

**UNIVERSIDAD NACIONAL
JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN**



ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS

**MODELO MATEMÁTICO
PARA EL MONITOREO ACADÉMICO DE UN ALUMNO**

PRESENTADO POR:

Diana Hebelyn Mejía Gallardo

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICA APLICADA**

ASESOR:

Jorge Luis Rojas Paz

HUACHO - 2021

Dedicatoria

En primer lugar, a mis padres por brindarme su apoyo continuo e incondicional, por estar siempre presente apoyándome en todo momento; también a toda mi familia, sé que estarán muy orgullosos y felices desde donde estén porque este logro también es para ellos.

Diana Hebelyn Mejia Gallardo

Agradecimientos

A Dios por permitirme tener salud para poder realizar mis metas. A todos los integrantes de mi familia, por el apoyo en cada momento de mi vida y por aconsejarme siempre a seguir adelante. A mi asesor Mg. **Jorge Luis Rojas Paz**, por apoyarme en este proceso.

Resumen

Objetivo: Elaborar, un modelo algebraico para el monitoreo del aprendizaje de un estudiante durante el desarrollo de un curso.

Métodos: El tipo de investigación es básico, en la cual tiene como ámbito de estudio a la ciencia de la educación el análisis matemático y el álgebra moderna, específicamente, la gestión educativa, esta investigación tuvo como instrumento los libros de textos, artículos científicos, tesis alojadas en repositorios institucionales como el Renati- Sunedu y revistas especializadas del áreas de matemáticas, en la cual se mide el comportamiento del proceso relacional entre alumno-docente se puede entender como la creación de vínculos sociales dentro de un determinado espacio de conocimiento determinado por los objetivos del curso. **Resultados:** Se ha interpretado algunos elementos del currículum educativo con ayuda de argumentos axiomáticos.

Además, es claro que la formulación propuesta se sustenta en el empirismo y se ha utilizado el racionalismo matemático para extraer su contenido. **Conclusión:** El modelo matemático construido es una propuesta que toma en consideración la naturaleza continua de la variación de los logros de aprendizaje y explican los cambios continuos del estado de los saberes adquiridos.

Palabras clave: monitoreo del Aprendizaje, Gestión educativa, educación y aprendizaje

ÍNDICE

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Introducción	8
CAPÍTULO I	10
Planteamiento del problema	10
1.1 Descripción de la realidad problemática	10
1.2 Formulación del problema	12
1.2.1 Problema general	12
1.2.2 Problemas específicos	12
1.3 Objetivos de la investigación	12
1.3.1 Objetivo general	12
1.3.2 Objetivos específicos	12
1.4 Justificación de la investigación	13
1.5 Delimitaciones del estudio	14
1.6 Viabilidad del estudio	14
CAPÍTULO II	15
Marco teórico	15
2.1 Antecedentes de la investigación	15
2.1.1 Investigaciones internacionales	15
2.1.2 Investigaciones nacionales	16
2.2 Bases teóricas	16
2.2.1 Teorías del aprendizaje	17
2.2.1.1 Teoría sociocultural de Vigotsky	18
2.2.1.2 Aprendizaje significativo de Ausubel	18
2.2.1.3 La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner	19
2.2.1.4 La teoría de aprendizaje de Piaget	19
2.2.1.5 La teoría socio constructivista del aprendizaje	20
2.2.1.6 El conectivismo	20
2.2.1.7 La era del aprendizaje	21
2.2.2 Conocimiento	21

2.2.3	Generación Z	22
2.2.3.1	Los millennials en el Perú	22
2.2.4	Enfoque ecológico del desarrollo humano en el colegio	23
2.2.5	Concepción de la educación	24
2.2.6	La tecnología educativa a través del e- Learning y el Blended - Learning	26
2.2.7	Diseño instruccional	26
2.2.7.1	Modelo ADDIE	27
2.2.8	Concepto de Curriculum Educativo	29
2.3	Caracterización de la educación desde la teoría de la comunicación	29
2.3.1	La educación como sistema de comunicación	29
2.3.2	El profesor como transmisor	30
2.3.3	Intencionalidad de la comunicación	30
2.3.4	Caracterización de la señal	31
2.3.5	El alumno como receptor	31
2.3.6	Interpretación de la señal	32
2.3.7	Descripción de la enseñanza aprendizaje	32
2.3.8	Modelo relacional alumno docente	33
2.3.8.1	Elementos del modelo	33
2.4	Modelo matemático para el monitoreo académico	36
2.4.1	Modelamiento matemático para los logros del aprendizaje	37
2.4.2	Trayectoria del aprendizaje	41
2.4.3	Modelo matemático de la evaluación	46
2.4.3.1	Peculiaridades de la evaluación	46
2.4.3.2	Ajuste de una evaluación	49
2.4.3.3	Caracterización de los resultados de una evaluación	51
2.4.3.4	Tipos de evaluación	53
2.5	Definición de términos básicos	55
2.6	Hipótesis de investigación	61
2.6.1	Hipótesis general	61
2.6.2	Hipótesis específicas	61
2.7	Operacionalización de las variables	62
CAPÍTULO III		63
Metodología		63
3.1	Diseño metodológico	63
3.2	Población y muestra	64

3.3 Técnicas de recolección de datos	64
3.4 Técnicas para el procesamiento de la información	64
CAPÍTULO IV	65
Resultados	65
4.1 Analisis de resultados	65
CAPÍTULO V	66
Discusión	66
5.1 Discusión de resultados	66
CAPÍTULO VI	67
Conclusiones y recomendaciones	67
6.1 Algunas conclusiones	67
6.2 Recomendaciones	67
Referencias	69
5.1 Fuentes bibliográficas	69

Introducción

El presente trabajo de investigación ha logrado el desarrollo de las siguientes propuestas:

1. Explicar de manera clara y detallada la teoría general de sistemas.
2. Construir un modelo matemático cuyos elementos sean las relaciones producidas durante la experiencia enseñanza-aprendizaje.
3. Interpretar las acciones alumno-docente en una sesión de clase con ayuda de la teoría de redes sociales y el enfoque estructuralista de los ecosistemas sociales.

A continuación, se presenta la descripción del contenido por capítulos:

En el Capítulo 1 se presenta el planteamiento del problema que motivo esta tesis. En la sección 1, se describe el problema desde la óptica educativa. En la sección 2, se elabora la formulación del problema. En la sección 3, se plantea los objetivos de la investigación. En la sección 4, se justifica la propuesta planteada, sugiriendo un nuevo sistema interpretativo del problema planeado en la sección 2.

El Capítulo 2 muestra un marco teórico general dedicado exclusivamente a fundamentar la necesidad de nuestra investigación, señalando los antecedentes de esta. Además, se exhibe los fundamentos teóricos de nuestra propuesta.

El Capítulo 3 se propone el diseño metodológico de investigación, señalando puntualmente el tipo, el nivel y el diseño de nuestra

investigación. Así como la Población, muestra y operacionalización de variables.

El Capítulo 4 se expone los fundamentos científicos de la educación y se resalta las nuevas corrientes educativas en base al socio constructivismo y el colectivismo. También se señala el perfil y las necesidades de la generación Z.

El Capítulo 5 se presenta el modelo matemático para el monitoreo académico de un alumno. Finalmente, los Capítulos 8 y 9 señalan los resultados y las sugerencias de la propuesta.

CAPÍTULO I

Planteamiento del problema

1.1 Descripción de la realidad problemática

En el Perú, mediante la Ley Universitaria N° 30220, se creó la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU), como organismo técnico público especializado, adscrito al Ministerio de Educación, “cuya finalidad es promover el mejoramiento continuo de la calidad educativa de las instituciones universitarias” (SUNEDU, s/f.). En ese sentido, los márgenes de la exigencia de la calidad educativa se encuentran asociados a un gran número de cambios en la enseñanza.

Por tal razón, los objetivos formulados por la SUNEDU constituyen el eje sobre el que se sustenta el nuevo paradigma educativo en la educación superior peruana. En consecuencia, el panorama educativo exige la integración y formulación de modelos matemáticos y conceptuales, que muestren la integración e interacción entre las componentes de la gestión educativa, con la finalidad de proporcionar nuevos marcos interpretativos que permitan el tránsito natural de lo empírico a lo formal.

Toda comunidad educativa tiene como finalidad asegurar el desarrollo de competencias en sus estudiantes, para ello pretende afianzar la apropiación efectiva del conocimiento con ayuda de diversas técnicas de monitoreo y retroalimentación del proceso de aprendizaje. Por lo tanto; todo sistema de seguimiento y monitoreo sirve para direccionar la gestión del diseño instruccional con la finalidad de asegurar el logro de los objetivos del curso.

En tal sentido, el monitoreo del aprendizaje es un factor importante en la gestión educativa, pues incrementa las expectativas de los estudiantes y promueve la autoestima. Además, permite obtener a la

dirección académica información fundamental para hacer un seguimiento al nivel de aprendizaje de los estudiantes, lo que a su vez favorece la toma oportuna de decisiones en pos del mejoramiento continuo.

La UNESCO (2013) sostiene que:

"En muchos países existen deficiencias y grandes dificultades en la medición de los procesos evaluativos, factor que pone en riesgo la calidad educativa, la baja calidad influye considerablemente en la proyección a futuro de los jóvenes. " (p. 25-27)

En ese contexto, Murrillo y Román (2008) afirman que:

"En una sociedad cambiante globalizada es pertinente establecer una educación integral de calidad, con la capacidad de transformar aspectos políticos y culturales que permitan un beneficio colectivo, y su vez incrementar la equidad educativa. " (p. 1-5)

En consecuencia; las instituciones educativas requieren implementar políticas de gestión que permitan optimizar el seguimiento del aprendizaje de cada estudiante, pues, el siglo XXI se ha caracterizado por sus avances científicos y tecnológicos gracias al interés y el esfuerzo por mejorar los procesos y modelos educativos. Por tal razón, el uso de modelos matemáticos para abordar la complejidad del monitoreo del aprendizaje y así generar una sistematización del estudio de la práctica educativa sobre un marco teórico y filosófico general para obtener óptimos resultados cualitativos y cuantitativos.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema general

¿De qué forma, el monitoreo del aprendizaje de un alumno puede ser modelado con ayuda de las estructuras algebraicas?

1.2.2 Problemas específicos

1. Establecer un modelo matemático, para el estudiante.
2. Establecer un modelo matemático, para los objetivos de aprendizaje.
3. Establecer un modelo matemático, para la evaluación
4. Establecer un modelo matemático, para la trayectoria del aprendizaje.

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Elaborar, un modelo algebraico para el monitoreo del aprendizaje de un estudiante durante el desarrollo de un curso.

1.3.2 Objetivos específicos

Representar, simbolizar y explicar, con ayuda de las definiciones matemáticas, a los estudiantes, los objetivos de aprendizaje, la evaluación y la trayectoria del aprendizaje.

1.4 Justificación de la investigación

Esta tesis se justifica por las siguientes razones:

El desarrollo emergente de las Tecnológicas de la información ha provocado nuevas necesidades a la sociedad, en tal sentido; los nuevos métodos para la adquisición conocimientos han cambiado, tanto así que los avances en pedagogía han supuesto una revolución en la forma de entender el proceso educativo. Por lo tanto; el propósito de modelar el monitoreo del aprendizaje tiene por finalidad, generar oportunidades para reducir los graves perjuicios de una retroalimentación equivocada.

Por principio, todo modelo matemático es una herramienta de aproximación al objeto investigado mediante una organización jerárquica de conceptos, pues permite crear mecanismos de reflexión que regulan el grado de correspondencia entre el objeto y el modelo, en tal sentido; su elaboración e interpretación depende del marco teórico referencial elegido.

Generalmente un modelo expresa las relaciones entre variables con ayuda de esquemas conceptuales enmarcados por el vaivén entre la dimensionalidad descriptiva y empírica. Que en el caso particular de nuestra investigación es el monitoreo del aprendizaje.

