ingeniería Civil" (p.32).

En cuanto a la metodología de investigación, el autor sostiene que el desarrollo del Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo planteado, nace de la idea de explicar el Cálculo apelando a la intuición esto es a la comprensión o precepción inmediata sin necesidad de hacer intervenir la razón, evitando de esta forma el uso de la clásica noción de límite y área bajo la curva, lo que desarrolla a través de la presentación de los conceptos de derivación e integración utilizando para tal fin objetos geométricos tomados en cualquier espacio real de dimensión "n" (Oviedo, 2019).

Monroy y Riveros (2020) en su trabajo de grado para optar el título profesional de Licenciados en Matemáticas, titulado “Actividades para Redescubrir el Teorema Fundamental del Cálculo Integral” plantean como objetivo general, el diseño de una secuencia de actividades dirigidas a estudiantes de profesorado en matemáticas; para redescubrir y dar significado al teorema fundamental del cálculo integral.

Conclusión

Ambos investigadores concluyen haber cumplido con el objetivo general al haber logrado relacionar en la primera actividad el área de figuras geométricas con el concepto de integral, así como haber utilizado un entorno de geometría dinámica en la segunda, el mismo que permitió que los estudiantes doten de significado al teorema fundamental del cálculo, pero al mismo tiempo dichas actividades permitieron hacer que los estudiantes re-descubran dicho teorema.

2.1.2 Investigaciones nacionales

No se han encontrado investigaciones a nivel nacional que involucren un estudio del teorema fundamental del cálculo desde una perspectiva de geometría dinámica, sin embargo, consideramos relevantes para nuestra investigación los resultados alcanzados en la tesis para Licenciatura en Matemática de Esteban (2021) titulada “Una versión fuerte del teorema fundamental del cálculo” en la cual el investigador se propone como objetivo general debilitar la hipótesis en el teorema fundamental del cálculo. Entre las conclusiones que sugiere el investigador Esteban (2021), hemos tomado para los efectos de este estudio aquella que establece que “… para aplicar el teorema Fundamental del Cálculo no necesitaremos la derivabilidad total de una de las funciones a lo más continua y con derivación restringida, tomando como derivada lateral por la derecha” (p.28).

2.2 Bases teóricas

Iniciamos esta sección considerando una partición P = { $X_0, X_1, \dots, X_n$ } de [a; b] como un conjunto de "n" números reales $X_i \in I = [\,a;\ b]$ con $i = 1, \dots, n$; tal que:

$$a = X_0 < X_1 < \cdots < X_{n-1} < X_n = b$$

Definición 01: Consideremos f: I= [a; b] → ℝ una función real de variable real acotada y sea P = { $X_0, X_1, \dots, X_n$ } una partición de [a; b]. Denotemos por I_j al j-ésimo subintervalo de I, esto es, $I_j = [X_{j-1}; X_j]$, j = 1, …, n.

A partir del Teorema de Weierstrass, si f: I= [a; b] → ℝ es acotada en I, existen m_j y M_j tales que $m_j = \inf \{f(x) / x \in I_j\}$; $M_j = \sup \{f(x) / x \in I_j\}$ y $m_j \le f(x) \le M_j$, $\forall x \in I_j$, j = 1,2, …, n.

Entonces:

La suma inferior de Riemann, denotada como $\underline{S}(f;P)$ se define por:

$$\underline{S}(f;P) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_j(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_j \Delta_j \boldsymbol{X}$$

la suma superior de Riemann, denotada como $\overline{S}(f;P)$, se define por:

$$\overline{S}(f;P) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}_j(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}_j \Delta_j \boldsymbol{X}$$

Interpretación geométrica de la suma inferior para la función f(x)=x^2 realizada con GeoGebra

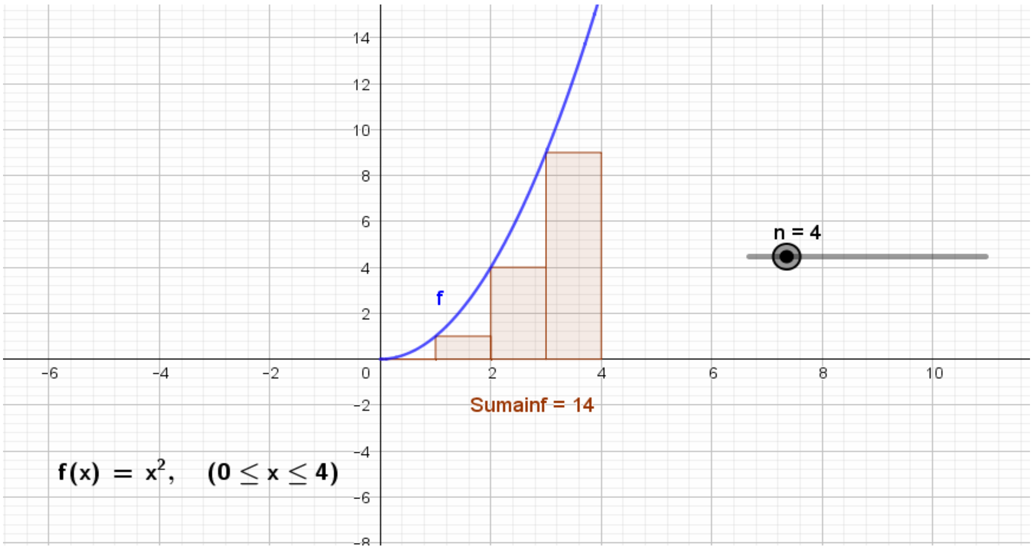

Figura 1

Interpretación geométrica de la suma inferior para la función f(x) = — x^2 realizada con GeoGebra

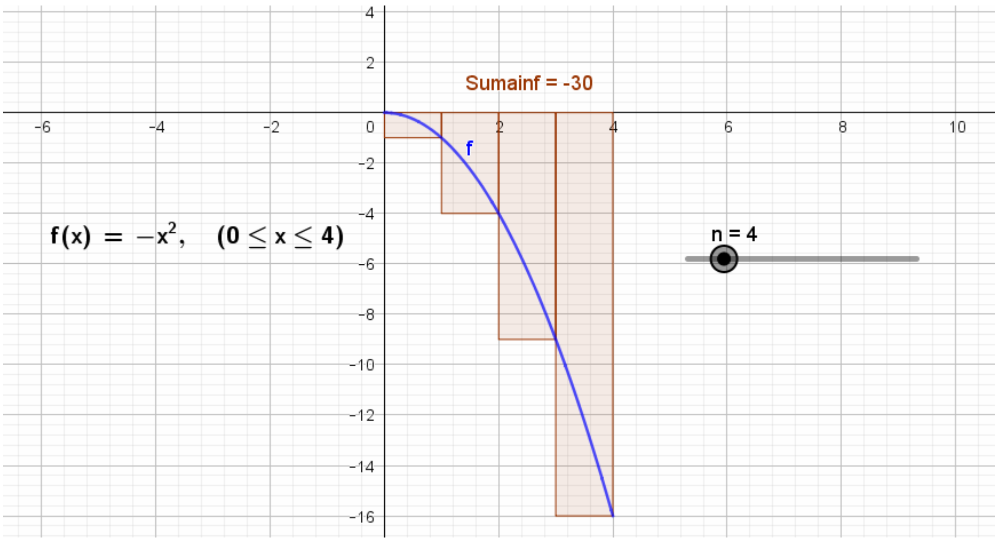

Figura 2

Conclusiones:

En primer lugar, los productos $m_j(\mathbf{X}_{\mathrm{j}} - \mathbf{X}_{\mathrm{j-1}})$ o $M_j(\mathbf{X}_{\mathrm{j}} - \mathbf{X}_{\mathrm{j-1}})$ pueden presentar las siguientes características:

En el caso que $m_j > 0$, entonces el producto $m_j(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ numéricamente constituiría el área del rectángulo de base $(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ y altura m_j, como se puede apreciar en la figura 01. En el caso en que $m_j = 0$, entonces $m_j(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}}) = 0$; es decir no tendríamos rectángulo alguno y si $m_j < 0$ entonces $m_j(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ seria numéricamente igual al opuesto del área del rectángulo de base $(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ y altura: $-m_j$ como se puede deducir a partir de la figura 02.

De acuerdo con Mitacc y Toro (2015), el número $m_j(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ o $M_j(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ recibe el nombre de área algebraica del rectángulo cuya base es $(\mathbf{X}_{\text{j}} - \mathbf{X}_{\text{j}-\mathbf{1}})$ y la altura es $|m_j|$ o bien $|M_j|$, es decir, el área algebraica es positiva si el rectángulo esta sobre el eje x y negativa, si esta debajo de dicho eje.

Siguiendo a Mitacc y Toro (2015) encontramos la siguiente propiedad demostrada

"Para una función f: I= [a; b] → ℝ acotada en I = $[a\ ;\ b\ ]$ y P = { $X_0, X_1, \dots, X_n$ } una partición de I. entonces m (b-a) ≤ $\underline{S}(f;P)$≤ $\overline{S}(f;P$ ≤ M (b - a)" (p.114).

Sea $D = \{\ P\!: P\ es\ una\ partición\ del\ intervalo\ I\ \}$. Si f es acotada en I, se demuestra en Mira y Sánchez - Pedreño (2005), que

m (b-a) ≤ $\underline{S}(f;P)$≤ $\overline{S}(f;P)$ ≤ M (b - a)

para todo $p \in D$, donde el conjunto $\{\ \underline{S}(f;P)\ /\ p\ \in D\ \}$ es acotado superiormente, mientras que el conjunto $\{\ \overline{S}(f;P)\ /\ p\ \in D\ \}$ es acotado inferiormente.

