UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SANCHÉZ CARRIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE LOS RECÍPROCOS DE LOS NÚMEROS PRIMOS GEMELOS

PARA OPTAR POR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

Presentado por:

Bach. Diana Santiago Guillen

Asesor:

Mg. Carlos Roberto Pesantes Rojas

HUACHO - PERÚ

2021

MIEMBROS DEL JURADO

Mg. Carlos Roberto Pesantes Rojas

Asesor

Mo. Isidro Javier Ríos Pérez

Presidente

Mo. Héctor Alexis Herrera Vega

Secretario

Mo. Cristian Milton Mendoza Flores

Vocal

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios y a mis padres por su apoyo incondicional durante mi vida y en especial, durante el desarrollo de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

El presente trabajo consiste en el estudio de algunas propiedades de los números primos como son: función cantidad de números primos $\pi(x)$, función cantidad de números primos gemelos $\pi_2(x)$, función de Mangoldt $\Lambda(x)$, función de Chebyshev $\vartheta(x)$, suma de inversos de números primos. El trabajo finalizará con la demostración del teorema de Brun, que dice que la suma

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$

es convergente, que refuerza la idea que la cantidad de números primos gemelos es finita, esto es, que la conjetura de los números primos gemelos es falsa.

Palabras claves: Números primos, números primos gemelos, funciones aritméticas, conjetura de los números primos gemelos, teorema de Brun.

ABSTRACT

The present work consists is the study of some properties of the prime numbers such as: number os prime numbers function $\pi(x)$, number of twin prime numbers function $\pi_2(x)$, Mangoldt function $\Lambda(x)$, Chebyshev function $\vartheta(x)$, summation of reciprocal of prime numbers. The work will end with the proof of Brun's theorem, which says that

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$

is convergent, which reinforces that the number of twin prime numbers is finite, that is, the twin prime numbers conjecture is false.

Keywords: Prime numbers, twin prime numbers, arithmetic functions, twin prime numbers conjecture, Brun's theorem.

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos muy antiguos los números primos han sido objeto de estudio e interés. En la Grecia antigua, fueron estudiados por los pitagóricos y Euclides. Los pitagóricos estaban fascinados con los números primos por su característica de ser indivisibles. Euclides demostró que los números primos son, en cantidad, infinitos.

Todos los números primos a excepción de 2 son impares, esto es, dados p, q numeros primos se tiene que $p - q \geq 2$ cuando $p, q \neq 2$ y $p - q = 1$ si y solo si $p = 3$ y $q = 2$. Nos haremos la siguiente pregunta: ¿Qué podemos decir cuando $p - q = 2$? Los números primos p, q tal que $p - q = 2$ son llamados números primos gemelos.

En 1912, en un congreso matemático internacional, Edmund Landau mencionó cuatro viejas conjeturas que parecían irresolubles en ese momento.

- Conjetura de Golbach: Todo número natural par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.
- Entre dos números naturales cuadrados perfectos consecutivos existe un número primo.
- Conjetura de los primos gemelos: Existen infinitos números primos gemelos.
- Conjetura de Landau: Existen infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

Conjeturas que hasta el momento no han sido corroboradas o refutadas.

Viggo Brun (1885 - 1978) atribuye a Paul Stäckel (1862 - 1919) el primer uso del término ``números primos gemelos''. Stäckel obtuvo algunos cálculos numéricos relacionados con las conjeturas mencionadas arriba.

La constante de Brun B es definida como la suma de los recíprocos de todos los números primos

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \cdots$$

Si esta serie fuese divergente entonces respondería afirmativamente a la conjetura de los números primos gemelos inmediatamente. Brun probó, en cambio, que esta serie es convergente. El presente trabajo de tesis se da a la tarea realizar detalladamente la prueba de tal afirmación.