Una ponderación fuerte que justifica el propósito de esta investigación es su contenido técnico, su originalidad y su alcance universal, cuya utilidad será la de proponer una nueva herramienta para el monitoreo del aprendizaje, tan necesario para la praxis educativa. Pues nos permite estructurar objetivar y elegir estrategias didácticas adecuadas para nuestra planificación educativa.

1.5 Delimitaciones del estudio

La propuesta de investigación se delimita dentro de los márgenes descritos por el diseño instruccional. Además, se encuentra sustentado por los siguientes principios matemáticos como son la teoría de conjuntos, relaciones y funciones, así como la teoría de aprendizaje, modelos de pedagogía. Por tal razón, el álgebra moderna y el análisis matemático han sido elegidos para enmarcar el desarrollo de esta propuesta.

1.6 Viabilidad del estudio

En el ámbito de la matemática y las matemáticas aplicadas de hoy en día, hay una aceptación cada vez mayor por la conceptualización de diversas teorías, debido a que ella nos permite realizar nuevas notaciones y generar un nuevo campo visual de análisis para unificar diversas construcciones mentales y así construir nuevo conocimiento y generar nuevas alternativas para la toma de decisiones.

CAPÍTULO II

Marco teórico

El desarrollo de esta propuesta se sustenta por diversas investigaciones, que han contribuido a la comprensión, concepción y el análisis conceptual del diseño de las políticas que rigen el proceso de enseñanza aprendizaje. Tal como se puede apreciar a continuación.

2.1 Antecedentes de la investigación

2.1.1 Investigaciones internacionales

Salas y Umaña (2010) investigaron el efecto del diseño instruccional basado en principios de gestión del conocimiento como instrumento mediador de un objeto de aprendizaje dentro de entornos virtuales, se consideró las implicaciones epistemológicas consideradas en el proceso de diseño y gestión de un curso.

En la Universidad Libre (Colombia), Bernal (2014), elaboró los lineamientos requeridos para el proceso de seguimiento y monitoreo académico para la educación básica regular. En esta investigación concluye que el seguimiento y monitoreo del aprendizaje debe ser interpretado como un proceso continuo, formativo, flexible e integral.

En la Universidad Complutense de Madrid (España), Pino (2013). Investigó mediante un análisis correlacional la necesidad de crear el Programa de Aprendizaje Servicio, sustentado en el seguimiento y monitoreo del aprendizaje. También argumenta la necesidad de políticas de gestión educativas acorde las características de los estudiantes.

2.1.2 Investigaciones nacionales

En la Universidad José Faustino Sánchez Carrión (Huacho), Solórzano (2021). Elaboró un modelo matemático del proceso enseñanza-aprendizaje, en su investigación manifiesta la posibilidad de argumentar en términos algebraicos algunos elementos de la experiencia educativa, enfatiza en la utilidad interpretativa de su propuesta y en sus posibles implicaciones para la mejora de la praxis docente.

En la Universidad San Martín de Porres (Lima), Novoa y Rodríguez (2015). Diseñaron un sistema web para el seguimiento y la evaluación de alumnos de la facultad de Ciencias Contables. Las conclusiones señalan que es necesario la abstracción de los elementos del sistema informático creado, en ese sentido, se sugiere crear modelos matemáticos para optimizar los algoritmos propuestos.

En la Universidad del Callao (Lima-Callao). Vidal (2019). Elaboró un modelo matemático para el liderazgo administrativo en función a la Topología, su propuesta se fundamenta en ciertos axiomas que explican el desempeño del administrador. El aporte de esta investigación estuvo centrado en el enfoque instrumental de la teoría de conjuntos y la teoría de la axiomática.

2.2 Bases teóricas

Con la finalidad de establecer un modelo matemático para el “monitoreo del aprendizaje” del estudiante es necesario un método para su construcción formal, el álgebra moderna y el análisis matemático, proporcionan instrumentos propicios para tal fin.

Respecto a los fundamentos concernientes a la teoría educativa, destacan la teoría del aprendizaje, el diseño instruccional y la teoría de la comunicación.

2.2.1 Teorías del aprendizaje

El aprendizaje bajo la óptica del conductismo se clasifica fundamentalmente en dos tipos:

1. "Condicionamiento clásico". Se refiere al aprendizaje condicionado y sustenta que este es el medio por el cual se efectúa un cambio en la conducta a través de la experiencia o la asociación de eventos o estímulos. La capacidad de aprender promueve la adaptación de todo individuo a cambios en su entorno y el reconocimiento de las señales del mundo externo.
2. "Condicionamiento operante". Propone, que el sujeto no aprende solo por medio de estímulos, sino que es necesario aplicar el uso de reforzadores positivos o negativos, con la finalidad de "persuadir" al individuo de dar continuidad a la conducta deseada.

El aprendizaje bajo la propuesta del cognitivismo se ocupa de la caja negra que media el estímulo y la respuesta (los procesos que el estudiante pone en marcha para aprender). Por lo tanto; el estudiante es un procesador activo mediador entre el estímulo y la respuesta, por esta razón el enfoque cognitivo, promueve el servicio a la persona que a los estímulos. En ese sentido el procesamiento de la información aparece como protagonista en esta propuesta. Entre las teorías cognitivas más representativas tenemos:

2.2.1.1 Teoría sociocultural de Vigotsky

En opinión de Fernández y García (2011):

"La teoría sociocultural de Vygotsky defiende que el desarrollo humano está sujeto a procesos históricos, culturales y sociales más que a procesos naturales o biológicos: el desarrollo psicológico del individuo es el resultado de su interacción constante con el contexto socio-histórico en el que vive." (p. 100-102)

El hecho de tener experiencias sociales diferentes no solo proporciona un conocimiento distinto, sino que estimula el desarrollo de diferentes tipos de procesos mentales. Por tanto, el aprendizaje es un proceso donde lo social y lo individual se interrelacionan: las personas construyen el conocimiento dentro del medio social en el que viven.

2.2.1.2 Aprendizaje significativo de Ausubel

Según Ausubel (1983), "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe." (p. 22)

En ese sentido, para el aprendizaje significativo los conceptos, proposiciones e ideas, pueden ser aprendidas, si es posible establecer relaciones con ideas, conceptos y proposiciones preexistentes en el individuo. Por lo tanto; los contenidos no están relacionados arbitrariamente ya que estos deben preexistir en la estructura cognitiva del estudiante. Lo que explica que hay correspondencia entre lo que sabe y debe aprender el individuo.

Novak, Ausubel y Hanesian (1983) explican que: "la esencia del aprendizaje significativo reside en el hecho de que las ideas están relacionadas simbólicamente y de manera no arbitraria (no al pie de la letra) con lo que el alumnado ya sabe."(p. 15-16)

En ese sentido, el aprendizaje significativo es un proceso de enseñanza personal y activa, siempre que el alumno participe en el cumplimiento de las actividades y tareas de aprendizaje.

2.2.1.3 La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner

Según Gardner (1995).

"La inteligencia no es un conjunto unitario de información que agrupe diferentes capacidades específicas, por el contrario, es una red de conjuntos autónomos relacionados entre sí."(p. 15)

En ese sentido; Gardner propone que el individuo necesita de más de un tipo de inteligencia para relacionarse con su entorno. Así pues, la inteligencia para Gardner es un potencial biosociológico de procesamiento de información que se puede activar en uno o más marcos culturales.

Por lo tanto; para Gardner (1995), "el colegio deberá ser el de desarrollar las inteligencias, y ayudar a la gente a alcanzar los fines vocacionales y acciones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias."(p. 17)

2.2.1.4 La teoría de aprendizaje de Piaget

Según Piaget (1973), el desarrollo mental es: "Un progresivo equilibrarse, un paso perpetuo de un estado menos equilibrado a un estado superior de equilibrio."(p. 25)

En ese sentido, Piaget sostiene que el individuo hace su propia construcción del conocimiento, ya que el aprendizaje es un proceso interno, que realiza a través de la interacción con su entorno.

Por lo tanto; para obtener aprendizaje, es necesario propiciar espacios, medios y recursos necesarios para que el alumno pueda interactuar sus esquemas mentales.

2.2.1.5 La teoría socio constructivista del aprendizaje

Según, Coll (2007).

"la construcción individual del conocimiento de los estudiantes está inmersa y es inseparable de la construcción colectiva que llevan a cabo profesores y estudiantes en un entorno específico culturalmente organizado que es el aula." (p. 11-13)

En ese sentido, Lamata y Domínguez (2013), afirman que:

"El aprendizaje es una construcción idiosincrásica: es decir, está condicionado por el conjunto de características sociales, físicas, culturales, incluso políticas y económicas del sujeto que aprende. Condicionamientos que también son válidos para el docente."(p. 22-23)

2.2.1.6 El conectivismo

La influencia de la tecnología se encuentra en todos los ámbitos, tales como: educación, salud y hogar. En ese sentido, para Siemens (2004):

"El conectivismo es una teoría del aprendizaje para la era digital, que toma como base el análisis de las limitaciones del cognitivismo, el conductismo y el constructivismo, para explicar el efecto que la tecnología ha tenido sobre la manera en que actualmente vivimos, nos comunicamos y aprendemos."(p. 19-20)

Por lo tanto; el Conectivismo define el aprendizaje como un proceso continuo en diferentes escenarios, incluyendo redes personales, comunidades de práctica y en el desempeño de tareas en el lugar de trabajo.

2.2.1.7 La era del aprendizaje

El trasfondo de las TIC referido al cambio en la forma de producción ha provocado una revolución social, pues hemos pasado a la era de la información cuyo eje fundamental es el aprendizaje y los conocimientos. En ese sentido, Andersen (1991) señala: "Lo que el futuro depara es cada vez más información, la nueva materia prima y el primer factor de producción. El éxito estará supeditado para aquellos que aprendan a gestionar la información en tiempo real." (p. 7-8)

Por lo tanto; la educación pasa por promover y crear entornos favorables de auto instrucción donde lo esencial no es consumir lo producido, sino redescubrirlo y reconstruirlo.

Así el aprendizaje ha salido de su capullo temporal y conservador, ha pasado a ser una actividad y una actitud continua durante toda la vida,

2.2.2 Conocimiento

Es evidente que los datos, las noticias y el conocimiento, son categorías distintas.

Por cuanto, un dato es un conjunto discreto de hechos objetivos sobre eventos. Es decir; un dato es una representación de hechos o conceptos, procesados para ser aptos para su comunicación o interpretación.

De otro lado, las noticias son el significado que se le atribuye a los datos a partir de las reglas ortodoxas y convencionales utilizadas para su representación.

Finalmente, el conocimiento es información estructurada y almacenada con la finalidad de ser constituido como una herramienta, para interpretar, responder y predecir el mundo que nos rodea. Por lo tanto; el aprendizaje de conocimientos puede interpretarse como un

proceso de integración de nueva información dentro de una estructura de conocimientos existente.

2.2.3 Generación Z

Según, Beldona, Nusair y Demicco (2015).

"La generación Z o millennials, está conformada por personas nacidas con la World Wide Web y presente en sus hogares."(p. 407)

Par los jóvenes de esta generación el aprendizaje está en gran medida condicionado por el fenómeno digital, en ese sentido, el árbol del conocimiento que se encuentra en la nube es jerárquica y ramificada. La biblioteca ya no es el paradigma de las fuentes de conocimiento, ahora lo es la red. Por esa razón, los miembros de la Generación Z tienen que construir su propio conocimiento a través de la captura, procesamiento y reflexión de la información que seleccionen, por ello, es necesario dotarles, de capacidades académicas, culturales y sociales que les permitan continuar ampliando su conocimiento, gracias a la creatividad que le otorga una mente adaptada al entorno digital. Si partimos del paradigma de un mundo hiperconectado, cada vez más global los miembros de la sociedad del futuro deben saber que tendrán que estar aprendiendo toda la vida. Pues, se están creando nuevas formas de socialización e incluso de percibir su identidad individual y colectiva.