Definición 02: Sea f: I = [a; b] → ℝ una función real de variable real acotada en I, al número sup$\{\underline{S}(f;P).\, p \in D\ \}$ se le llama "integral inferior de f en I" y se representa por

$$\boldsymbol{\underline{J}} = \int_{\underline{a}}^{\text{b}} \boldsymbol{f(x)dx = sup\{\underline{S}(f;P)/p \in D\ \}}$$

Análogamente al número inf $\{\ \overline{S}(f;P)\ /p \in D\ \}$ se le llama "integral superior de f en I" y se representa como

$$\bar{J} = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = inf\{\bar{S}(f;P)/p \in D\}$$

La demostración de las propiedades que derivan a partir de las definiciones antes presentadas sobre integral superior e integral inferior y que se mencionan a continuación, pueden revisarse en Mira y Sánchez-Pedreño (2005)

1. Sea g: I= [a; b] ⟶ ℝ una función acotada en I, entonces $\underline{J} \leq \bar{J}$

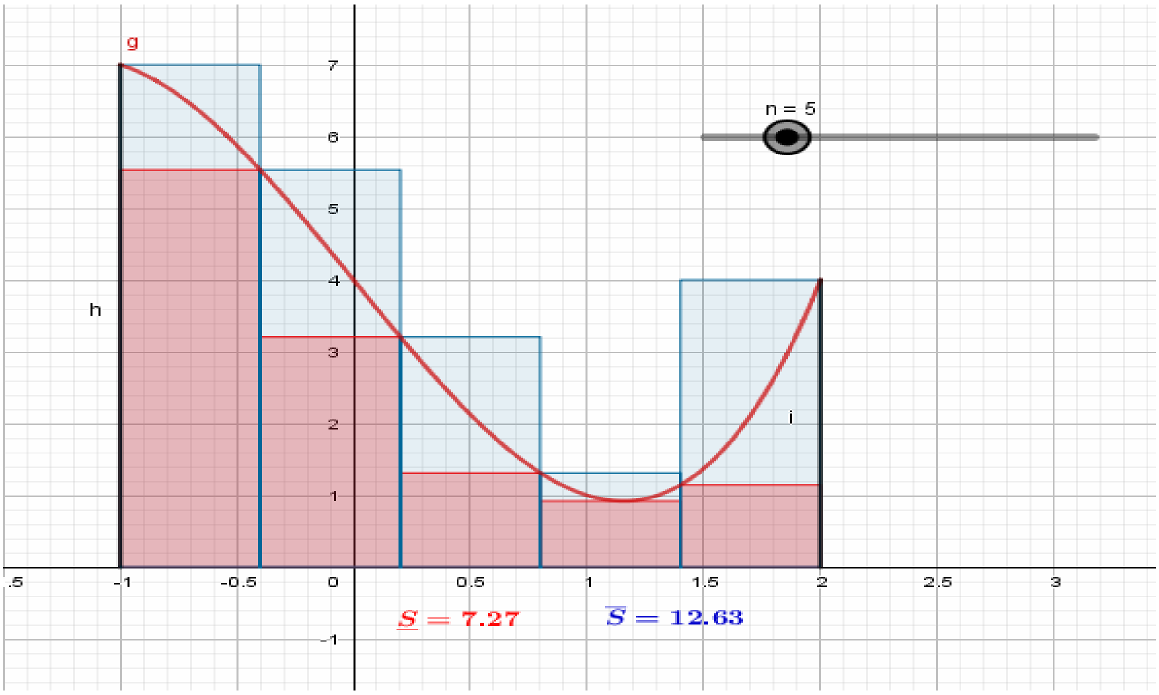

Figura 3

2. Si g: I= [a; b] ⟶ ℝ es una función acotada en I entonces

$$m(b-a) \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq M(b-a)$$

Donde m = inf $\{g(x), x \in I\ \}$ y $M = sup\{g(x), x \in I\}$

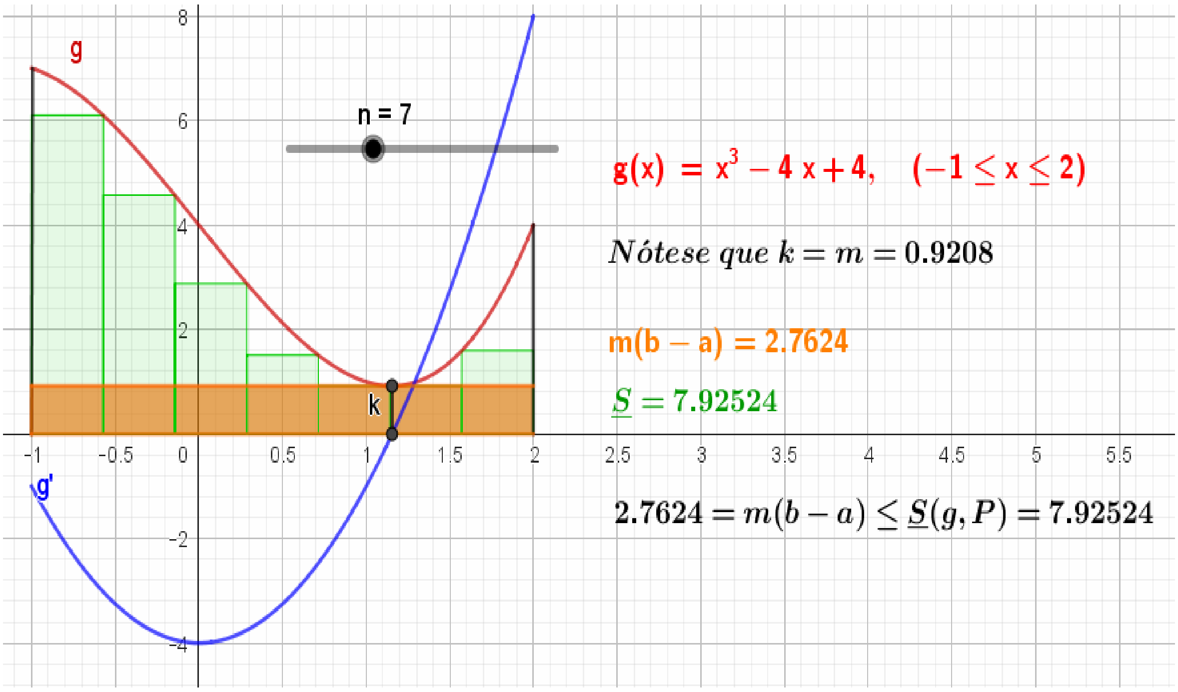

Figura 4

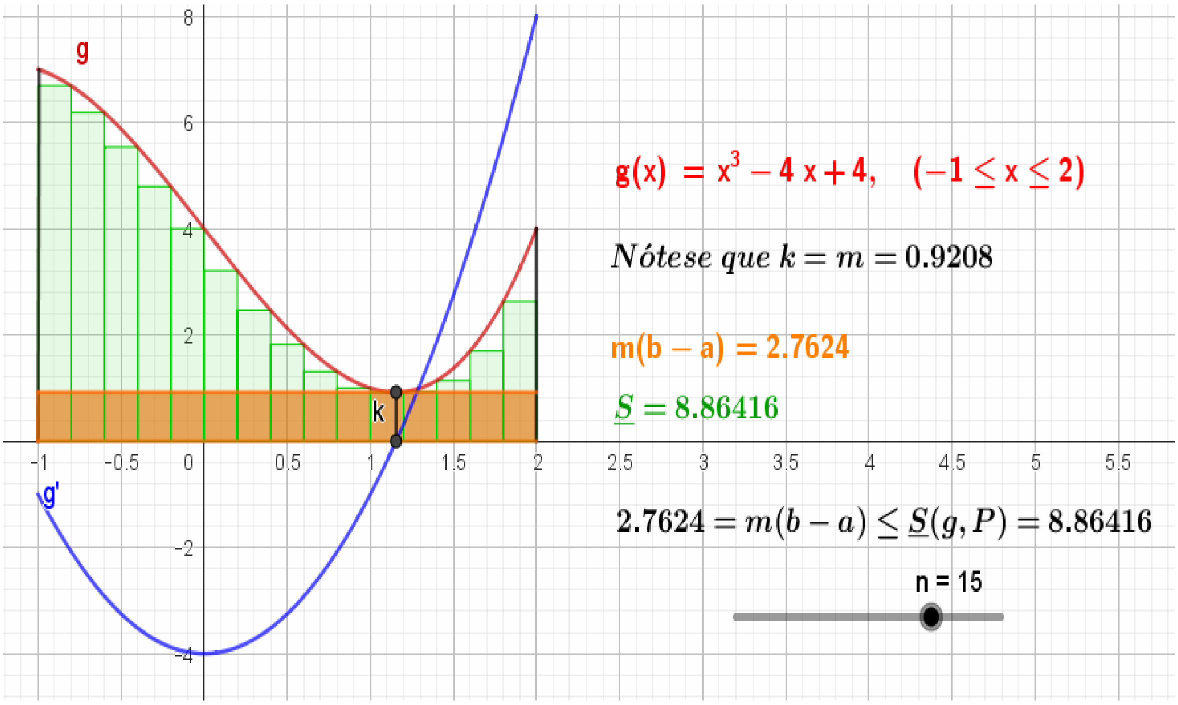

Figura 5

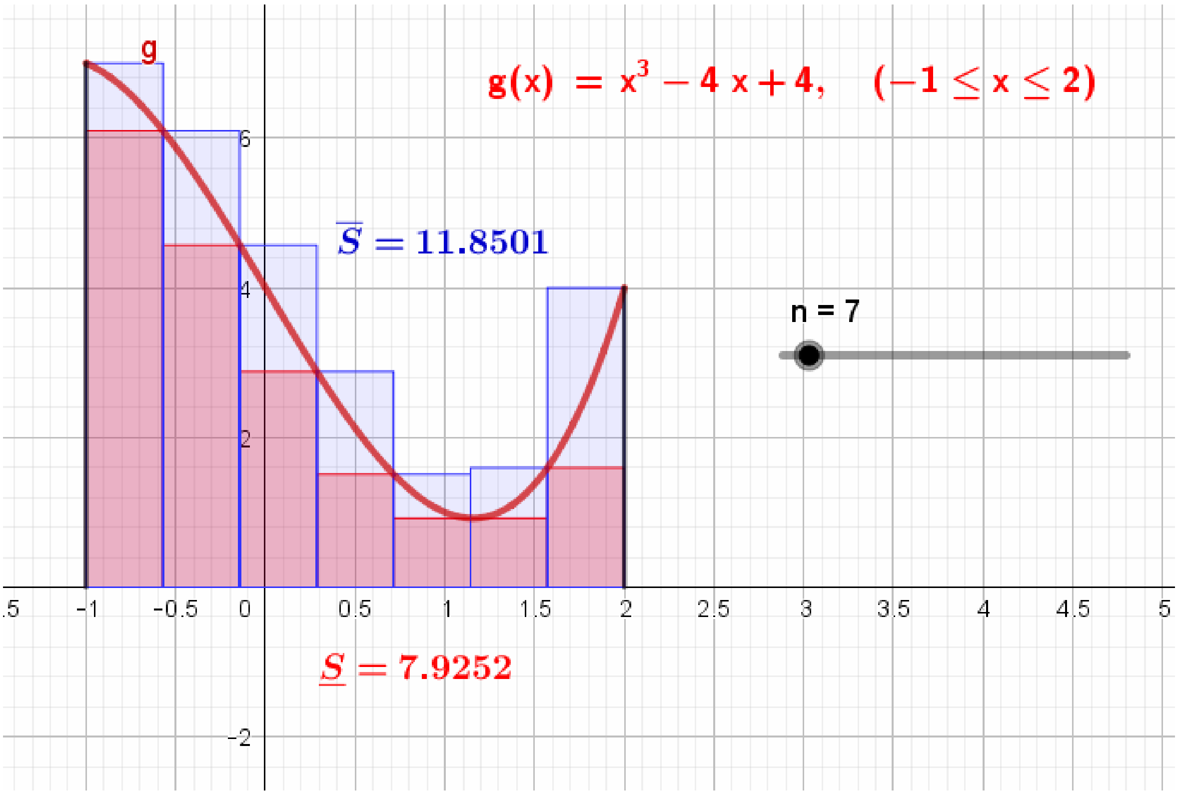

Figura 6

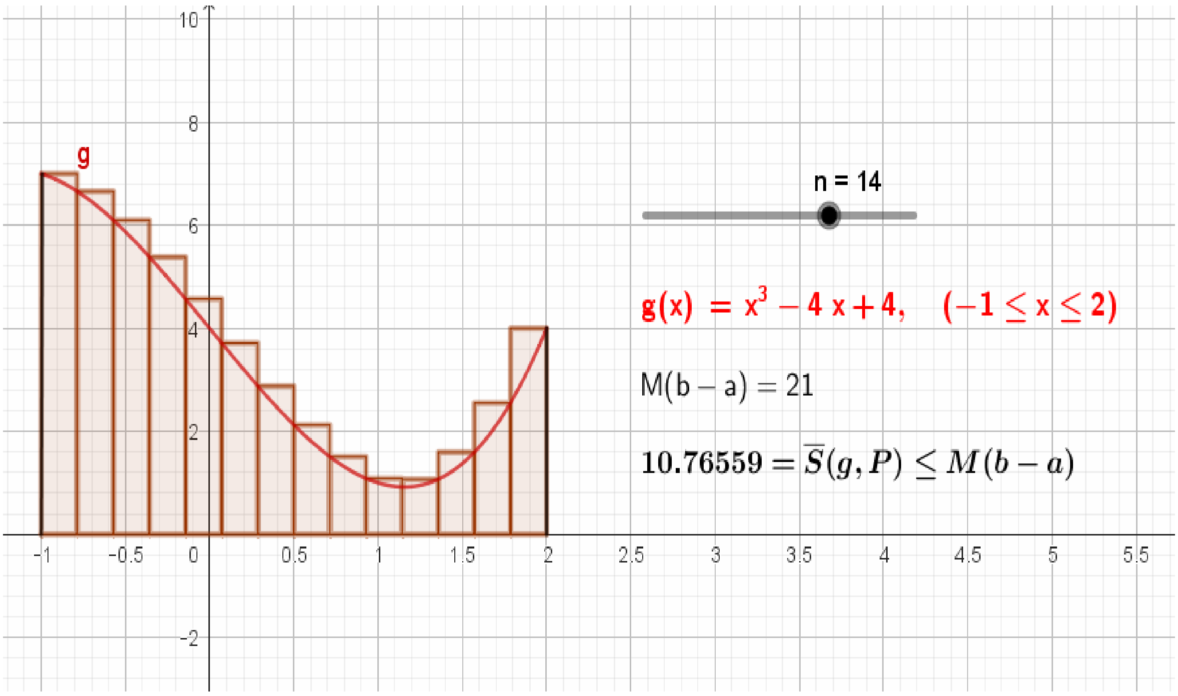

Figura 7

Conclusión:

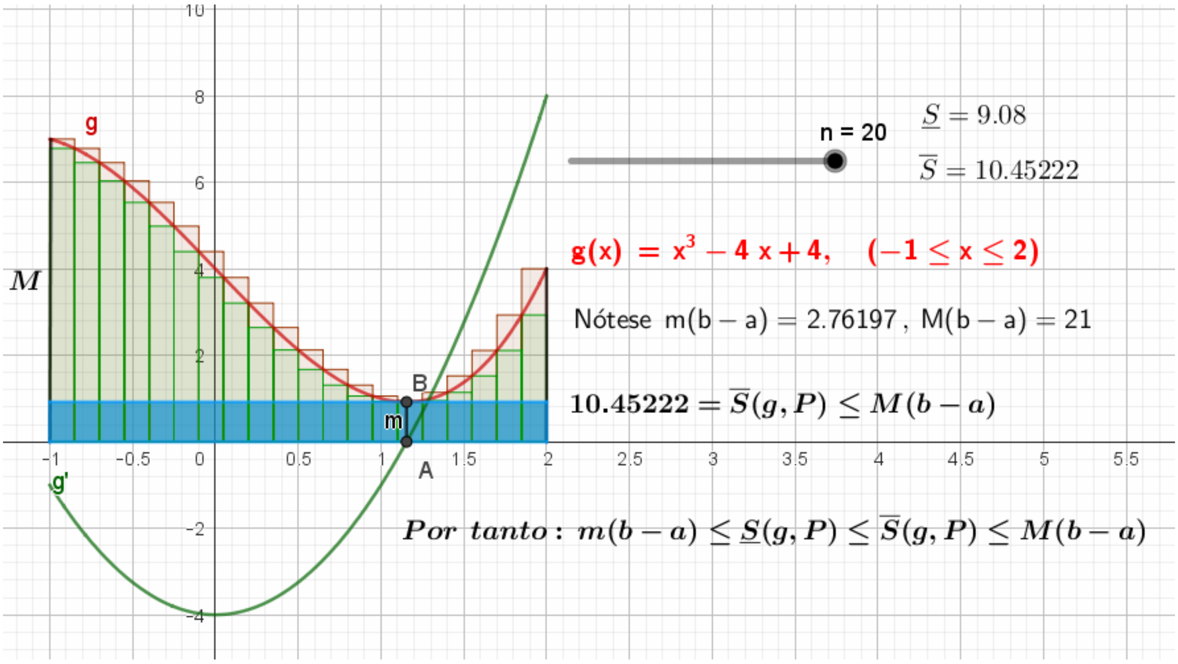

Figura 8

Entonces:

$$m(b-a) \le \underline{S} \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S} \le M(b-a)$$

Donde m = inf $\{ g(x), x \in I \}$ y $M = sup\{ g(x), x \in I \}$