Posteriormente; Selmet (1942), Fröberg (1961), Bohman (1973), Shanks & Wrench (1974), Brent (1975, 1976), Nicely (1995, 2001) y otros, realizaron mejores estimaciones numéricas de la constante B. Recientes cálculos arrojan que

$$B = 1.9021605831 \ldots$$

usando grandes bases de datos de números primos gemelos.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Descripción y formulación del problema

Un número primo es un número mayor que 1 con solamente dos divisores, 1 y el mismo número. Euclides probó, S. III A.C., que existe una cantidad infinita de números primos y que todo número natural mayor que 1 es producto de una combinación única de números primos (teorema fundamental de la aritmética). También, se sabe que la suma de los inversos de los números es infinita. Los números primos gemelos son pares de números primos $(p, p+2)$. La conjetura de los números primos gemelos dice que los pares de números gemelos es infinito. Sin embargo, el teorema de Brun sobre los números primos gemelos indica que la suma de los inversos de los números primos gemelos es convergente. Esta suma mencionada es llamada constante de Brun. Esto no responde a la conjetura de los números primos gemelos, pero sí da luces que la cantidad de números primos gemelos es finita, esto es, la conjetura podría ser falsa. La convergencia de la suma muestra la escasez relativa de los primos gemelos dentro de los números primos. El teorema de Brun sobre primos gemelos, de hecho, da un límite superior al número de pares primos gemelos menor o igual a cierto número.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿La serie de los recíprocos de los números primos gemelos es convergente?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Cuál es la función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\pi(x) < f(x)$ con $x \geq$ a para algún $a \in \mathbb{R}^+$?
- ¿Cuál es la función $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\pi_2(x) < g(x)$ con $x \geq$ a para algún $a \in \mathbb{R}^+$?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Probar si la serie de los recíprocos de los números primos gemelos es convergente.

1.3.2. Objetivos específicos

Determinar una función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\pi(x) < f(x)$ con $x \geq$ a para algún $a \in \mathbb{R}^+$.

Determinar una función $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\pi_2(x) < g(x)$ con $x \geq$ a para algún $a \in \mathbb{R}^+$.

1.4. Justificación de la investigación

La presente investigación se justifica ya que se basa en la teoría de los números primos, los cuales juegan un papel muy importante en la teoría de números y en nuestra vida cotidiana por ejemplo en los bancos o en centros financieros para seguridad de las transferencias bancarias y otras operaciones en donde se necesita números muy grandes que sirvan como claves y difíciles de ser detectados además para ello también utilizan la criptografía. Por otro lado, en la actualidad existen muchos problemas sobre números primos que se encuentran sin demostración, tales como: la conjetura de los números primos gemelos, la conjetura de Goldbach, la nueva conjetura de Mersenne, la famosa hipótesis de Riemann tiene una relación muy estrecha con los números primos, etc. Todo esto son motivos suficientes para realizar investigaciones en esta rama de la matemática.

1.5. Delimitación del estudio

La investigación se encuentra enmarcada dentro del análisis matemático y la teoría de números, en particular se estudia la constante de Brun, que guarda relación con la conjetura de los números primos gemelos, en forma detallada y con diversos ejemplos ilustrativos, para convertirse en un punto de partida para cualquier estudiante y/o docente interesado en el tema.

Por la naturaleza teórica de la investigación, ésta no tiene limitantes, temporales, espaciales ni sociales.

1.6. Viabilidad del estudio

- La investigación es viable dado que existen materiales bibliográficos en bibliotecas especializadas, en internet, en repositorios académicos nacionales e internacionales, que son suficientes para su desarrollo.
- Respecto a lo económico, es autofinanciado por el tesista, además se cuenta con materiales de escritorio y de impresión.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Antecedentes de la investigación

- **Nivel Internacional**

Walsh, N. (2010): en su tesis titulada *“Progresiones aritméticas en subconjuntos de los primos” – Argentina.* Para optar el título de licenciado en Matemáticas menciona que, en el 2004, en uno de los trabajos más importantes de los últimos tiempos en teoría de números, Ben Green y Terence Tao demostraron que los números primos poseen progresiones aritméticas arbitrariamente largas. En este objetivo de este trabajo es demostrar que los métodos de Green y Tao se pueden adaptar para encontrar progresiones aritméticas arbitrariamente largas en diversos subconjuntos de los primos. Un ejemplo de aplicación del resultado es para el conjunto de primos gemelos.