2.2.3.1 Los millennials en el Perú

Según Datum internacional, en la edición 2020 de la Encuesta Millennial, 1 de cada 4 peruanos es millennials y sostienen que los valores de una marca que los lleva a adquirir un bien o servicio son: calidad, confiabilidad, innovación y popularidad. En el Perú, 7 millones 820 mil personas son millennials, es decir, 1 de cada 4 peruanos tiene entre 19 y 35 años. De ese total, el 33% no trabaja, el 51% trabaja y el 11% estudia y trabaja. En Perú el 19% de los millennials dice sentirse estresado, pero muy pocos a su vez,

manifiestan sentirse no estresados (9%). Esto significaría que muchos de ellos tienen un nivel intermedio de stress oculto. Con respecto a su situación económica y social se preocupan, según el siguiente orden: “su futuro, el de sus padres, de que algún familiar pueda fallecer y al final de sus finanzas personales”.

2.2.4 Enfoque ecológico del desarrollo humano en el colegio

El colegio, puede interpretarse como un microsistema organizado por entornos donde el orden jerárquico establece un juego de roles protagonizado por un organismo activo (alumno) y otras personas significativas de su ambiente (profesor) que brindan oportunidades y experiencias necesarias para el desarrollo cognitivo del alumno. Por lo tanto; el colegio está gobernado por diversos procesos de interconexión dinámica recíproca que fluctúan y regulan durante un horizonte histórico determinado.

En consecuencia, de estos planteamientos, puede derivarse la siguiente propuesta teórica:

1. El profesor debe evaluar su relación con sus alumnos en términos de comunicación, afecto, disciplina; con la finalidad de crear y fortalecer relaciones que considera débiles y así optimizar el vínculo con cada uno de sus alumnos.
2. El docente debe tener un rol de guía, maestro y director de un proyecto, cada alumno ante sí, debe ser visto como tal.
3. Cada alumno tiene sus propios estilos de aprendizaje, en ese sentido, existen procesos individuales en cada uno de ellos, que no son compartidos con el grupo.
4. En todas las diadas propuestas, se debe promover la comunicación permanente, clara y asertiva.

5. El docente debe conocer las características de la etapa de desarrollo: cognitivo, físico, moral, afectivo y social que vive su alumno.

6. El docente debe conocer las condiciones del microsistema familiar donde transcurre la vida de sus alumnos mediante sus vivencias en términos de interacción madre/hijo, ausencia - presencia del padre en el hogar; circunstancias de la relación marital de la madre, vínculo entre hermanos, condición laboral de los padres; entre otros.

2.2.5 Concepción de la educación

Definición 1 (Educación). La educación es una acción y un proceso intencional, continuo y sistemático de perfeccionamiento de la persona en cual quiera de sus dimensiones (física, intelectual, profesional, estética, ética, etc.).

El proceso de construcción de conocimiento reside en los intercambios que se producen entre docente y alumno en torno a los contenidos de aprendizaje. En esta relación, la docente presta ayuda a la actividad mental constructiva de los estudiantes, denominada influencia educativa; sin embargo, es solo una ayuda, porque el verdadero artífice del proceso de aprendizaje es el estudiante, pero es una ayuda necesaria producir a la aproximación deseada entre los significados que construye el estudiante y los significados que representan y vehiculan los contenidos.

El rol del profesor en este caso tiene una influencia educativa en conexión con las TIC; es decir, abarca aspectos pedagógicos, tecnológicos, didácticos, y comunicativos.

En ese sentido las TIC, se constituyen en herramientas mediadoras en la actividad conjunta profesor, estudiantes, contenido, en un contexto de actividad mental constructiva y de relaciones interpersonales.

Definición 2 (Creencias). Según, Savasci y Acikalin (2009), "las creencias se definen como teorías o sustentaciones que las personas generan para poder adaptarse al entorno, interpretar hechos, dar explicaciones a situaciones y guiar su comportamiento."(p. 121-123)

Por lo tanto; las creencias son componentes del conocimiento, poco elaborados y subjetivos, que no se fundamentan en la racionalidad, sino sobre los sentimientos y las experiencias, lo que los hace muy consistentes y duraderas en el tiempo.

En tal sentido, Gómez (2003), sustenta que:

"Las creencias constituyen un esquema conceptual que filtra las nuevas informaciones sobre la base de las procesadas anteriormente, cumpliendo la función de organizar la identidad social del individuo y permitiéndole realizar anticipaciones y juicios acerca de la realidad."(p. 229-230)

Definición 3 (Creencias docentes). Según Ferreyra (2009), "las creencias de los docentes son las posturas o posicionamientos que estos tienen respecto a su práctica educativa y los ayudan a controlar la incertidumbre y la ambigüedad que pueda presentarse en su práctica."(p. 141)

En tal sentido Blázquez y Tagle (2010) afirman que "las creencias docentes, actúan como filtros de la nueva información y usualmente operan a nivel tácito; son difíciles de articular y explorar."(p. 9-11)

Por lo tanto; con la finalidad de sustentar el sistema de creencias de los docentes se propone los siguientes axiomas.

Axioma 1. El conocimiento del docente está cerrado bajo la implicación, es decir; conoce las consecuencias lógicas de sus conocimientos.

Axioma 2. El docente conoce solo verdades.

Axioma 3. El docente es introspectivo, es decir, que puede acceder a su conocimiento base y saber qué es lo que conoce y lo que no.

Axioma 4. El docente no puede, mantener creencias contradictorias sobre un hecho.

Axioma 5. Si el docente sabe algo, entonces también lo cree.

Axioma 6. Si el docente cree algo, sabe que lo cree.

2.2.6 La tecnología educativa a través del e- Learning y el Blended - Learning

El aprendizaje en red o e-learning, de acuerdo con Bartolomé (2004) "es aquella formación a distancia reforzada por las TIC, donde el internet es el medio transmisor mientras que el blended-learning es aquella modalidad educativa que combina la educación presencial con la no presencial. Estas modalidades educativas tienen semejanzas, como el medio de trasmisión y la autonomía del estudiante en su proceso de aprendizaje. " (p.123-125)

El e-learning es una nueva forma de enseñanza que posibilita el aprendizaje, a través del trabajo individual y colaborativo, permitiendo además mayor cobertura al no requerir espacio físico para recibir estudiantes. Mientras que el blended-learning permite que el docente se apoye en recursos digitales para realizar la transmisión de la experiencia enseñanza-aprendizaje.

2.2.7 Diseño instruccional

El diseño instruccional es un proceso que articula la acción al currículum; propone el clima para el ambiente de la experiencia educativa, así mismo define los recursos de información y comunicación del proceso de enseñanza aprendizaje, ofrece a los docentes recursos didácticos asistido de estrategias cognoscitivas con el uso de las tecnologías de la información. Por lo tanto; es un proceso sistemático que traduce los principios de aprendizaje e

instrucción, centrada en la planeación estratégica para crear actividades con el propósito de mejorar la calidad educativa.

Actualmente el diseño instruccional se sustenta por las siguientes teorías del aprendizaje, el constructivismo y el conectivismo. Pues utiliza sus argumentos para el diseño de diversas situaciones de aprendizaje. En ese sentido, define un método de instrucción que se desglosa en objetivos, estrategias de enseñanza, secuenciación de actividades y evaluación.

El proceso instruccional es operativo y presenta en dos momentos: en el primer momento, se refiere a la planeación del que, cómo y para que aprender; el segundo momento está dedicado al desarrollo, atiende al proceso de implementación, evaluación y mantenimiento de la planeación. En ese sentido, Velarde et al., (2017) señala que: "El diseño instruccional tiene pasos a seguir, planificar y ordenar, fundamentado en las teorías del aprendizaje."(p. 76)

2.2.7.1 Modelo ADDIE

Según Yukavetsky, (2003): "El nombre resulta de las siglas de las palabras Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación, Evaluación. Es un modelo utilizado comúnmente en el diseño de la instrucción tradicional, pero mayormente en el medio electrónico, donde se ha demostrado ser efectivo."(p. 46)

El mismo autor enumera las siguientes fases:

Análisis: determina, la característica de la audiencia, lo que se necesita aprender, los recursos a utilizar, presupuesto, y actividades que se llevarán a cabo.

Diseño: permite seleccionar el ambiente de aprendizaje, definir objetivos o competencias, bosquejo de unidades, y selección de estrategias pedagógicas.

Desarrollo: permite crear el medio requerido, se hace uso de formatos variados, creatividad, innovación y exploración, para que el estudiante tenga una experiencia de aprendizaje agradable y funcional.

Implementación: permite distribuir los materiales educativos, se asegura la usabilidad y se resuelven problemas técnicos o de otra índole que se relacione al curso.

Evaluación: permite el desarrollo de la evaluación formativa y sumativa para emitir juicio sobre la efectividad de la instrucción a través de rubricas diseñadas para el curso.

ADDIE adopta el paradigma del procesamiento de la información y la teoría general de sistemas. El diseño de sistemas de instrucción permite platicar los aprendizajes situados, es decir, considerar los factores que condicionan de alguna forma el proceso de enseñanza-aprendizaje. En ese sentido, según Maribe (2009) señala que:

"A través de la Teoría General de Sistemas, el modelo ADDIE facilita la planificación sistemática en términos de la diversidad humana y en términos de las variables del plan de estudios en particular, donde el éxito se mide en términos de logros de aprendizaje. " (p. 12)

Cabe señalar que el diseño instruccional está ligado al ámbito de la tecnología educativa, por esa razón dan pie a proyectos enfocados al aprendizaje mediado por Tecnologías de la Información y la comunicación.

Por tal motivo, Chiappe (2008) comenta:

"El diseño instruccional tiene por objetivo orientar el diseño y presentación de contenidos educativos y sus correspondientes actividades de aprendizaje y evaluación algunos se orientan a la tecnología educativa y otros hacia los conceptos de diseño de aprendizaje o teorías pedagógicas."(p. 114)

2.2.8 Concepto de Curriculum Educativo

La planificación educativa se refleja en un documento denominado currículum educativo el cual responde a las preguntas: que enseñar, cómo y porque enseñar. Depende del modelo de conocimiento y el rol asignado al estudiante y al docente en el proceso educativo; en ese sentido es preciso definir nuestro concepto de currículum educativo.

Definición (Currículum educativo). Es el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo.

2.3 Caracterización de la educación desde la teoría de la comunicación

En esta sección se propone un modelo algebraico de comunicación entre el alumno y el profesor basado en el concepto de red social, para ello se tiene en cuenta la particularidad de la experiencia educativa.

2.3.1 La educación como sistema de comunicación

Con la finalidad de describir la práctica educativa es importante mencionar puntualmente los siguientes elementos:

- a) La intencionalidad del proceso de comunicación (objetivos del curso).
- b) La forma de caracterizar la señal a transmitir (relación entre unidades didácticas, acciones docentes y objetivos).
- c) Las funciones del transmisor (profesor) y receptor (alumno).
- d) Los distintos tipos de ruido que pueden afectar al proceso (problemas educativos).
- e) Los procesos de codificación (diseño y secuenciación de las unidades didácticas y acciones docentes) y decodificación (asimilación del mensaje por parte del alumno) de dicha señal.
- f) Los resultados de la comunicación (efectividad del curso).

2.3.2 El profesor como transmisor

Las funciones de un transmisor son: "adaptar la señal al medio, realizar una utilización eficiente de los canales de comunicación y proteger la transmisión frente a perturbaciones. "

2.3.3 Intencionalidad de la comunicación

El profesor define la intencionalidad del proceso educativo mediante los objetivos del curso. La definición de los objetivos incluye no solo su enumeración sino también la asignación de un peso relativo que tenga en cuenta la importancia de cada objetivo en el contexto general del curso y su dificultad. Los objetivos constituyen la base de un espacio matemático que se definirá posteriormente para representar la evolución del estado del alumno.

2.3.4 Caracterización de la señal

Para lograr los objetivos de la comunicación el docente envía una señal al alumno.

La dependencia temporal se traduce en una secuenciación de la información a transmitir en piezas más pequeñas que denominaremos unidades didácticas.