Si g: I= [a; b] $\rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en I existen c_1 y c_2 $\in I$ tales que:

$\underline{J} = g(c_1)(b-a)$ y $\overline{J} = g(c_2)(b-a)$

De tal forma que se verifica: $m \le g(c_1) \le g(c_2) \le M$

3. Si g: I= [a; b] $\rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada en I y c $\in (a,b), se\ tiene$:

$$\int_a^{\bar{b}} g(x)dx = \int_a^{\bar{c}} g(x)dx + \int_c^{\bar{b}} g(x)dx$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} g(x)dx = \int_{\underline{a}}^{c} g(x)dx + \int_{\underline{c}}^{b} g(x)dx$$

Definición 03: Se dice que una función real de variable real f: I= [a; b] ⟶ ℝ, acotada en I, es "Integrable Riemann en I"; si verifica:

$$J = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\underline{b}} f(x)dx$$

"Por simplicidad, se llama integral de f sobre I o integral definida de f sobre I o integral de f de a hasta b" (Mitacc y Toro, 2015, p.116).

Interpretación geométrica de la integral definida de una función continua f en el intervalo [a; b]

1. En el caso en que $f(x) \geq 0$ en el intervalo [a; b]; $\int_a^b f(x)dx = A(R)$ donde $R = \{(x,y)/-1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ y A(R) representa numéricamente el área de la región R.

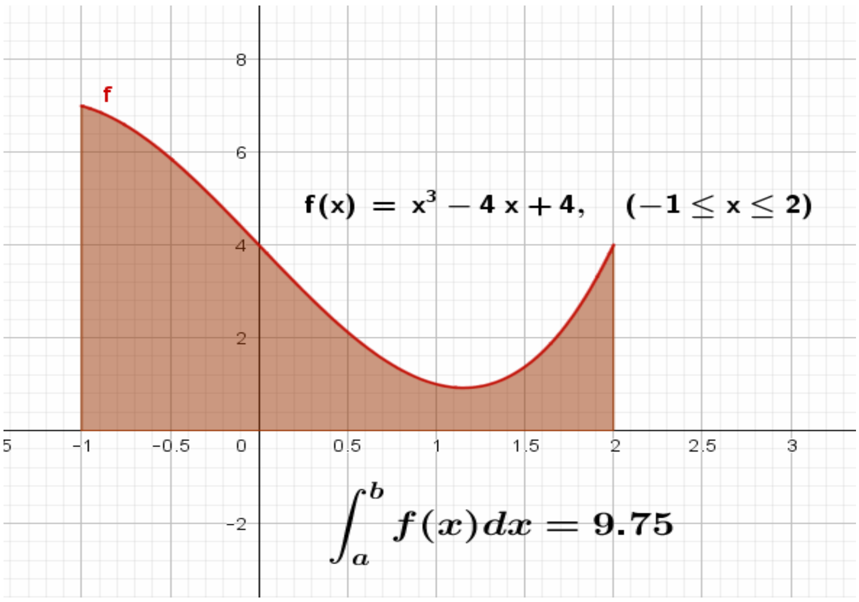

Figura 9

2. En el caso en que $f(x) \leq 0$ en el intervalo [a; b]; $\int_a^b f(x)dx = -A(R)$ donde $R = \{(x,y)/-1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ f(x) \leq y \leq 0\}$ y $A(R)$ es numéricamente, el área de la región R.