La dependencia con los objetivos del curso se establece indicando en qué medida cada unidad didáctica contribuye a la realización de cada uno de los objetivos.

Por lo tanto; caracterizar la señal, es adaptar la señal al medio, proteger la transmisión de perturbaciones y utilizar eficazmente los canales de comunicación. La codificación en el proceso educativo consiste en seleccionar una forma de presentar y expresar los contenidos al alumno. Puede ser única si presentamos el mismo contenido de la misma forma a todos los alumnos.

Definición 1 (Codificación semántica del profesor). Es el proceso mediante el cual el profesor con ayuda de su sistema de creencias, estrategias didácticas, estilos de enseñanza y su conocimiento de las TIC decide la estructura y presentación de los contenidos.

Definición 2 (Codificación técnica del profesor). Es el proceso mediante el cual el profesor decide los aspectos técnicos sobre el cual se realizará la presentación de las unidades didácticas para hacerlos más accesibles para el alumno.

2.3.5 El alumno como receptor

El alumno actúa como receptor de la comunicación ya que recibe los contenidos del curso y los interpreta. En ese sentido; es necesario

añadir al modelo de receptor los aspectos pedagógicos y cognitivos que afectan a su funcionalidad como su capacidad de aprendizaje o los problemas asociados a la interpretación y asimilación de la información (decodificación técnica y decodificación basada en el estudiante).

2.3.6 Interpretación de la señal

La recepción de la señal en el proceso educativo es un proceso que implica la interpretación y asimilación de la información que contiene. En ese sentido, es posible distinguir dos tipos de decodificación que denominaremos decodificación semántica y decodificación técnica.

Definición 1 (Decodificación semántica). Es el proceso mediante el cual el alumno interpreta y procesa mentalmente la información recibida.

Definición 2 (Decodificación técnica). Es un proceso mediante el cual el alumno percibe e interpreta a través de sus sentidos la señal recibida.

La decodificación técnica no hace referencia al procesamiento intelectual de la información. Está relacionada únicamente con la forma en que el estudiante recibe físicamente los contenidos presentados en virtud de las características de su dispositivo de acceso (resolución, número de colores, soporte audio-vídeo), canal de comunicación y de sus limitaciones físicas como por ejemplo una discapacidad auditiva o visual.

2.3.7 Descripción de la enseñanza aprendizaje

Según los fundamentos teóricos del socio constructivismo y los principios del aprendizaje propuesto por el conectivismo, es evidente que en estos momentos de pandemia la experiencia producida por la enseñanza y el aprendizaje es influenciada directamente por actuaciones de reciprocidad entre alumnos y un docente, por lo tanto; ella es en sí una red social compuesta por un conjunto finito de actores (alumnos-docente) configurada en un entorno donde el alumno/docente establece una serie de relaciones entre ellos.

Definición 1 (Red social). Según, Aguirre (2014). "Una red social es una estructura social compuesta por un conjunto finito de actores y configurada en torno a una serie de relaciones entre ellos." (p.170)

Definición 2 (Topología malla de una red). Es una red donde cada nodo está conectado a todos los nodos.

2.3.8 Modelo relacional alumno docente

Según la Definición 1, en 2.2.5 es evidente que los nodos alumno y docente son entidades sujetas de vínculo, su existencia depende del intercambio de contenido y la relación sociológica respecto a la experiencia enseñanza-aprendizaje sobre el espacio del conocimiento el cual a su vez se encuentra influenciado por los principios del socio constructivismo y el conectivismo.

2.3.8.1 Elementos del modelo

Los datos de red social alumno/docente describen una relación entre actores, lo que permite ubicar directamente las variables: influencia, creencias y rol. En ese sentido, se destaca la importancia de las relaciones entre alumnos y docente. Por ese motivo se identifica los siguientes elementos:

1. Nodo alumno. Es el conjunto de individuos pertenecientes a la generación Z.

2. **Nodo docente.** Es el transmisor de conocimiento, su característica principal, son sus creencias del entorno educativo y de los conocimientos previos de sus alumnos. Además, entiende que la abducción está gobernada por el paradigma del conectivismo.

3. **Vínculos.** Son las relaciones establecidas mediante una conexión diádica entre los nodos alumno-alumno, docente-alumno, docente-docente.

4. **Grado.** Es el número de nodo a los cuales un nodo específico está directamente unido.

5. **Camino.** Es una secuencia de vínculos entre dos nodos cualesquiera.

6. **Ciclo.** Es un camino que inicia y termina en un nodo.

7. **Proximidad.** Es una propiedad por el cual un actor puede tener relaciones con otros actores, mediante un camino.

8. **Nodo Conexo.** Es aquel nodo alcanzable por medio de un número de caminos.

9. **Distancia.** Es el número de nodos establecido en un camino particular.

Definición 1 (Red A/D). La red A/D es la expresión abstracta de los vínculos entre los nodos alumno-alumno, alumno-docente, docente-docente. En consecuencia, denotamos $A / D = (M; R)$, donde M es el conjunto de actores y R el conjunto de relaciones diádicas que se establecen entre alumno-alumno, alumno-docente, docente - docente, docente-TIC, alumno-TIC, docente-contenido y alumno-contenido.

Proposición 1. La red A/D, es una red social.

Demostración: Evidente por Definición 1 en 2.3.7.

Proposición 2. Los nodos y vínculos de una red A/D son interdependientes.

Demostración: Como la educación es un sistema de comunicación, donde el docente es el transmisor y su función es enviar señales temporales a los alumnos con la finalidad de establecer la experiencia enseñanza - aprendizaje mediante procesos de socialización, entonces los nodos alumno-alumno, alumno-docente forman una diada cuyo objetivo principal es el de construir conocimiento. En tal sentido, los nodos y los vínculos son interdependientes.

Proposición 3. Los vínculos entre los nodos transfieren recursos educativos, tanto materiales como no materiales.

Teorema. La red A/D es una estructura algebraica.

Demostración: En efecto, si definimos al ecosistema $A/D = (\Lambda, \Omega, d)$, donde Λ es el conjunto de individuos de la red A/D (representados por nodos) cuyos elementos son los alumnos y el docente, Ω es el conjunto de relaciones (representados por flecha) cuyos elementos son llamados acciones de los individuos y $d: \Omega \rightarrow \Lambda \times \Lambda$ es una función que asocia a cada flecha $\alpha \in \Omega$ el par $(o(\alpha); t(\alpha))$ llamados origen $o(\alpha)$ y final $t(\alpha)$ de α , entonces diremos que los objetos algebraicos son los nodos de A/D. Luego, si definimos dos tipos de caminos o enlaces:

1. los triviales o de longitud nula son de la forma $e_i = (i||i)$ para $i \in \Lambda$ y se identifican con el vértice i .
2. de longitud n con $n \leq 1$. Estos son de la forma

$$m = \{j | m_n, m_{n-1}, \dots, m_1 | i\}$$

donde:

$$i = o(m_1) \xrightarrow{m_1} o(m_2) \xrightarrow{m_2} o(m_3) \rightarrow \dots \rightarrow i(m_{n-1}) = o(m_n) \xrightarrow{m_n} j$$

entonces, la longitud de un camino en A/D es exactamente el número de flechas que lo componen. Por ejemplo, el camino trivial $e_i = (i || i)$ del vértice i al i tiene longitud cero (no hay flechas, es solo un punto), y el m anterior va del vértice i (el origen de m) al j (el final de m).

La composición de dos caminos se hace por concatenación cuando esto es posible.

Es decir, si $m = \{j | m_n, m_{n-1}, \dots, m_1 | i\}$ y

$$m' = \{j' | m'_n, m'_{n-1}, \dots, m'_1 | i'\}$$

son caminos de A/D, la composición $m'm$ está definida solo si $j = i'$. Si este es el caso, $m'm = \{j' | m'_n, \dots, m'_1, m_n, \dots, m_1 | i\}$ es el camino del vértice i al j' de longitud $n + 1$. La composición anterior se puede ver diagramáticamente como sigue

$$i \xrightarrow{m_1} \dots \xrightarrow{m_n} j = i' \xrightarrow{m'_1} \dots \xrightarrow{m'_n} j'$$

Por lo tanto; A/D tiene una estructura algebraica, donde la operación está dado por la composición de caminos.

2.4 Modelo matemático para el monitoreo académico

La creciente tendencia de las redes sociales y el permanente acceso a conocimiento promovidos por las nuevas tecnologías de la información, han generado un entorno cambiante y altamente

competitivo para las sociedades y las personas. En ese contexto, el escenario educativo peruano promovido por la pandemia generada por el COVID 19 se caracteriza principalmente por la búsqueda constante de nuevos paradigmas metodológicos que permitan optimizar el proceso de enseñanza - aprendizaje; en ese sentido, esta investigación propone un marco teórico de entendimiento matemático que busca explicar y comprender algunos elementos básicos del diseño instruccional como, los objetivos de clase, la evaluación y las unidades didácticas. Tal contextualización pretende movilizar los recursos teóricos de la matemática a la teoría educativa, con la finalidad de proporcionar un nuevo espacio de discusión y análisis que permita la comprensión de la experiencia educativa actual. Por esta razón, afirmamos que se ha propuesto una herramienta interpretativa clave para el desarrollo de nuevas propuestas metodológicas para la pedagogía.

2.4.1 Modelamiento matemático para los logros del aprendizaje

Para caracterizar matemáticamente los objetivos del currículum educativo es necesario definir algunos elementos primitivos, tales como los logros de aprendizaje.

Definición 1 (Logros de aprendizaje). Es el conjunto de conductas o acciones que manifiestan los estudiantes mediante el desarrollo de conocimientos, habilidades, capacidades y actitudes, a través del proceso de enseñanza. Con la finalidad de sustentar el modelo matemático de los objetivos de aprendizaje se propone los siguientes axiomas.

Axioma 1. Los logros de aprendizaje deben ser independientes entre sí.

Axioma 2. Los logros de aprendizaje se definen y establecen de manera consecutiva durante la programación curricular.

Axioma 3. Si β_j es la importancia asociada al logro de aprendizaje $j, \forall j \in N$ entonces $j \in [0; 1]$.

Definición 1 (Logros de aprendizaje particulares). Logros de aprendizaje particulares son logros de aprendizaje que no pueden descomponerse en otros logros.

Sera denotado por $L_j, \forall j = 1; 2; \dots; n$ con $n \in N$.

Lema 1. Si L_j, L_i son logros de aprendizaje particulares, entonces $L_j \cap L_i = \emptyset, \forall j, i \in N$.

Demostración evidente por el axioma 1.

Lema 2. Si L_i es un logro de aprendizaje particular, entonces $\beta_j(L_i) \in \{0,1\}$

Demostración: El resultado es evidente por Axioma 3 y Definición 1.

Definición 2. (Logros de aprendizaje). Logros de aprendizaje son logros que pueden ser divididos en logros de aprendizaje particulares. Sera denotado por \widehat{L}_j .

Lema 2. Si \widehat{L}_j es un logro de aprendizaje, entonces $\beta_j(L_j) \in [0; 1]$.

Demostración: El resultado es evidente por Axioma 3 y Definición 2.

Observación. El Lema 2 señala que los logros de aprendizaje pueden asumir diferentes niveles de su consecución.

Proposición 1. Si \widehat{L}_j es un logro de aprendizaje, entonces $\widehat{L}_j = \bigcup_{i=1}^n L_{ji}$ donde L_{ji} es un logro de aprendizaje particular $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración: El resultado es evidente por Definición 2.

Definición 3. (Conjunto de logros de aprendizajes). El conjunto de logros de aprendizajes (denotado por L) es el conjunto definido como

$$L = \{\widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \dots, \widehat{L}_n\}$$

$\forall n \in N$.

Lema 3. Dado $L = \{\widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \dots, \widehat{L}_n\}$, $\forall n \in N$; la relación $\widehat{L}_i \leq \widehat{L}_j$ sí y solo si $i \leq j$ es una relación de orden parcial.