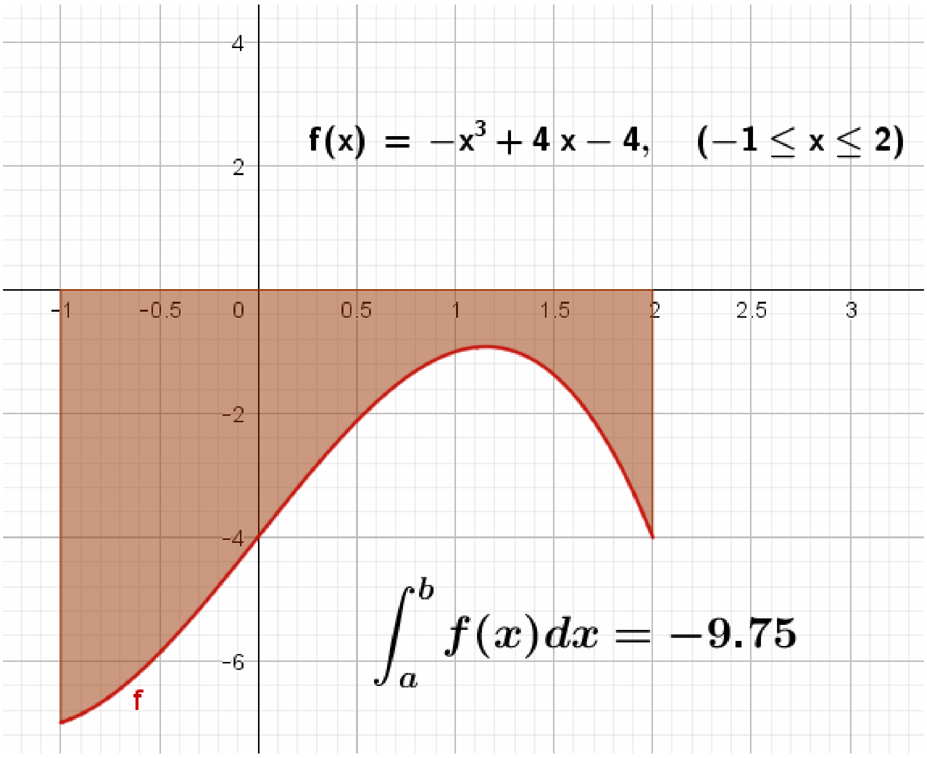

Figura 10

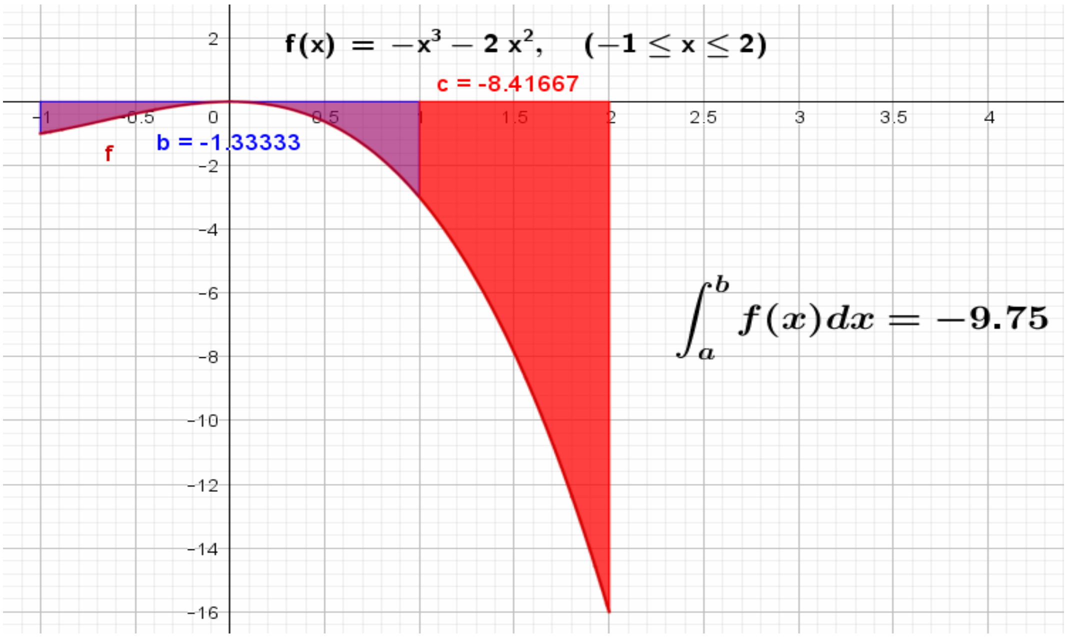

Figura 11

3. Obsérvese lo que sucede para una función arbitraria f: I= [a; b] → ℝ. Llamando a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ "área algebraica" de acuerdo con Mitacc y Toro (2015), esta integral represetaría la suma de las áreas algebraicas de todas las regiones comprendidas entre la gráfica de f y el eje x; desde a hasta b.

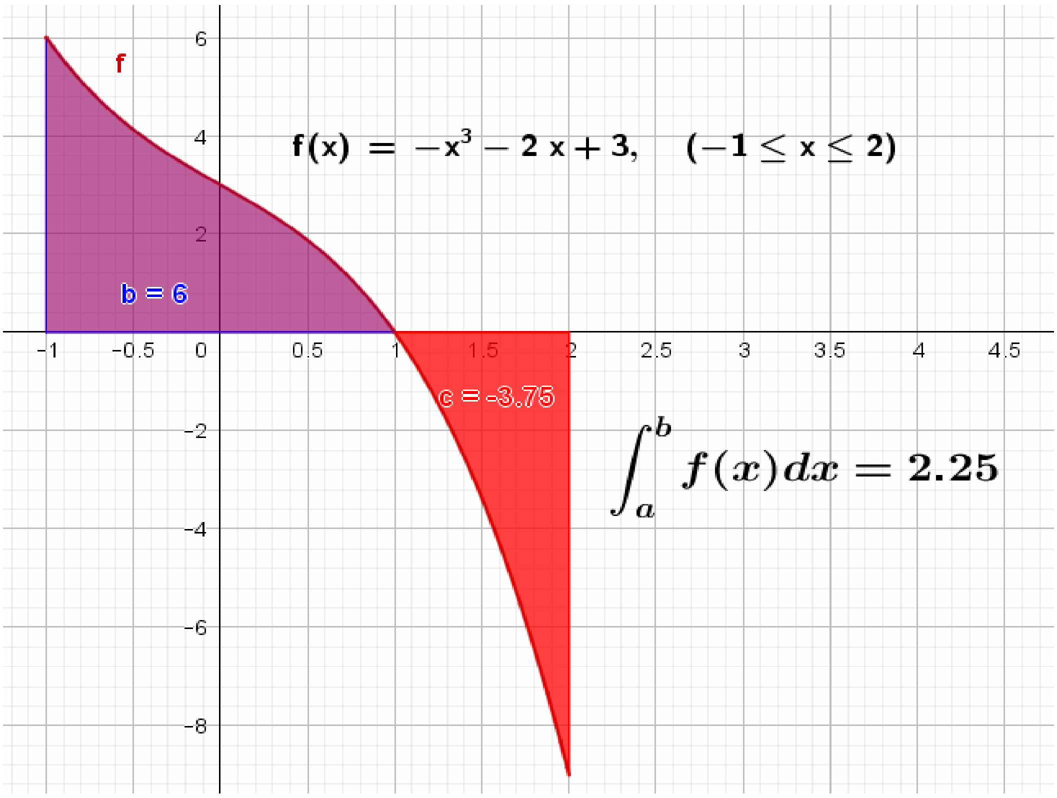

Figura 12

Teorema 01: Sea f: I = [a; b] ⟶ ℝ una función acotada. f es integrable en I = [a; b] si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de I tal que $\overline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) - \underline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) < \epsilon$. (Véase una demostración en Mitacc y Toro (2015), p.119)

Proposición 01: Si f: I = [a; b] ⟶ ℝ es continua en I, entonces f es integrable Riemann en I.

Demostración

Probaremos que si f: I = [a; b] ⟶ ℝ es continua en I, entonces es f es acotada.

Supongamos que dividimos el intervalo I en dos partes y asumamos que al menos f no es acotada en una de esas partes. Admitiendo sin pérdida de generalidad que esta parte (intervalo donde f no es acotada) tiene longitud igual a la mitad del intervalo original, es decir, $\frac{b-a}{2}$; continuemos dividiéndolo en dos partes iguales y escogiendo uno de ellos (aquel, donde f no es acotada) con longitud igual a la mitad del último intervalo; obtendremos de esta suerte; una sucesión de intervalos encajados de la forma $[a_n; b_n]$ cada uno con longitud: $\frac{b-a}{2^n}$. Tal que:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$$

Entonces el conjunto $A = \{a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots\}$ es acotado superiormente por "c" donde c = Sup A, con c ∈ I_n ; $\forall\, n \in N$. De este modo existe al menos un intervalo I_n donde pertenece c y en el que f no es acotada. Pero como f es continua en I particularmente lo es en el punto "c", luego para $\epsilon > 0$ dado existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$ es decir existe un intervalo de centro en "c" donde f es acotada a saber $]c - \delta; c + \delta[$ y en el cual se tiene: $-\epsilon + f(c) < f(x) < f(c) + \epsilon$

Este resultado contradice el hecho que todo entorno de "c" de la forma I_n sea un intervalo donde f no es acotada pues siendo c = Sup A siempre es posible encontrar un intervalo I_k al cual pertenece "c" tal que $I_k \subset\ ]c - \delta; c + \delta[$ y en el que f es continua y por tanto acotada, basta tomar k tal que $\frac{b-a}{2^{k+1}} < \delta$.

Se sigue, como consecuencia de esto, que f es acotada en I = [a; b].

i) De acuerdo con Lages (2005) el intervalo I = [a; b] es cerrado y acotado por tanto compacto, y siguiendo al mismo autor resulta que la función continua f: I = [a; b] → ℝ será uniformemente continua.

Entonces a partir de este resultado se tiene que para $\epsilon > 0$ dado, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

Definamos una partición P para I en la que los intervalos de dicha partición tengan la forma

$$[x_{k-1}; x_k] = \left[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}; a + \frac{k(b-a)}{n}\right]$$

Es claro que tendrán longitud $\frac{b-a}{n}$ número que particularmente podemos exigir, satisfaga la condición $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Al ser f continua en I, lo será en cada intervalo $[x_{k-1}; x_k]$ luego existen a_k , b_k en $[x_{k-1}; x_k]$ así como:

$m_k = Inf\{f(x)/x \in [x_{k-1}; x_k]\}$ y $M_k = Sup\{f(x)/x \in [x_{k-1}; x_k]\}$ tales que: $m_k = f(a_k)$ y $M_k = f(b_k)$

De esta forma $|b_k - a_k| < |x_k - x_{k-1}| < \frac{b-a}{n} < \delta$ y por tanto de la continuidad uniforme $|M_k - m_k| = |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

Finalmente

$$\overline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) - \underline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{M}_{\mathrm{k}}(\mathbf{X}_{\mathrm{k}} - \mathbf{X}_{\mathrm{k-1}}) - \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{m}_{\mathrm{k}}(\mathbf{X}_{\mathrm{k}} - \mathbf{X}_{\mathrm{k-1}})$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} (\mathbf{M}_{\mathrm{k}} - \mathbf{m}_{\mathrm{k}})(\mathbf{X}_{\mathrm{j}} - \mathbf{X}_{\mathrm{j-1}}) < \epsilon$$

Por lo tanto, de i) tenemos que la función continua es acotada y de ii) para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P de I tal que $\overline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) - \underline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{P}) < \epsilon$. Se sigue del teorema 01 que toda función continua f: I = [a; b] → ℝ es integrable Riemann en I.

Teorema 02: (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Dada una función continua en I, f: I = [a; b] → ℝ, entonces la función F: I = [a; b] → ℝ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in ? = [\text{ a; b}]$$

es derivable en $(a; b)$ y $F'(x) = f(x)$.

Teorema 03: (Segundo teorema fundamental del cálculo) Dada una función continua en I, f: I = [a; b] → ℝ tal que $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I.$ Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2.3 Definición de términos básicos

2.3.1 Geometría Dinámica: De acuerdo con Campistrous y López (2008) la geometría dinámica está referida a la posibilidad de mover las figuras geométricas, esto es, variarlas de modo que adquieran dinamismo.

2.3.2 GeoGebra: Según Hohenwarter y Preiner (2007) en relación con GeoGebra indican que: “Es un software de matemática dinámica para enseñar y aprender matemáticas desde la escuela intermedia hasta el nivel universitario. Es tan fácil de usar como Software de Geometría Dinámica, pero también proporciona características básicas de Sistema de Álgebra Computacional”.

2.3.3 Modelos Dinámicos: Se tomará como base la concepción de modelo dinámico que subyace en el trabajo de los investigadores Montero y Arrieta (2018) quienes implícitamente diseñan y construyen un Applet utilizando GeoGebra para realizar interpretaciones geométricas y establecer relaciones entre sus objetos de estudio.

2.3.4 Objetos matemáticos: Siguiendo a Moreno (2018) los objetos matemáticos son las cristalizaciones de acciones reflexivas que hacemos sobre el mundo material y solo es posible acceder a ellas a través de los sistemas de representación.

2.3.5 Applets de GeoGebra: De acuerdo con GeoGebra (2022) Son pequeños programas o aplicaciones que GeoGebra los integra dentro de una página web para dotarla de interactividad. Se crean por un Contribuidor en GeoGebra (persona que se ha registrado en https://www.geogebra.org/ y obtiene una cuenta), a partir de un archivo GeoGebra cuya extensión es. ggb. (párr. 4).

2.4 Hipótesis de investigación

Presentamos la hipótesis general y especificas siguientes

2.4.1 Hipótesis general

Utilizando Applets de GeoGebra, es posible construir modelos dinámicos que permitan describir, analizar y establecer conjeturas sobre objetos matemáticos relacionados con el teorema fundamental del cálculo; a partir de una función continua $f: I = [a. b] \to \mathbb{R}$, especifica.

2.4.2 Hipótesis específicas

1. Utilizando Applets de GeoGebra es posible diseñar y describir un modelo dinámico para una función continua especifica $f: I = [a. b] \to \mathbb{R}$, que permita visualizarla y recorrerla en todo su dominio

2. Utilizando Applets de GeoGebra es posible dinamizar, los principales objetos matemáticos que intervienen en la concepción del teorema fundamental el cálculo; dada una función continua específica.

3. Utilizando Applets de GeoGebra es posible diseñar y describir un modelo dinámico, que permita analizar y establecer conjeturas acerca del teorema fundamental del cálculo; a partir de una función continua específica.

2.5 Operacionalización de las variables

Variable 01: Applets de GeoGebra: De acuerdo con GeoGebra (2022) Son pequeños programas o aplicaciones que GeoGebra los integra dentro de una página web para dotarla de interactividad. Se crean por un Contribuidor en GeoGebra (persona que se ha registrado en https://www.geogebra.org/ y obtiene una cuenta), a partir de un archivo GeoGebra cuya extensión es. ggb. (párr. 4).

Variable 02: (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Dada una función continua en I, f: I = [a; b] → ℝ, entonces la función F: I = [a; b] → ℝ definida como

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, \forall x \in I = [\text{ a; b}]$$

es derivable en $(a;b)$ y $F^{´}(x) = f(x)$.

Observación:

Para la hipótesis general y las hipótesis específicas se hicieron uso de Applets construidos con GeoGebra que, por la naturaleza del software, se desarrollaron para una función específica; sin embargo, hay que señalar que estas hipótesis son válidas para toda función continua definida en un intervalo cerrado $I = [a.b]$.

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA

3.1 Diseño metodológico

La metodología que se utilizó es documental de alcance descriptivo, ya que se procedió a revisar diversas fuentes de información, y se describió un modelo dinámico que utiliza el software GeoGebra para el análisis y experimentación del teorema fundamental del Calculo con la finalidad de dar cumplimiento al objetivo general planteado. El diseño metodológico utilizado es cualitativo, pues no se hizo uso de análisis estadístico para la prueba de las hipótesis planteadas y al mismo tiempo se buscó establecer nuevas hipótesis.

3.1.1. Tipo de investigación

Esta investigación analizó información escrita sobre el teorema fundamental del cálculo en tal sentido se constituye como una investigación de tipo documental, al mismo tiempo es descriptiva porque presenta una interpretación dinámica del objeto de estudio haciendo uso del software GeoGebra y también se consideró de tipo explicativa porque da razones de cómo se presenta el teorema fundamental del cálculo al variar las hipótesis del mismo.

3.1.2 Nivel de Investigación

Este estudio se desarrolló en el nivel descriptivo explicativo.

3.1.3 Diseño

Este estudio respondió a un diseño de investigación cualitativo.

3.1.4. Enfoque

El presente estudio responde a un estudio bajo el enfoque cualitativo. La metodología que se ha utilizado es documental de alcance descriptivo, ya que se procedió a revisar diversas fuentes de información, y se describieron modelos dinámicos que utilizan el software GeoGebra para el análisis y experimentación del teorema fundamental del Cálculo con la finalidad de alcanzar el objetivo general planteado. El diseño metodológico que se consideró fue el cuantitativo, aunque no se hizo uso de análisis estadístico y si bien es cierto se han planteado hipótesis, también se ha llegado a establecer nuevas hipótesis; a través del análisis de conjeturas derivadas de la dinamización del objeto de estudio.

3.1.5. Estrategias o procedimientos de contratación de hipótesis

Para confirmar o refutar las hipótesis planteadas el investigador diseñó una secuencia de actividades a través de pequeños programas o aplicaciones que GeoGebra los integró dentro de una página web con el objetivo de dotarlos de interactividad.

Estos programas fueron creados por el investigador en la extensión. ggb. para lo cual es necesario estar registrado en la página web https://www.geogebra.org/.

Finalmente, el sustento matemático expresado en el formalismo de las demostraciones acompaña la creación de los Applets que buscan articular objetos matemáticos complejos tales como la derivada y la integral; precisamente a través del teorema fundamental del cálculo haciendo usos de la geometría dinámica.

3.2 Población y muestra

3.2.1 Población

Esta investigación tiene como ámbito de estudio el Cálculo diferencial e integral, el análisis matemático y el álgebra moderna.

3.2.2 Muestra

Se trabajaron modelos dinámicos diseñados y construidos con GeoGebra para funciones específicas, los mismos que por su característica dinámica le han permitido al investigador explorar relaciones entre los objetos matemáticos involucrados en el teorema fundamental del cálculo, anticipar comportamientos, validar y proponer conjeturas; acercándose a la demostración desde la óptica de la geometría dinámica.

3.3 Técnicas de recolección de datos

Se utilizó la técnica de recopilación documental y bibliográfica a través de la cual se identifica, obtiene y logra revisar y consultar bibliografía y materiales impresos o videos, útiles, con los cuales se alcanzaron los objetivos trazados en este estudio.

3.4 Técnicas para el procesamiento de la información

Por el alcance de la investigación y el diseño metodológico ya establecido, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación documental. por lo tanto, el procesamiento de la información bibliográfica recopilada pasa por los siguientes procesos: Clasificación, registro y codificación, así como la que se obtenga a través de GeoGebra será derivada de la experimentación dinámica.

CAPÍTULO IV
RESULTADOS

4.1 Análisis de resultados

A través de la presente investigación se lograron construir cuatro Applets orientados a dinamizar el proceso de demostración del primer y segundo teorema fundamental de cálculo.

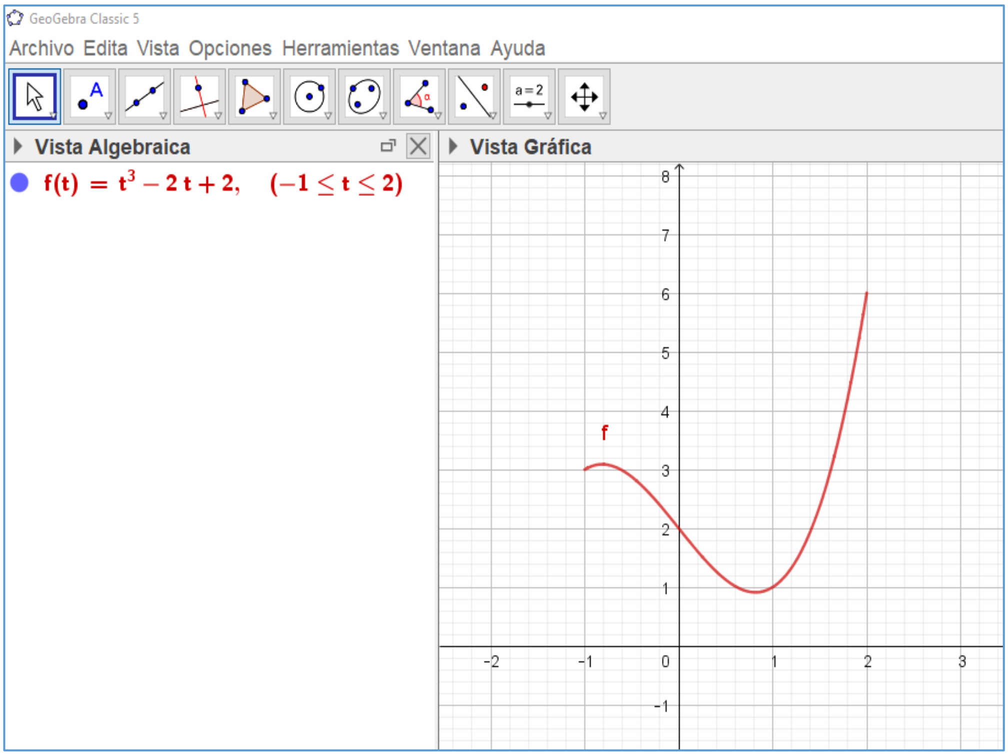

Figura 13

En el Applet de la figura 13 se construye una función continua y por tanto acotada $f: I = [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = t^3 - 2t + 2$. Luego se tiene la función $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ la cual, al variar x, proporciona el área de la región comprendida entre el límite inferior -1 y límite superior x; conforme se aprecia en la figura 14.