Demostración: el resultado es evidente por Axioma 2. y Definición 3.

Proposición 2. El conjunto $(L; \leq)$ tiene ínfimo.

Demostración: Por Lema 3 y Axioma 2 es evidente que $\widehat{L}_1 \leq \widehat{L}_n$. Luego \widehat{L}_1 es por definición el ínfimo de $(L; \leq)$.

Proposición 3. El conjunto $(L; <)$ tiene supremo.

Demostración: Por el mismo argumento establecido en la proposición anterior se deduce el resultado.

Teorema 2. El conjunto $(L; <)$ es un retículo.

Es consecuencia de las Proposiciones 2 y 3.

Definición 4. (Nivel de aprendizaje). Se denomina nivel de aprendizaje a cierto valor obtenido por el estudiante cuando es evaluado respecto a los logros establecidos en una unidad o según la planificación curricular.

Proposición 4. La relación $\beta_j: \widehat{L}_j \rightarrow [0; 1] \quad \forall j = 1; 2; \dots; n$ con $n \in N$. Indica el nivel de aprendizaje de los estudiantes.

Demostración: El resultado se deduce gracias al Lema 2 y la Definición 4.

Proposición 5. Si A denota el aprendizaje del estudiante, entonces

$$A = \sum_{j=1}^n \beta_j(L_j)$$

Demostración: El resultado es evidente por Definición 1.

Proposición 6. Si L es el conjunto de logros de aprendizaje entonces Dim (L) es finita.

Demostración: Por Definición 3 y por Proposición 1 se deduce que Card (L) es finito. Luego la Dim (L) es finita.

Definición 5 (Espacio de logros alcanzados). Llamaremos espacio de logros alcanzados por el estudiante $i \in N$, al conjunto:

$$E^i = \{ \beta_1(\widehat{L}_1), \beta_j(\widehat{L}_2), \dots, \beta_j(\widehat{L}_n) \}$$

Definición 6 (Espacio de aprendizaje). Como en un salón de clase existe una cantidad finita de alumnos digamos m, definimos el arreglo $E = [E_1^1, \dots, E_m^m]$ como el espacio de aprendizaje del salón, donde cada uno de los ejes representa los espacios de logros alcanzados por cada estudiante.

Proposición 7. Si E es el espacio de logros alcanzados, entonces Dim(E) es finita.

Demostración: El resultado es consecuencia de la Proposición 6.

Observación. Si asumimos que el alumno al inicio del curso tiene cierto conocimiento elemental, el cual se transformara luego de haber obtenido ciertos logros de aprendizajes particulares, entonces por Lema 2, es posible definir el conjunto

$$\{ e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_n \}$$

donde cada $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ tiene el valor de 1 en la posición j y cero en el resto.

Proposición 8. $\forall i; j \in N$, si $i \neq j$, entonces $e_i \cdot e_j = 0$

Demostración: Como $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ y $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ se deduce $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$.

Proposición 9. $\forall i, j \in \mathbb{N}$, si $i = j$, entonces $e_i \cdot e_j = 1$

Demostración: Evidente por definición de e_j , $\forall i \in \mathbb{N}$

Definición 7. (Estado del aprendizaje). El estado de aprendizaje de los estudiantes del salón de clase se define el vector:

$$\psi(\widehat{L}_l) = \sum_{j=1}^n e_j \beta_j(\widehat{L}_l)$$

2.4.2 Trayectoria del aprendizaje

Al planificar un curso se establece una serie de criterios para evaluar el logro alcanzado por los alumnos, en ese sentido; un curso se refleja como un desplazamiento del vector que representa el estado de aprendizaje del alumno en el espacio de objetivos y un eje temporal.

Definición 8. (Rango observado). Si consideramos una discretización del tiempo $T = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ el rango total observado asociado a un macro - objetivo \widehat{L}_j es la función:

$$f_{rang}(\widehat{L}_j): [t_1, t_p] \rightarrow [m_{\widehat{L}_j}, M_{\widehat{L}_j}]$$

donde $m_{\widehat{L}_j} = \min\{\beta_j(\widehat{L}_{jt_i}), i = 1, 2, \dots, p\}$ y

$$M_{\widehat{L}_j} = \max\{\beta_j(\widehat{L}_{jt_i}), i = 1, 2, \dots, p\}$$

y $\beta_j(\widehat{L}_{jt_i})$, denota el rendimiento obtenido por el alumno en el tiempo t_i del micro – objetivo \widehat{L}_{jt} siempre que

$$\widehat{L}_j = \bigcup_{i=1}^n L_{ji}$$

Proposición 10. Si L es el conjunto de logros de aprendizaje, entonces el rango total observado asociado a L es:

$$frang(L) = \bigcup_{j=1}^n frang(\widehat{L}_j)$$

Demostración: En efecto; por Proposición 5, se tiene

$$L = \bigcup_{j=1}^n \widehat{L}_j$$

Además, como el Axioma 1 garantiza

$$[m_{\widehat{L}_i}, M_{\widehat{L}_i}] \cap [m_{\widehat{L}_j}, M_{\widehat{L}_j}] = \emptyset$$

y el rango observado durante $[l_1, l_p]$ para cada macro - objetivo \widehat{L}_j

es $frang(\widehat{L}_j): [l_1, l_p] \rightarrow [m_{\widehat{L}_j}, M_{\widehat{L}_j}]$

se deduce

$$frang(L) = \bigcup_{i=1}^n \widehat{L}_j$$

Definición 9 (Comportamiento de logro educativo). Definimos la función comportamiento de un objetivo educativo como la función:

$B_L: \text{frang}(L)$

$$\rightarrow \text{frang}(\widehat{L}_1) \times \text{frang}(\widehat{L}_2) \times \dots \times \text{frang}(\widehat{L}_j) \times \dots \times \text{frang}(\widehat{L}_n)$$

Luego la función comportamiento de la variable de entrada L en el instante t es:

$$B_L(L(t)) = (\psi_{\widehat{L}_1}(t), \psi_{\widehat{L}_2}(t), \dots, \psi_{\widehat{L}_j}(t), \dots, \psi_{\widehat{L}_n}(t))$$

Observación: A B_L le asociamos una matriz llamada matriz de comportamiento del objetivo educativo, $[B_L] = [\psi_{\widehat{L}_i}(t)]$

donde $i = 1; 2; \dots; p$ y $j = 1; 2; \dots; n$.

La matriz sería definida como

$$B_L = \begin{pmatrix} \psi_{\widehat{L}_1}(t_1) & \psi_{\widehat{L}_1}(t_2) & \dots & \psi_{\widehat{L}_1}(t_p) \\ \psi_{\widehat{L}_2}(t_1) & \psi_{\widehat{L}_2}(t_2) & \dots & \psi_{\widehat{L}_2}(t_p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{\widehat{L}_n}(t_1) & \psi_{\widehat{L}_n}(t_2) & \dots & \psi_{\widehat{L}_n}(t_p) \end{pmatrix}$$

cuyo rango es $n \times p$.

Definición 10. (Trayectoria). Llamaremos trayectoria descrita por el alumno x durante el tiempo que dura un determinado curso $[t_0, t_p]$ a la función $T_x: [t_0, t_p] \rightarrow R^m$ tal que

$$T_x(t) = (\psi^1(t), \psi^2(t), \dots, \psi^i(t), \dots, \psi^m(t))$$

donde $\psi^i(t)$ representa el estado de aprendizaje i en el instante t.

Definición 11. (Análisis del logro educativo). Si en el salón de clase M los alumnos x tienen cierta calificación η_i (que en total será n), entonces definimos la función $d: M \times M \rightarrow R^+$ como:

$$d(x_{n_i}, y_{n_j}) = \sum_{n \in N} (1 - \delta_{x_{n_i}, y_{n_j}}(n))$$

donde
$$\delta_{x_{n_i}, y_{n_j}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{n_i} = y_{n_j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema

La función $d: M \times M \rightarrow R^+$ es una métrica.

Demostración: En efecto; para verificar la afirmación se debe demostrar cada uno de los siguientes axiomas:

$$1. d(x_{n_i}, y_{n_j}) = 0 \leftrightarrow x_{n_i} = y_{n_j}$$

Si $x_{n_i} = y_{n_j}$ para todo $i; j$; es evidente por definición $d(x_{n_i}, y_{n_j}) = 0$. De otro lado, si suponemos que $d(x_{n_i}, y_{n_j}) = 0$ se deduce que todas las calificaciones de x_{n_i} coincide con los de y_{n_j} . Por lo tanto; $x_{n_i} = y_{n_j}$.

$$2. d(x_{n_i}, y_{n_j}) = d(y_{n_j}, x_{n_i})$$

Por la forma en que hemos definido la función d , $d(x_{n_i}, y_{n_j})$ coincide con el número de calificaciones de x no comunes con las de y .

Por lo que si $d(x_{n_i}, y_{n_j}) = k$ siendo $0 \leq k \leq n$, $k \in N$, entonces las calificaciones de x e y tienen $n-k$ calificaciones comunes, luego evidentemente $d(y_{n_j}, x_{n_i}) = k$.

$$3. d(x_{n_i}, y_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, z_{n_t}) + d(z_{n_t}, y_{n_j})$$

$$\text{Si } \{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\} = \emptyset \vee \{y_{n_j}\} \cap \{z_{n_t}\} = \emptyset \vee \{x_{n_i}\} \cap \{z_{n_t}\} = \emptyset$$

$$; \text{ es evidente que } d(x_{n_i}, y_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, z_{n_t}) + d(z_{n_t}, y_{n_j})$$

Supongamos que las intersecciones son distintas del vacío y diferentes entre sí, además que la expresión no es cierta, es decir, $\exists z \in M$ tal que $d(x_{n_i}, y_{n_j}) > d(x_{n_i}, z_{n_t}) + d(z_{n_t}, y_{n_j})$

Como

$$\begin{aligned}
\{z_{n_t}\} &= [\{\{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\} \cap \{z_{n_t}\}\} \cup \\
&= [((\{x_{n_i}\} \cap \{z_{n_t}\}) - (\{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\}))] \cup \\
&= [((\{y_{n_j}\} \cap \{z_{n_t}\}) - (\{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\}))] \cup \\
&= [\{z_{n_t}\} - (\{x_{n_i}\} \cup \{y_{n_j}\})]
\end{aligned}$$

Supongamos que $d(x_{n_i}, y_{n_j}) = k$; es decir que x tiene k calificaciones no comunes con y (luego x tiene n-k calificaciones comunes con y). Denotamos las intersecciones anteriores por

$$\begin{aligned}
[(\{x_{n_i}\} \cap \{z_{n_t}\}) - (\{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\})] &= \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}\} \\
[(\{y_{n_j}\} \cap \{z_{n_t}\}) - (\{x_{n_i}\} \cap \{y_{n_j}\})] &= \{y_{n_1}, y_{n_2}, \dots, y_{n_j}\} \\
[\{z_{n_t}\} - (\{x_{n_i}\} \cup \{y_{n_j}\})] &= \{z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_t}\}
\end{aligned}$$

Debido a la construcción de $\{z_{n_t}\}$ como unión disjunta, se tiene

$$\text{card}(z_{n_t}) = n = t + i + j + 1$$

por otra parte $d(x_{n_i}, z_{n_t}) = t + j = k - i + n - (k - 1)$

$$d(y_{n_j}, z_{n_t}) = t + j = k - j + n - (k - 1)$$

como hemos supuesto que

$$d(x_{n_i}, z_{n_t}) + d(z_{n_t}, y_{n_j}) < k, \text{ se cumplirá}$$

$$(t+j)+(t+i) < k$$

pero como $n-l+t < k$, se concluye $n < l-t+k < l+k < n$ lo cual es una contradicción. por tanto, es valida $d(x_{n_i}, y_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, z_{n_t}) + d(z_{n_t}, y_{n_j})$

luego $d: M \times M \rightarrow R^+$ es una métrica.

2.4.3 Modelo matemático de la evaluación

La evaluación es una herramienta educativa que permite corregir el proceso educativo pues señala la existencia de inestabilidad del aprendizaje.

En ese sentido es modelado como un vector b que permite representar el estado esperado del alumno en cada punto del curso.

La caracterización de la evaluación se expresará en función de los objetivos del curso.

2.4.3.1 Peculiaridades de la evaluación

La evaluación tiene particularidades que afectan a la forma de estimar el conocimiento del estudiante:

1. No se sabe nada del estado del sistema hasta que no se realiza una medida.
2. Durante el proceso de evaluación se produce una pérdida de distinciones en el espacio de estados del sistema. Es decir, no es posible distinguir entre dos estados diferentes ψ y ψ' que conduzcan al mismo resultado en la evaluación.
3. La medida del estado de conocimiento del alumno mediante el proceso de evaluación solo puede tener como resultado un conjunto discreto de valores.
4. El estado de conocimiento del alumno tras el proceso de evaluación está limitado a un conjunto discreto de vectores posibles del espacio que vendrá determinado por el propio proceso de evaluación y lo denominaremos auto estados del operador evaluación.

La evaluación se representa mediante un operador ξ que consta a su vez de varias partes $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l, \dots, \xi_L\}$ que reflejan la estructura interna de dicha evaluación. A cada prueba de evaluación ξ_l se le

asigna un peso γ_l que representa la importancia de dicha prueba en la evaluación global.

Por tanto; se puede decir que la evaluación es un operador ξ resultado de la composición de un conjunto de operadores ξ_l que representan cada una de las subtareas en que se ha dividido el proceso de evaluación:

$$\xi: \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l, \dots, \xi_L\}$$

El operador evaluación será definido en un espacio de dimensión L donde en cada eje se representa el rendimiento obtenido en cada una de las pruebas de evaluación.

$$\xi: \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_J\}$$

En este apartado se describe el operador en términos de las pruebas de evaluación que es la representación más utilizada y más adelante se analiza la relación entre ambas representaciones.

Para poder representar una en función de la otra es necesario disponer de la descomposición espectral del proceso de evaluación en términos de los logros del curso. Para construir esta descomposición espectral hay que especificar para cada logro en cuál de las pruebas se está evaluando y en qué porcentaje. De este modo el coeficiente e_{lj} representa la fracción del logro particular L_j que se evalúa en la tarea de evaluación ξ_l . Al proporcionar valores a estos coeficientes es importante tener en cuenta estos dos aspectos:

1. Condición de normalización: La suma de la contribución de todas las preguntas a un mismo logro debe ser la unidad

$$\sum_{i=1}^L e_{ij}=1$$

Esta condición solo se cumple cuando el conjunto de las pruebas de evaluación $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l, \dots, \xi_L\}$ mide por completo el

rendimiento de todos y cada uno de los objetivos del curso, en ese caso se dice que la evaluación es exhaustiva.

Definición 12. (Exhaustividad de una prueba de evaluación.) Se denomina exhaustividad de una evaluación a la capacidad de dicha prueba de valorar el nivel de cumplimiento de todos los logros particulares del curso.

Para cuantificar la exhaustividad de un proceso de evaluación se introducen los coeficientes $\alpha_j \in [0; 1]$. Donde cada α_j se denomina grado de exhaustividad para el logro particular L_j e indica con qué profundidad se trata dicho logro en el proceso de evaluación, es decir, qué fracción del logro particular L_j se está midiendo en la evaluación ξ .

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^L e_{ij} \leq 1 \begin{cases} \text{Exhaustiva si } \alpha_j = 1 \quad \forall j \\ \text{No exhaustiva si } \exists j / \alpha_j \leq 1 \end{cases}$$

Para obtener una medida de la exhaustividad global de un proceso de evaluación se debe ponderar la exhaustividad de cada logro particular por la importancia que se atribuye a dicho objetivo dentro del curso tal y como indica la ecuación.

$$\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^J \beta_j \alpha_j$$

donde $0 < \bar{\alpha} < 1$.

2. Estimación del peso de cada prueba $\widehat{\gamma}_i$: El modelo permite estimar el peso relativo que deberá tener cada prueba en la evaluación global. Este peso se calcula del mismo modo que el rendimiento esperado ya que ambas magnitudes reflejan el incremento que se espera en la calificación global del alumno tras la realización de cada prueba de evaluación.

$$\gamma_l = \widehat{\gamma}_l = \sum_{j=1}^J e_{ij} \beta_j$$

Las diferencias entre el peso asignado directamente por el profesor a cada una de las pruebas γ_l y el peso estimado por el modelo $\widehat{\gamma}_l$ reflejan problemas de diseño.

Si la evaluación es exhaustiva la suma de los coeficientes j de todas las preguntas debe ser la unidad, en caso contrario la suma de los coeficientes da como resultado la exhaustividad global.

$$\sum_{j=1}^J \widehat{\gamma}_l = \bar{\alpha} \leq 1$$

Cuando la evaluación no es exhaustiva para que la suma de los pesos asignados a cada prueba siga siendo la unidad es necesario normalizar los coeficientes $\widehat{\gamma}_l$ por la exhaustividad global.

$$\text{Peso de Prueba } \xi_l = \frac{\widehat{\gamma}_l}{\sum_{j=1}^J \widehat{\gamma}_l} = \frac{\widehat{\gamma}_l}{\bar{\alpha}}$$

Se puede caracterizar matemáticamente el operador evaluación mediante la ecuación:

$$\xi_l = \frac{1}{\widehat{\gamma}_l} \sum_{j=1}^J e_{ij} \beta_j P_j = \frac{\widehat{\gamma}_l}{\bar{\alpha}}$$

donde el operador P_j indica el proyector sobre el eje correspondiente a los logros particulares L_j .

2.4.3.2 Ajuste de una evaluación

Cuando el peso asignado directamente a las pruebas de evaluación en el programa del curso γ_l no se corresponde con el peso estimado por el modelo $\widehat{\gamma}_l$, el análisis de sus diferencias permite detectar

inconsistencias en la planificación del proceso de evaluación. Si las diferencias son grandes es necesario determinar cuál de estos tres factores es el origen del problema:

1. La valoración de cada logro en las pruebas de evaluación e_{lj} .
2. La asignación de pesos γ_l realizada directamente a cada prueba de evaluación.
3. El peso relativo β_j asignado a cada objetivo particular del curso.

Normalmente estas inconsistencias se deben a que el peso β_j atribuido a cada logro particular en el curso no se corresponde con la importancia que se le da en las pruebas de evaluación. Cuando una prueba tiene más peso del estimado es que en la práctica se le está dando a los micro - objetivos involucrados más importancia que la asignada inicialmente.

Una vez detectada la inconsistencia hay que determinar cuál de los dos pesos es el que mejor se adapta a la realidad, si el que se le asigna directamente β_j o el que se le atribuye indirectamente mediante el proceso de evaluación.

En el primer caso sería necesario ajustar el peso γ_l asignado inicialmente al valor $\widehat{\gamma}_l$ estimado por el modelo. En el segundo caso habrá que corregir el peso atribuido a cada logro inicialmente β_j , en virtud de su importancia en el proceso de evaluación.

$$\widehat{\beta}_j = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \gamma_l e_{lj}$$

$$t'_{\text{total}} = \sum_{i=1}^I t'_i$$

A partir de ahora no se hará distinción entre los valores asignados (β_j, t_i, γ_l) y los valores estimados $(\widehat{\beta}_j, \widehat{t}_i, \widehat{\gamma}_l)$ del peso de los logros particulares, duración de las unidades didácticas e importancia de las pruebas de evaluación ya que se suponen ajustados en fases previas y por tanto consistentes entre sí. Para denotar estas magnitudes se utilizará a partir de ahora la notación más sencilla: (β_j, t_i, γ_l) .

2.4.3.3 Caracterización de los resultados de una evaluación

La aplicación del operador evaluación al vector que representa el estado del alumno permite obtener el resultado de la evaluación se aplica sobre el estado esperado del alumno $\widehat{\psi}$ o sobre su estado real ψ :

1. En el espacio de los logros del curso, la aplicación de cada una de las componentes del operador evaluación ξ_j al vector que representa el estado del alumno ψ da como resultado su rendimiento η_j para el logro particular correspondiente L_j como indica la ecuación:

$$\xi_j \psi = \eta_j \psi, \eta_j \in [0,1]$$

Aplicando el mismo operador al estado esperado del alumno tras la evaluación de los logros particulares L_j , representado por $\widehat{\psi}$, se obtiene como resultado el máximo rendimiento para dicho logro η_{jmax} .

$$\xi_j \widehat{\psi}_j = \eta_{jmax} \widehat{\psi}_j \quad \eta_{jmax} = 1$$

2. Del mismo modo en el espacio de las pruebas de evaluación, la aplicación de cada una de las componentes del operador ξ_l al vector estado ψ da como resultado la nota obtenida para dicha prueba η_l .

$$\xi_l \psi = n_l \psi \quad n_l \in [0,1]$$

Si se aplica el mismo operador sobre el estado esperado se obtiene la nota máxima.

$$\xi_l \widehat{\psi}_l = n_{lmax} \widehat{\psi}_j \quad n_{lmax} = 1$$

Es importante tener en cuenta que en la notación utilizada se ha desacoplado la puntuación de cada prueba η_l de su peso relativo dentro de la evaluación global γ_l . Del mismo modo, en el espacio de logros, se ha desacoplado el rendimiento de cada logro particular η_l de su peso dentro del curso β_j .

Los coeficientes γ_l y β_j se introducen al componer varias pruebas individuales para formar la evaluación global. La puntuación esperada tras el proceso de evaluación global viene dada por el vector:

$$n_{max} = (\gamma_1 n_{1max}, \dots, \gamma_l n_{lmax}, \dots, \gamma_L n_{Lmax}) = (\gamma_1, \dots, \gamma_l, \dots, \gamma_L)$$

La relación entre las pruebas de evaluación ξ_l y los logros particulares L_j determina la relación existente entre la nota esperada para cada prueba η_{jmax} y el rendimiento esperado para cada micro - objetivo η_{jmax} tal y como indican las ecuaciones:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 n_{1max} \\ \gamma_2 n_{2max} \\ \vdots \\ \gamma_l n_{lmax} \\ \vdots \\ \gamma_L n_{Lmax} \end{pmatrix}}_{\{\gamma_l n_{lmax}\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1J} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2j} & \dots & e_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{l1} & e_{l2} & \dots & e_{lj} & \dots & e_{lJ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{L1} & e_{L2} & \dots & e_{Lj} & \dots & e_{LJ} \end{pmatrix}}_{\{e_{ij}\}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \eta_{1max} \\ \beta_1 \eta_{2max} \\ \vdots \\ \beta_j \eta_{jmax} \\ \vdots \\ \beta_J \eta_{Jmax} \end{pmatrix}}_{\{\beta_j \eta_{jmax}\}}$$

$$n_{lmax} = \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=1}^J e_{lj} \beta_j \eta_{jmax}$$

$$n_{lmax} = \eta_{jmax} = 1$$

donde los e_{lj} son el peso de la respuesta esperada (con puntuación η_{lmax}) en el logro particular o lo que es lo mismo, la fracción del logro particular L_j que se evalúa en la tarea de evaluación ξ_l .

Análogamente la puntuación obtenida por el alumno se puede representar mediante el vector

$$n = (\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_2, \dots, \gamma_1 n_1, \dots, \gamma_L n_L) \quad n_l \in [0,1]$$

Cada una de las componentes del vector n_l se expresa en función del rendimiento máximo permitido η_{jmax} como indican las ecuaciones.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 n_1 \\ \gamma_2 n_2 \\ \vdots \\ \gamma_1 n_1 \\ \vdots \\ \gamma_L n_L \end{pmatrix}}_{\{\gamma_l n_l\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1J} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2j} & \dots & r_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{l1} & r_{l2} & \dots & r_{lj} & \dots & r_{lJ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{L1} & r_{L2} & \dots & r_{Lj} & \dots & r_{LJ} \end{pmatrix}}_{\{r_{ij}\}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \eta_{1max} \\ \beta_1 \eta_{2max} \\ \vdots \\ \beta_j \eta_{jmax} \\ \vdots \\ \beta_J \eta_{Jmax} \end{pmatrix}}_{\{\beta_j \eta_{jmax}\}}$$

$$n_l = \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=1}^J r_{ij} \beta_j \eta_{jmax}$$

los coeficientes r_{lj} representan el grado de consecución de los logros particulares L_j que demuestra el alumno al realizar la tarea de evaluación ξ_l .