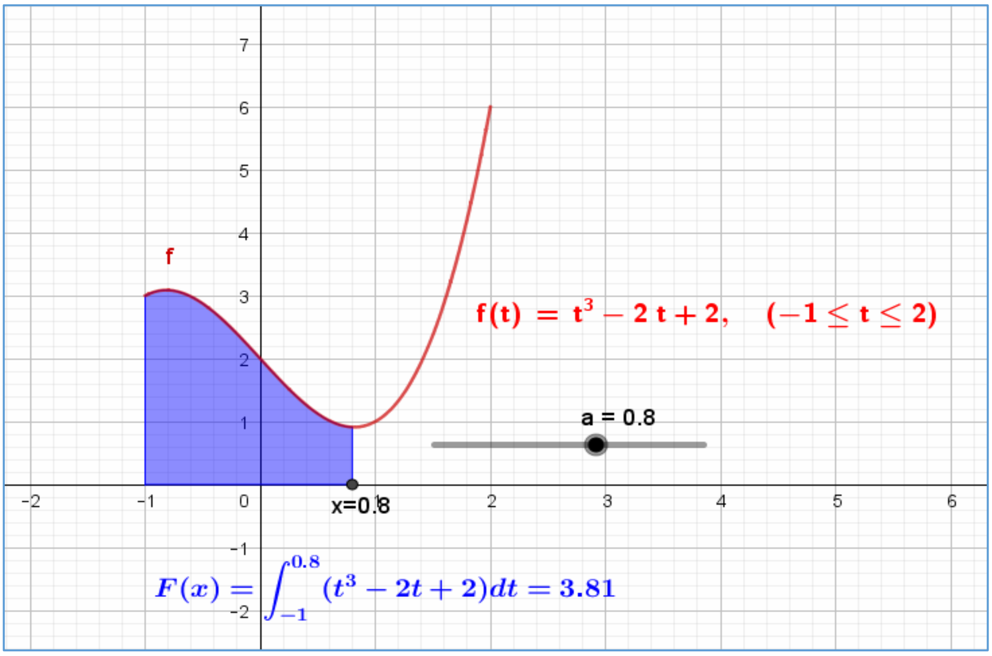

Figura 14

En la figura 15 nótese el cambio que sufre x en la función y por tanto la variación de la función F(x)

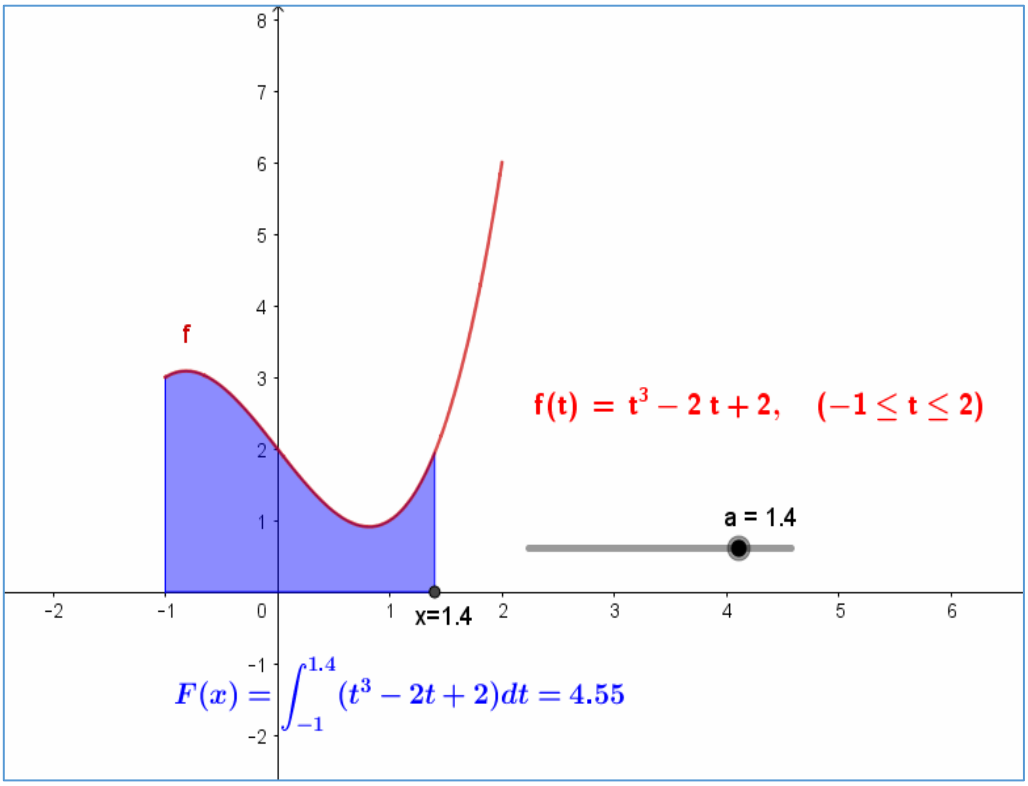

Figura 15

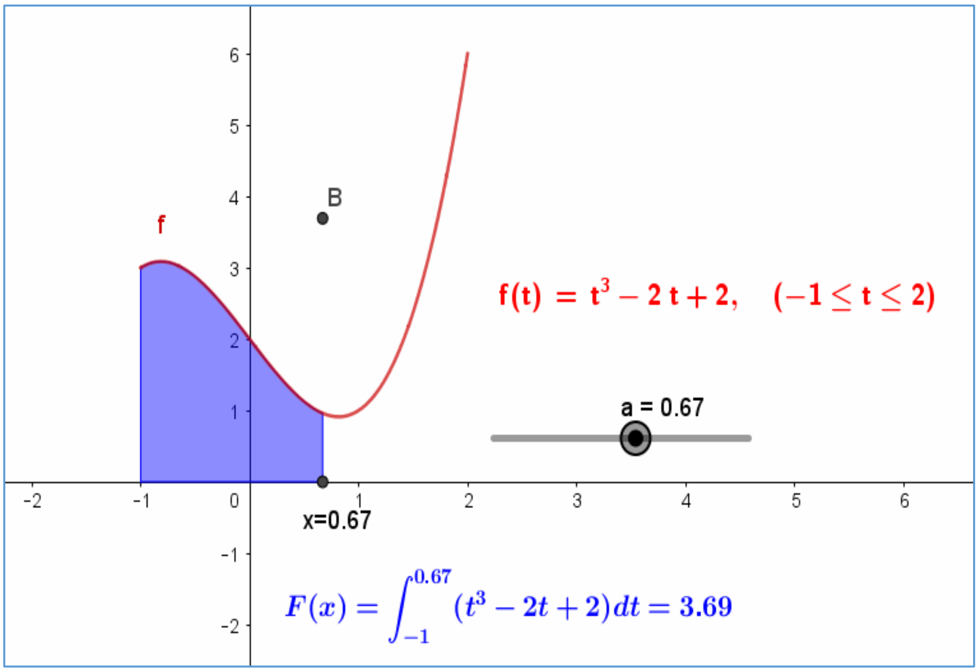

Figura 16

En la figura 16 se construye la gráfica de la función F a partir del par ordenado (a, F), nótese el punto B perteneciente a esta gráfica. Luego usando la herramienta “lugar geométrico” se construye la gráfica de la función F, conforme se muestra en la figura 17.

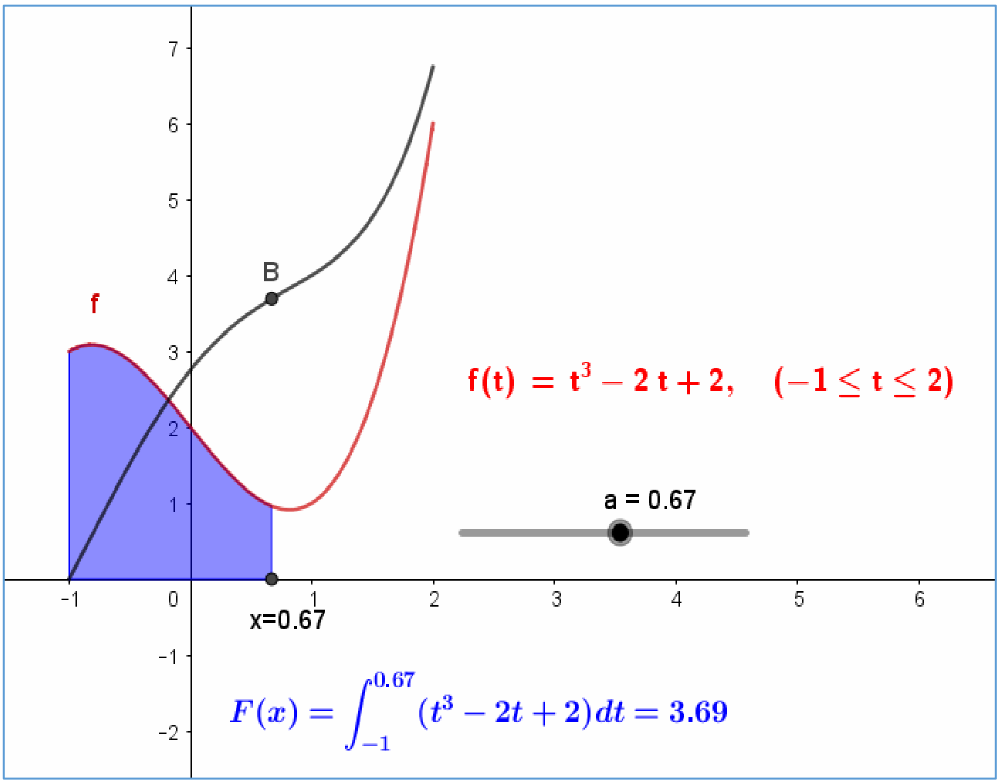

Figura 17

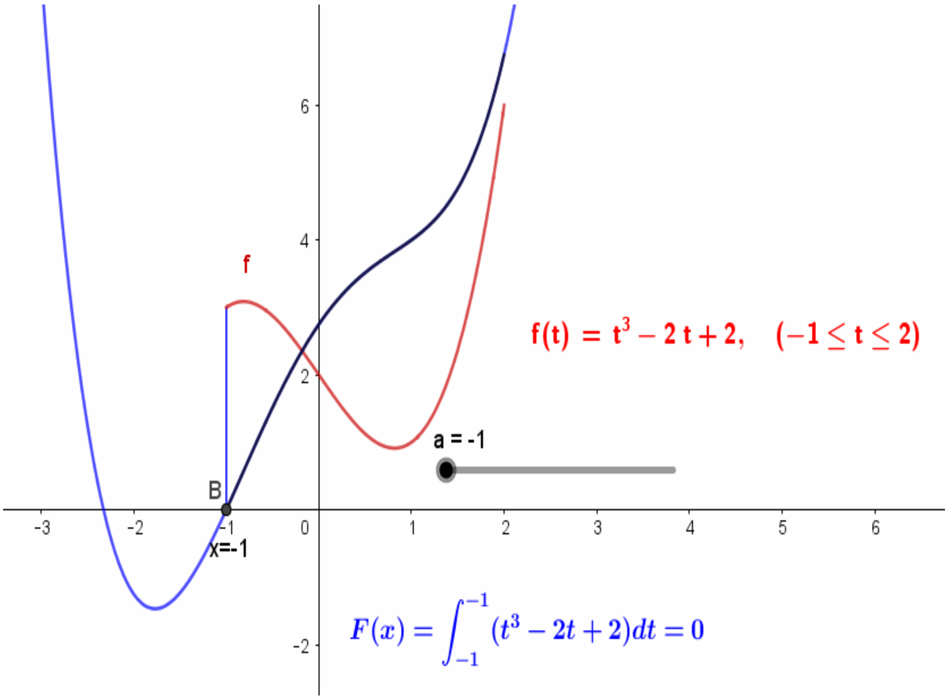

Figura 18

En la figura 18 se observa que la función F de color azul queda definida mediante

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x + \frac{11}{4}$$

Siendo x$\in [-1; 2]$. comprobándose lo que indica el Teorema 02 (Primer Teorema fundamental del cálculo) esto es: $F^{'}(x) = f(x)$.

También se construyen dos Applets con GeoGebra cuyo objetivo fue dinamizar la demostración de teorema de valor intermedio para integrales, construyendo en ambos casos una función continua en un intervalo cerrado demostrando de forma dinámica y experimental que siendo f continua en el intervalo $[a \ , b]$ entonces se puede encontrar un $c \in [a \ , b]$ con f (a) ≤ f (c) ≤ f (b).

4.2 Contrastación de hipótesis

1. Utilizando Applets de GeoGebra es posible diseñar y describir un modelo dinámico para una función continua especifica $f: I = [a. b] \to \mathbb{R}$, que permita visualizarla y recorrerla en todo su dominio

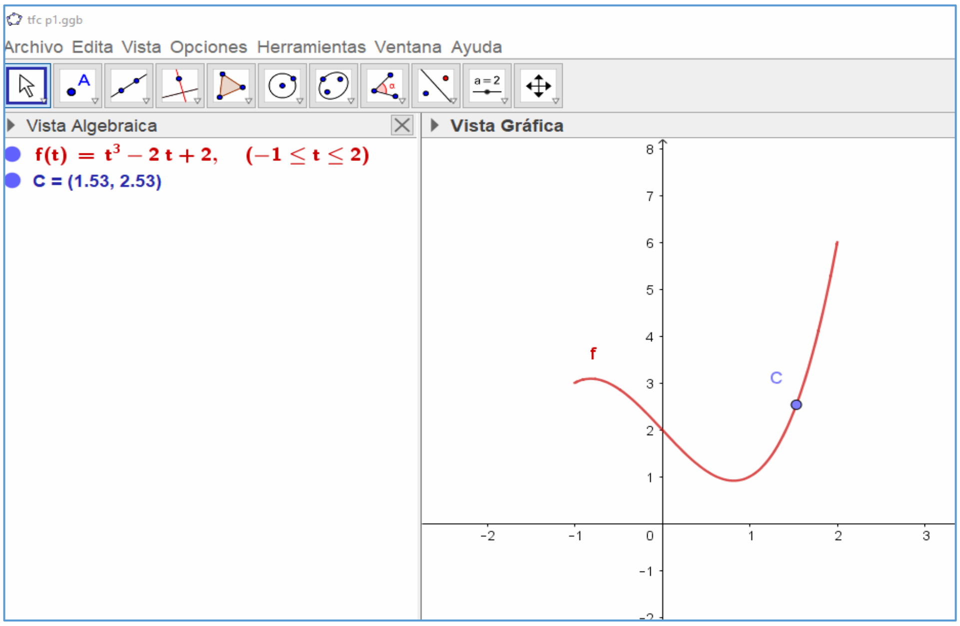

Figura 19

2. Utilizando Applets de GeoGebra es posible dinamizar, los principales objetos matemáticos que intervienen en la concepción del teorema fundamental el cálculo; dada una función continua específica.

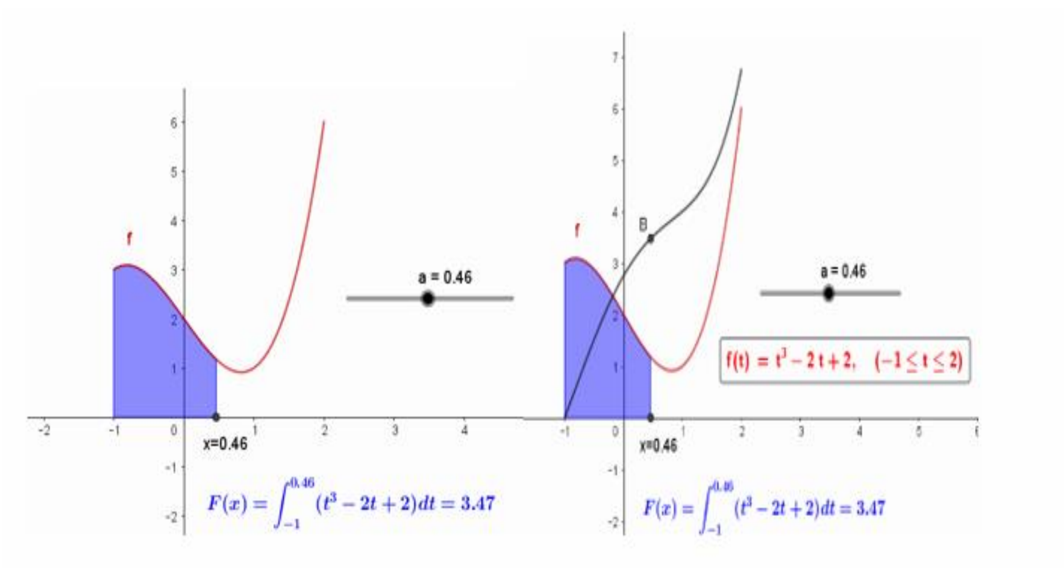

Figura 20

3. Utilizando Applets de GeoGebra es posible diseñar y describir un modelo dinámico, que permita analizar y establecer conjeturas acerca del teorema fundamental del cálculo; a partir de una función continua específica.

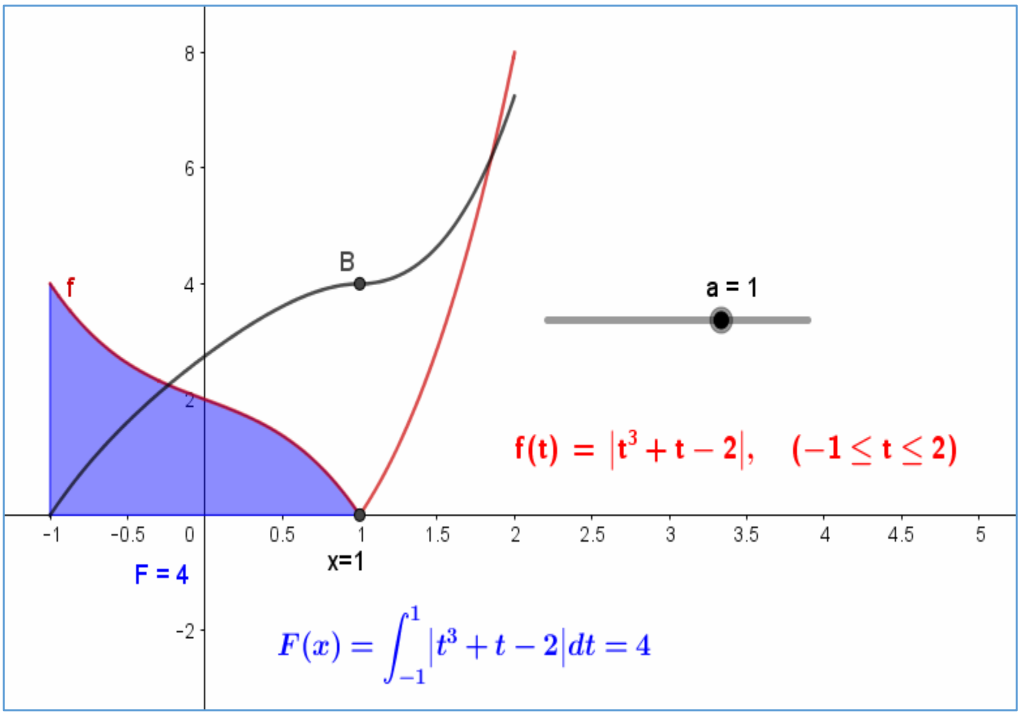

Figura 21

En la figura 21, se aprecia una función continua en cada punto del intervalo cerrado $I = [-1; 2]$ que no es, por cierto, derivable en el punto x=1. Sin embargo, se puede comprobar dinámicamente y también de modo analítico que F es continua y derivable en cada punto de I.