Hay que destacar que los vectores η_{lmax} y η_l están expresados en términos de $(\xi_1, \dots, \xi_l, \dots, \xi_L)$ y no en términos de $\{L_1, \dots, L_l, \dots, L_J\}$

2.4.3.4 Tipos de evaluación

La caracterización espectral del proceso de evaluación permite obtener los resultados del proceso de evaluación de dos formas distintas:

1. Mediante la nota obtenida en cada una de las pruebas de evaluación η_l .
2. Mediante el rendimiento obtenido en cada uno de los logros particulares del curso η_j .

En este caso, se caracteriza al alumno mediante el vector n cuyas componentes η_l indican la calificación obtenida en cada una de las pruebas de evaluación ξ_l ponderada por el peso γ_l de dicha prueba en la evaluación global.

Evaluación en función a exámenes

La nota media se obtiene como el promedio de los resultados obtenidos en las diferentes pruebas de evaluación ponderado por el peso γ_l de cada una de estas pruebas en el resultado final. Si la evaluación no es exhaustiva, es necesario normalizar por la suma de los coeficientes γ_l es decir por la exhaustividad global.

$$\bar{n} = \frac{\sum_{l=1}^L \gamma_l n_l}{\sum_{l=1}^L \gamma_l} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \gamma_l n_l$$

Teorema

Si la evaluación está bien construida, las dos formas de evaluación deben conducir a los mismos resultados medios.

Demostración: En efecto; se desea demostrar $\bar{n} = \bar{\eta}$. Para demostrarlo, basta sustituir en la ecuación:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{l=1}^L \gamma_l n_l}{\sum_{l=1}^L \gamma_l} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \gamma_l n_l$$

y η_l por su valor:

$$n_l = \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=1}^J r_{lj} \beta_j \eta_{j\max}$$

Además, se debe usar la definición del rendimiento η_j dada en la ecuación

$$\eta_j = \frac{1}{\alpha_j} \sum_{l=1}^L r_{lj}$$

$$\eta_j \in [0,1]$$

para establecer la igualdad. Tal como se muestra a continuación:

$$\bar{n} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \gamma_l n_l = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \gamma_l \left(\frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=1}^J r_{lj} \beta_j \right)$$

$$= \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J r_{lj} \beta_j = \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{j=1}^J \beta_j \left(\sum_{l=1}^L r_{lj} \right)$$

$$= \frac{1}{\bar{\alpha}} \sum_{j=1}^J \beta_j \alpha_j \eta_j = \bar{\eta}$$

2.5 Definición de términos básicos

1. Modelo.

Asumimos la definición propuesta por Popper (1985).

"El modelo es un medio para comprender lo que la teoría intenta explicar, enlazando lo abstracto con lo concreto."(p. 87-88)

2. Modelo mental.

Asumimos la definición propuesta por Modino (2014).

"El modelo mental es una herramienta que posibilita la representación de un estado de cosas del mundo exterior mediante una relación de correspondencia con ciertos conocimientos teóricos."(p. 13)

3. Modelo Conceptual.

Asumimos la definición propuesta en Google:

"Es una representación de un sistema, hecho de la composición de conceptos que se utilizan para ayudar a las personas a conocer, comprender o simular un tema que representa el modelo, incluye las entidades importantes y las relaciones entre ellos. "

4. Sistema axiomático.

Asumimos la definición propuesta por Valor (1998).

El sistema axiomático es una clase S de fórmulas que debe contener:

- (a) Un alfabeto o tabla de signos primitivos.
- (b) Un conjunto de reglas para la formación de fórmulas.
- (c) Una lista A de axiomas, las cuales son fórmulas primitivas del sistema, y
- (d) Un repositorio R de reglas de inferencia de tránsito de unas fórmulas a otras.

Las fórmulas de S carecen de referencia, y por lo tanto no son ni verdaderas ni falsas. En tal sentido, para conocer su valor veritativo es necesario, hacer lo siguiente:

(a) Elegir un conjunto de objetos cualesquiera, reales o posibles, al que llamaremos universo, con dos condiciones: que el conjunto de individuos sea no vacío y que los individuos que lo integran sean distinguibles.

(b) Seleccionar dentro del conjunto determinadas propiedades y relaciones que se den entre los objetos. Si designamos por U al universo elegido y por $R_1; R_2; \dots; R_n$ a las propiedades y relaciones elegidas, el conjunto:

$$E = \{U; R_1; R_2; \dots; R_n\}$$

(c) Poner en relación el conjunto de fórmulas con el modelo, de la siguiente manera:

- i. A cada letra predicativa n -ádica se le asigna como correlato una relación n -ádica del modelo E .
- ii. A cada constante individual del conjunto de fórmulas se le asigna un individuo del universo U .
- iii. Los símbolos lógicos (cuantores y jutores) ya tienen un significado y se mantiene.

A la función que pone en correspondencia el conjunto de fórmulas y el modelo se llama interpretación I . Por lo tanto, $I(S) = E$. Cuando una o un conjunto de fórmulas se convierte en un

enunciado verdadero se dice que la interpretación satisface el conjunto de fórmulas y por lo tanto E es el modelo del sistema. De lo dicho anteriormente, se concluye que la noción de verdad es relativa pues ella queda sujeta a una interpretación y a un universo. (p. 23-26)

5. Estructura algebraica.

Asumimos la definición propuesta por Mac Lane (1971).

Una estructura algebraica \mathcal{E} está definida por:

- (a) Una colección no vacía cuyos elementos se llaman objetos. Esta colección se denota por $Ob(\mathcal{E})$.
- (b) Una colección no vacía de conjuntos disjuntos y eventualmente vacíos $Mor(A; B)_{A, B \in Ob(\mathcal{E})}$. Los elementos del conjunto $Mor(A; B)$ se denominan flechas del objeto A en el objeto B .
- (c) Una operación entre flechas llamada composición, tal que si $A; B; C$ son objetos de \mathcal{E} , $f \in Mor(A; B)$ y $g \in Mor(B; C)$, existe un único morfismo $g \circ f \in Mor(A; C)$. La operación cumple las siguientes condiciones:

i. Es asociativa, es decir, dados $f \in \text{Mor}(A; B)$, $g \in \text{Mor}(B; C)$ y $h \in \text{Mor}(C; D)$ se cumple:
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

ii. Para cada objeto A en \mathcal{E} existe un morfismo identidad i_A en $\text{Mor}(A; A)$ tal que $i_A \circ f = f$, $g \circ i_A = g$, para todo $f \in \text{Mor}(B; A)$ y todo $g \in \text{Mor}(A; B)$. (p. 113-117)

6. Modelo matemático.

Un modelo matemático es una construcción mental sujeta a cierto marco cultural, cuya finalidad es relacionar su cuerpo teórico con la realidad mediante una regla de correspondencia biunívoca.

7. Diseño instruccional.

Asumimos la definición propuesta por Tobón (2007).

"El diseño instruccional es el medio para facilitar el aprendizaje, bajo objetivos que deben ser evaluados en un contexto específico."(p. 20)

8. Educación.

Asumimos la definición propuesta por Fernández (2004).

"La educación es una acción y un proceso intencional, continuo y sistemático de perfeccionamiento de la persona en cualquiera de sus dimensiones (intelectual, física, estética, profesional, ética, etc.)."(p. 115)

9. Objetivo de aprendizaje.

Asumimos la definición propuesta por Rossi (2008):

Los objetivos de una sesión de clase representan las metas de aprendizaje que se desea lograr con la acción formativa con ayuda de criterios en la selección y secuenciación de los contenidos, y evaluación del proceso de enseñanza - aprendizaje. (p.78-79)

10. Sesión de clase.

Asumimos la definición propuesta por Biggs y Tang (2011):

Una sesión de clase es una secuencia de situaciones de aprendizaje, cuyo desarrollo se fundamenta en la interacción de los alumnos, el docente y el objeto de aprendizaje con la finalidad de generar en los estudiantes procesos cognitivos que les permita aprender a aprender y aprender a pensar. (p. 105-107)

11. Unidad didáctica.

Asumimos la definición propuesta por Ibañez (1992).

“La unidad didáctica es la interrelación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un periodo de tiempo determinado.” (p. 13-15)

12. Evaluación.

Asumimos la definición propuesta por Wiliam (2018).

La evaluación es un proceso continuo y personalizado del sistema de enseñanza – aprendizaje cuyo objetivo es conocer la situación cognitiva y afectiva de cada estudiante con la finalidad de generar retroalimentación para alumnos y docentes a fin de mejorar el aprendizaje y guiar sus próximos pasos para garantizar que se alcanzan los objetivos educativos definidos. (p. 97-99)

13. Currículum.

Es el conjunto de objetivos, métodos pedagógicos, contenidos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente.

2.6 Hipótesis de investigación

2.6.1 Hipótesis general

El monitoreo del aprendizaje se caracteriza con ayuda del álgebra moderna y el análisis matemático en particular con ayuda de las estructuras algebraicas.

2.6.2 Hipótesis específicas

1. Los objetivos de aprendizaje pueden ser representados como una estructura algebraica.
2. La evaluación puede ser representado como una función.
3. Las unidades didácticas pueden ser representados como una relación funcional.

2.7 Operacionalización de las variables

En esta investigación se define como variables independientes a las componentes: objetivos de aprendizaje y evaluación. La variable dependiente es la trayectoria de aprendizaje. Por lo tanto, se puede establecer un modelo de la forma:

$$f(x, y) = z$$

Con la finalidad de concretizar la operacionalización de las variables propuestas se propone las siguientes acciones de estudio.

1. El primer paso es definir las componentes del diseño instruccional.
2. El segundo paso es definir el concepto de estructura algebraica.
3. El tercer paso es interpretar la variable de estudio.
4. El cuarto paso es construir un modelo matemático para el monitoreo del aprendizaje.

CAPÍTULO III

Metodología

Esta propuesta se desarrolla a partir de un estudio de caso, aplicado al ámbito de la teoría del conocimiento, donde los objetivos de aprendizaje, las unidades didácticas, la evaluación y el monitoreo del aprendizaje son las unidades de análisis, pues se pretende construir un modelo algebraico para cada uno de ellos. Por lo tanto, utilizaremos el método sintético.

3.1 Diseño metodológico

De acuerdo con Vallejo (2002), esta investigación tiene un diseño observacional y descriptivo: porque se formula matemáticamente el monitoreo del aprendizaje con la finalidad de interpretar y analizar los elementos intervinientes en la gestión educativa.

En el ámbito de la investigación hay gran abundancia de clasificaciones en cuanto al tipo de investigación, en ese sentido según Rodríguez y Valldeoriola (2014), definimos esta investigación como cualitativa: porque tiene como finalidad interpretar los objetivos de aprendizaje, las unidades didácticas, la evaluación y el monitoreo del aprendizaje.

En cuanto al nivel de investigación de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), esta investigación reúne las características de un estudio descriptivo y explicativo: porque describe y explica con ayuda de argumentos matemáticos el monitoreo del aprendizaje.

De acuerdo con Barrantes (2014), esta investigación tiene un enfoque cualitativo y se enmarca en el paradigma interpretativo:

porque se centra en el estudio de los significados de las acciones de ciertas componentes de la gestión educativa circunscrito a ciertos logros y competencias del alumno.

3.2 Población y muestra

Esta investigación tiene como ámbito de estudio a la ciencia de la educación, el análisis matemático y el álgebra moderna, específicamente, la gestión educativa.

3.3 Técnicas de recolección de datos

Se utilizarán como instrumento los libros de textos, artículos científicos, tesis alojadas en repositorios institucionales como el Renati - Sunedu y revistas especializadas del área de Matemáticas como MathScinet.

3.4 Técnicas para el procesamiento de la información

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación documental. El procesamiento de la información recopilada pasa por los siguientes procesos: Clasificación, registro y codificación.

Con respecto a los libros de texto, tienen la particularidad de ser “una publicación especializada, con identidad propia, que busca mostrar las necesidades inherentes de una estructuración lógica y coherente del diseño instruccional”. Es una fuente válida de conocimiento, y como tal, su análisis nos proporcionará un conocimiento respecto a la gestión del aprendizaje. La revisión de los artículos científicos permitirá tener una descripción y una explicación de las interacciones entre el seguimiento y el monitoreo del aprendizaje durante todo el proceso experiencia de la transmisión y adquisición del conocimiento.

CAPÍTULO IV

Resultados

4.1 Analisis de resultados

Primera.- Se ha interpretado algunos elementos del currículum educativo con ayuda de argumentos axiomáticos. Además, es claro que la formulación propuesta se sustenta en el empirismo y se ha utilizado el racionalismo matemático para extraer su contenido.

Segunda.- Se ha demostrado que se puede modelar los logros de aprendizaje, unidades didácticas y evaluación en términos de las estructuras algebraicas.

Tercero.- Se ha obtenido una propuesta teórica que involucra la actividad de gestión docente durante la planificación de un curso fundamentada por los principios del socio-constructivismo y el conectivismo.

Cuarto.- Se ha utilizado una propuesta axiomática para estimar cálculos cuantitativos que represente la evaluación y los logros de un curso en general.

CAPÍTULO V

Discusión

5.1 Discusión de resultados

El modelamiento matemático del monitoreo académico de los estudiantes es un problema muy complejo que se ha intentado resolver desde que se inventó el concepto de “logro de aprendizaje”. Algunos autores sostienen que la complejidad de este problema se debe a que no se cuenta con información pertinente a tiempo real de los logros alcanzados por los estudiantes durante la experiencia educativa. Es decir, no podemos saber simultáneamente el logro y el que hacer del estudiante durante la sesión de clase, pero si sabemos que el estudiante podrá sufrir un cambio de conducta gracias a la propuesta metodológica planteada por el docente. Es en esta situación que el ser humano con su ingenio crea nuevos marcos conceptuales de discusión para resolver problemas complejos. Esta es la acción que hemos realizado en esta investigación. Es decir, hemos llevado los ingredientes conceptuales de la educación y los conceptos de sistema axiomático, función, matrices y ubicados en el espacio de logros de aprendizaje para analizar el dinamismo, las propiedades y el comportamiento de los logros de aprendizaje adquiridos por los estudiantes. Hemos logrado algunos resultados sorprendentes, pero estamos seguros que estamos dejando lo más trascendente, por falta de revelación o imaginación. Sin embargo, hemos logrado demostrar que la conceptualización matemática está correlacionada con los procesos de monitoreo de los estudiantes, más aún nos proporciona una abstracción necesaria para la creación de plataformas computacionales que gobiernen el proceso de actividades de intercambio de información y conocimiento durante la sesión de clase.

CAPÍTULO VI

Conclusiones y recomendaciones

6.1 Algunas conclusiones

a) El modelo matemático construido es una propuesta que toma en consideración la naturaleza continua de la variación de los logros de aprendizaje y explican los cambios continuos del estado de los saberes adquiridos.

b) El modelo usa en su configuración un formalismo matemático simple evitando el cambio radical de sus observables clásicos como por ejemplo el de conjunto y función, hacia operadores matemáticos generales.

d) Concluimos, en general, que los modelos matemáticos coadyuvan en el análisis de los logros de aprendizaje durante una experiencia educativa particular.

e) Este estudio constituye la integración de dos disciplinas científicas; matemáticas y educación que dan lugar a un amalgamiento de reglas de intercambio biunívoca.

6.2 Recomendaciones

Las recomendaciones son:

a) El monitoreo del aprendizaje es uno de los paradigmas de la educación, un trabajo futuro pendiente de nuestra propuesta será generar un modelo teórico global de los elementos que la constituyen con la finalidad de beneficiar la gestión educativa.

- b) Elaborar un algoritmo para proponer un software que automatice el seguimiento de los logros.
- c) Implementar un marco interpretativo matemático desde la teoría del álgebra relacional para los diversos paradigmas educativos.
- d) Extender nuestra propuesta de interpretación al campo de las estructuras algebraicas.

Referencias

5.1 Fuentes bibliográficas

- Andersen, C. (1991). *El nuevo orden tecnológico*. Buenos Aires: Ediciones Macchi.
- Aguirre, J. (2014) *Introducción al análisis de redes sociales, en Hologramática*, núm. 20, VII, pp. 161-187.
http://www.cienciared.com.ar/ra/usr/3/1511/holo_n20_pp161_187.pdf
- Ausubel, D. (1983) *Adquisición y retención del conocimiento*. Una perspectiva cognitiva. 2ª edición, Barcelona: Paidós Ibérica.
- Barrantes, R. (2014). *Investigación: un camino al conocimiento Un enfoque cualitativo, cuantitativo y mixto*. Series ediciones AGORA 10. ISBN: 978-9968- 31-984-3. Costa Rica.
- Bartolomé, A. (2004). *Blended Learning. Conceptos Basicos*. Pixel-Bit: Revista de medios y educación, 23, 7- 20
- Bernal, H. (2014). *Diseño de seguimiento académico de la evaluación de los estudiantes de educación básica regular*. [Tesis de maestría. Universidad Libre.]
Repositorio institucional:
<http://Users/Usuario/Desktop/bazan/aqui%20esta%201.pdf>
- Beldona, S, Nusair, K., Demicco, F. (2009) *textitOnline travel purchase behavior of generational cohorts: a longitudinal study*. *Journal of Hospitality Marketing and Management*, Vol. 18, pp. 406-20.
- Blázquez, F., Tagle, T. (2010). *Formación docente: un estudio de las creencias de alumnos y profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del inglés*. *Revista Iberoamericana de Educación*, 54(4), 1-12
- Biggs, J. y Tang, C. (2011). *Teaching for Quality Learning at University*. New York: Open University Press - McGraw-Hill Education
- Cacelles, A. (1993) *Systems Decomposition and Coupling*. *Cybernetics and Systems*. *AnInternational Journal*, 24, 305-323.
- Chiappe, A. (2008). *Diseño instruccional: Oficio, fase y proceso*. *Revista Educación y Educadores*, 11 (2),229-239. Recuperado de:
<http://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/view/742/824>
- Coll, C. (2016) *Constructivismo e intervención educativa. Como enseñar lo que hay que construirse*. In E. Barbera, A. Bolivar, J. Calvo, C. Coll, J. Fuster, M. Garcia et al. (Eds.), *El constructivismo en la pr_actica [Constructivism in Practice]* (pp. 5-36). Madrid: Grao.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

- Fernández, C. (2004). *Un modelo para la caracterización y diagnóstico de procesos educativos*. Tesis, en ingeniería de Telecomunicaciones. Dpto. de Ingeniería Telemática Univ. Carlos III, 2004. Madrid-España.
- Ferreira, A. (2012). *Creencias y concepciones docentes sobre la evaluación de los aprendizajes en el contexto universitario*. Tesis de Licenciatura. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima-Perú.
- Garner, H. (1995) *Inteligencias Múltiples. La Teoría en la Práctica*. Barcelona: Paidós. Buenos Aires
- Gómez, I. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación matemática venezolana*, 10 (2): 225-247. Recuperado en <http://www.emis.de/journals/BAMV/content/vol10/igomez.pdf>
- Ibañez, G. (1992). *Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formación*. En *Aula*, no1, abril, pp. 13-15
- Maribe, R. (2009). *Instructional Design: The ADDIE*. Approach. doi:10.1007/978-0-387-09506-6
- Modino, G. (2014). *Modelos mentales y conceptuales: Elementos para repensar la enseñanza y el aprendizaje*. Enfoques, vol. XXVI, núm. 1, 2014, pp.57-78 Universidad Adventista del Plata Libertador San Martín, Argentina
- Murillo, J y Román, M. (2008). La evaluación educativa como derecho humano. *Revista Iberoamericana de Gestión Educativa*, 1 (1) 1-5 Recuperado de: <http://www.rinace.net/riee/numeros/vol1-num1/editorial.pdf>.
- Novoa, E. y Rodríguez, J. (2015). *Diseño de un sistema Web para el seguimiento y evaluación de los alumnos de la Facultad de Ciencias Contables*. [Tesis de Licenciatura. Universidad de San Martín de Porres.] Repositorio institucional: https://repositorio.usmp.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12727/2027/novoa_rodriguez.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Piaget, J. (1946) *La formación del símbolo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Pino, E. (2013). *La dimensión social de la universidad del siglo XXI. Creación del programa de aprendizaje-servicio en la Universidad Técnica de Ambato*. [Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.] Repositorio institucional: <https://eprints.ucm.es/id/eprint/22393/1/T34660.pdf>
- Popper, K. (1985). *La lógica de la investigación científica*. 1o ed., Trad. de Víctor Sánchez, Madrid: Tecnos
- Rossi, J. (2008). *Construcción y evaluación del plan curricular en la universidad*. Editorial Hozlo S. R. L. Perú

- Rodríguez, D, Valldeoriola, J. (2014). *Metodología de la investigación*. Universidad Oberta de Cataluña. Material docente de la UOC.
- Salas, LL. y Umaña, A. (2010). *Diseño y mediación de objetos de aprendizaje*. Revista Innovaciones educativas ISSN 1022-9825. Año XII. Número 17.
- Solorzano, G. (2019) *Modelo categórico del proceso enseñanza-aprendizaje*. [Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión.] Repositorio institucional: <http://repositorio.unjfsc.edu.pe/handle/UNJFSC/4507>
- Savasci, A, y Acikalin, Y. (2009). *Teacher beliefs and practice in science education*. Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching, Volume 10, Issue 1, Article 12, p.1 (Jun., 2009)
- Solórzano, G. (2019) Modelo categórico del proceso enseñanza-aprendizaje. [Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión.] Repositorio institucional: <http://repositorio.unjfsc.edu.pe/handle/UNJFSC/4507>
- Siemens , G. (2004) Conectivismo: Una teoria de aprendizaje para la era digital. Disponible en http://www.educationau.edu.au/jahia/webdav/site/myjahiasite/shared/globalsummit/gs2006_siemens.pdf
- Tobón, M. (2007). *Diseño instruccional en un entorno de aprendizaje abierto*. Universidad Tecnológica de Pereira. Recuperado de http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Especialidad/Sem_ElabProTer/U3/24_Disenoinstruccional.pdf
- UNESCO. (2013). *Hacia un aprendizaje universal. Recomendaciones de la comisión especial sobre métricas de los aprendizajes*. Recuperado de: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002241/224102s.pdf>
- Vallejo, M. (2002). *El diseño de investigación: una breve revisión metodológica*. Derechos reservados, Copyright © 2002: Instituto Nacional de Cardiología Ignacio Chávez. 72 : 8-12
- Valor, J. (1998). *Axiomatización conjuntista de las teorías de la ciencia experimental*. Lluli. Vol 21, 1998, 195-224
- Vidal, R. (2019). *La topología matemática en el liderazgo administrativo*. [Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional del Callao.] Repositorio institucional: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/us/>
- Wiliam, D (2018). *Embedded formative assessment*. (2nd Edn). Bloomington, IN: Solution Tree Press.

Yukavetsky, J. (2003). La elaboración de un módulo instruccional. Preparado para el Centro de Competencias de la Comunicación Universidad de Puerto Rico en Humacao Proyecto de Titulo V Gloria J. Yukavetsky, M.A.Ed. Recuperado a partir de http://academic.uprm.edu/~marion/tecnofilia2011/files/1277/CCC_LEDUMI.pdf