Por otro lado, a partir de la dinámica que proporciona los Applets para determinadas funciones por ejemplo para aquellas en las que f(x) es no negativa en todo I, se puede conjeturar que existe un punto $c \in I = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ donde $f\colon I = [a.b] \to \mathbb{R}$ es continua, tal que

$$F(c) = \int_{a}^{c} f(t)dt = f(c)$$

Sin embargo, esto también es posible de verificar para funciones f cuya gráfica corta al eje de las abscisas como en la figura 23. ¿Qué sucederá si se tiene una función f tal que $\mathrm{f}(x) \leq 0, \forall x \in I$? Por ejemplo, el caso mostrado en la siguiente gráfica:

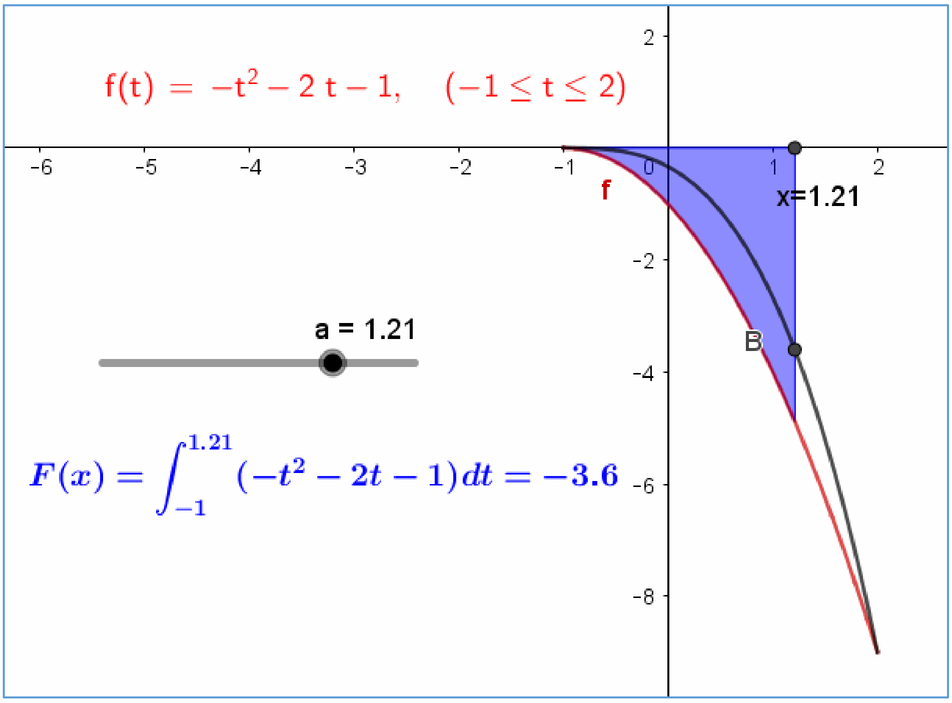

Figura 22

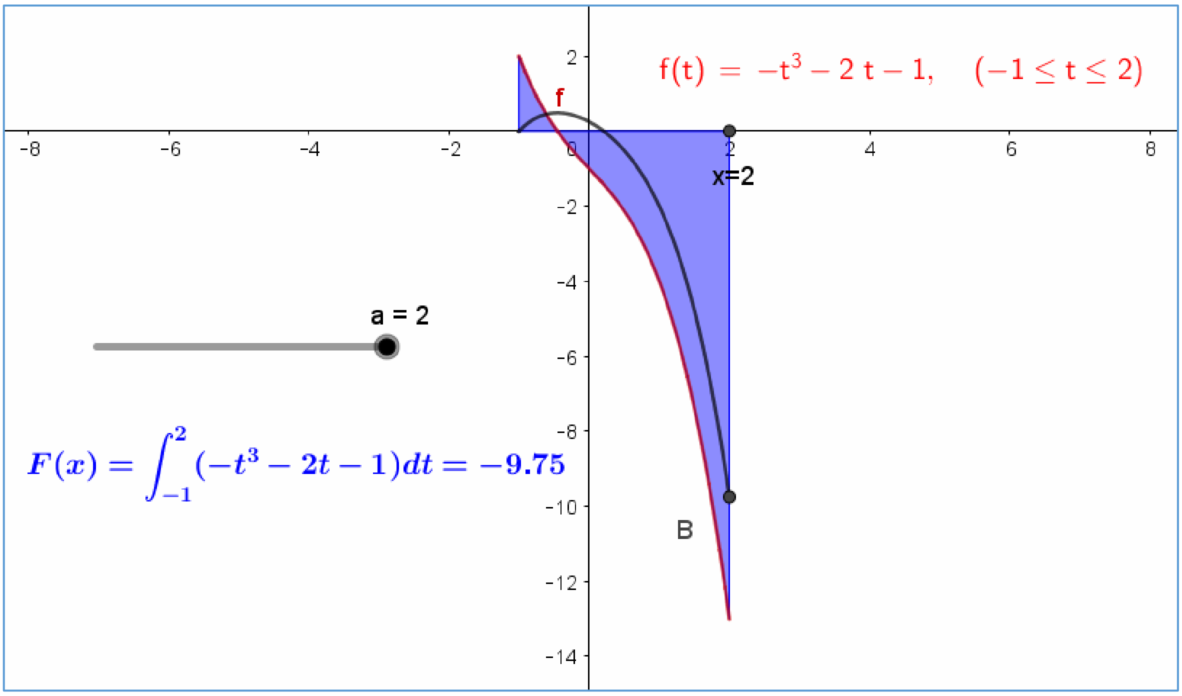

Figura 23

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN

5.1 Discusión de resultados

El problema tratado en esta investigación ha sido abordado utilizando funciones continúas construidas de forma específica mediante Applets con GeoGebra tomando si bien es cierto casos particulares, pero mostrando con cada una de ellas la posibilidad de acercarnos a demostrar y dinamizar las hipótesis y tesis del teorema fundamental del cálculo para cualquier función continua.

Como resultado de nuestra investigación para aplicar el teorema fundamental del cálculo haciendo uso de la geometría dinámica, se concluye que no se necesita de la derivabilidad total de una función continúa para garantizar su aplicación, como se puede apreciar en la figura 21.

Esto resultados coinciden con el trabajo de Esteban (2021). Titulado una versión fuerte del teorema fundamental de cálculo.

Finalmente, a partir de la dinámica de los Applets generados se plantea se puede conjeturar que existe un punto $c \in I = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ donde $f: I = [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, tal que

$$F(c) = \int_{a}^{c} f(t)dt = f(c)$$

CAPÍTULO VI
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

Es factible construir un modelo dinámico utilizando GeoGebra sobre objetos matemáticos relacionado con el teorema fundamental del cálculo a partir de una función continua $f: I = [a.b] \to \mathbb{R}$, especifica.

Se logró dinamizar utilizando GeoGebra, los principales objetos matemáticos que intervienen en la concepción del teorema fundamental el cálculo; dada una función continua específica.

El uso de la geometría dinámica en las demostraciones presentadas, ofrecen diversas posibilidades de utilización no solo en el campo de la didáctica como seria natural, sino también para proponer futuras actividades de exploración que conlleven al establecimiento de conjeturas e inducir propiedades en funciones que no necesariamente cumplan con las hipótesis involucradas en el teorema fundamental del cálculo. En este sentido se concluye de forma dinámica y experimental que para aplicar el teorema fundamental del cálculo no necesitaremos de la derivabilidad total de una función continua.

6.2 Recomendaciones

Se puede estudiar diversos casos del teorema fundamental del cálculo por ejemplo sería motivo de otra investigación estudiar funciones que solo sean continuas y con derivada lateral por la izquierda utilizando geometría dinámica.

Los resultados obtenidos en esta investigación, si bien es cierto se logran a partir de funciones específicas construidas por la misma naturaleza del programa, se extienden en general para cualquier función continua en un intervalo cerrado $I = [a.b]$.

REFERENCIAS

7.1 Fuentes documentales

Bunge, M. (1992). *La ciencia, su método y su filosofía* . Buenos Aires: Editorial Patria, S.A. de C.V.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*.

Mitacc, M., & Toro , L. (2015). *Tópicos de Cálculo Volumen 2.* Lima: Thales S.R.L.

Lages, E. (2005). *Análisis Real Vol. I.* Lima : Textos deL IMCA .

7.2 Fuentes bibliográficas

Esteban, S. A. (2021). Una versión fuerte del teorema fundamental del Cálculo. *(Tesis de Licenciatura).* Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima. Obtenido de https://hdl.handle.net/20.500.12672/17288

Monroy Mariño, Z. T., & Riveros Prieto, D. A. (2020). Actividades para Re-descubrir el Teorema Fundamental del Cálculo. *(Licenciatura en Matemáticas).* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Obtenido de http://repository.pedagogica.edu.co/

Oviedo Moreno, A. (2019). Modelo Físico del Teorema Fundamental del Cálculo. *(Tesis de Licenciatura).* Universidad Nacional Atónoma de México, México. Obtenido de http://132.248.52.100:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/17157

7.3 Fuentes hemerográficas

Betancur Jiménez, G. E. (2006). La ética y la moral: paradojas del ser humano. *Revista CES Psicología*, 109-121.

Campistrous, L. A., & López Fernández , J. (2008). La geometría dinámica . *Tesoro de las matemáticas* , 92.

Costa , V. A., & Sombra del Río, L. (2019). Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *BOLEMA*, 67-89.

Montero, J., & Arrieta, X. (2018). Modelo dinámico con el uso del GeoGebra para el estudio de las funciones secante y cosecante. *REDIELUZ*, 89-95.

7.4 Fuentes electrónicas

Casado, J. L. (30 de abril de 2022). *GeoGebra* . Obtenido de Ambassador: https://www.geogebra.org/u/jlmunoz

Moreno Armella, L. E. (06 de Septiembre de 2018). *La sustancia de los objetos matemáticos*. [Obtenido de Archivo de video]: Recuperado de https://youtu.be/AbifEcGwrrk