Barrero, E. (2013): en su tesis titulada *“La conjetura de los primos gemelos en un mundo paralelo al mundo de los números enteros” – Colombia.* Para optar el grado académico de maestría en Ciencias Matemáticas, analizó algunas conjeturas sobre el número de polinomios primos gemelos para el anillo de polinomios de coeficientes en un cuerpo finito Fq[X]. En el primer capítulo, se establece los requerimientos mínimos de la teoría aritmética de polinomios sobre un cuerpo finito Fq. En el segundo capítulo, se examinó el trabajo de Effinger, Hincks y Mullen, donde se establece una conjetura aún no demostrada. En el tercer capítulo, se estudia el trabajo de Pollack, donde se propone una nueva conjetura y se establece, bajo ciertas condiciones, una estimativa para la existencia de polinomios primos gemelos.

- **Nivel Nacional**

Tantarico, G. (2019): en su tesis titulada *"Teorema de los números primos" – Perú.* Para optar el grado académico de maestría en Matemáticas, analizó la demostración del Teorema de los números primos usando herramientas del análisis complejo. El teorema de los números primos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1$$

Donde $\pi(x)$ es la cantidad de números primos menores o iguales a x.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Preliminares

Definición 1.

Dados $n, d \in \mathbb{N}$. Se dice que d es divisor de n, o que d divide n, si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = qd$. Denotaremos esto como $d|n$.

Ejemplo 1.

a) 1 divide a cualquier número natural.

b) Todos los divisores de 28 son $1, 2, 4, 7, 14$ y 28.

c) Todos los divisores de 23 son 1 y 23.

Definición 2.

Un número natural p es un número primo si $p > 1$ y tiene solamente dos divisores.

Ejemplo 2.

Los números primos menores que 100 son: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ $31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,$ 89 y 97.

Proposición 1. Teorema fundamental de la aritmética.

Dado un número natural $n \geq 2$, existen únicos $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ y únicos números primos $p_1 < \cdots < p_r$, con $r \in \mathbb{N}$, tal que $n = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$.

(Ver teorema 1.10, capítulo 1, página 17, Apostol [1])

Proposición 2.

El conjunto de todos los números primos es infinito.

Demostración.

Supongamos que existe solo una cantidad finita de números primos, esto son $p_1, \ldots, p_n$ números primos diferentes. Consideremos $N = p_1 \ldots p_n + 1 > 1$. Por la proposición 1, existe p_i número primo tal que divide a N. Luego, p_i divide a $N - p_1 \ldots p_n = 1$. Esto implica que $p_i = 1$. Contradicción. Por tanto, existen infinitos números primos.

Definición 3.

Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Denotaremos una sucesión como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o simplemente $(x_n)_n$, donde $x_n = f(n)$.

Definición 4.

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice convergente si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ cumpliendo $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Se dice que x es el límite de $(x_n)_n$. Denotaremos esto como $\lim_n x_n$ o $x_n \to x$.

Una sucesión en $\mathbb{R}$ se dice divergente en caso no sea convergente.

Proposición 3.

El límite de toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ único.

Demostración.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente y $x, y \in \mathbb{R}$ límites diferentes de $(x_n)_n$. Tomando $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$ existen $N, M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \frac{|x-y|}{2}$ para todo $n \geq N$ y $|x_n - y| < \frac{|x-y|}{2}$ para todo $n \geq M$. Tomando $L = \max\{N, M\}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x-y| & = & |x - x_L + x_L - y| \\ & \leq & |x - x_L| + |x_L - y| \\ & < & \dfrac{|x-y|}{2} + \dfrac{|x-y|}{2} \end{array}$$

De donde, $|x-y| < |x-y|$. Contradicción. Por tanto, el límite de una sucesión convergente es única.

Definición 5.

Sea $(a_n)_n$ sucesión en $\mathbb{R}$. Definiremos una nueva sucesión como sigue

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

La sucesión $(s_n)_n$ será llamada serie de términos $(a_n)_n$ y denotada como

$$\sum_{n\geq 1} a_n$$

Denotaremos a su límite como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

Proposición 4.

Si la serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n$$

en $\mathbb{R}$ es convergente, entonces

$$\lim_n a_n = 0.$$

Demostración.

Consideremos la sucesión $(S_n)_n$, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, que converge a $L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. La subsucesión $(S_{n-1})_n$ converge a L también. Luego,

$$\text{lím } a_n = \text{lím } S_n - S_{n-1} = L - L = 0.$$

Ejemplo 3.

El recíproco del teorema anterior es falso. En el ejemplo 23, capítulo 4, página 106, Lima [6]; se comprueba que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

es divergente, sin embargo

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Definición 6.

Un par de números primos gemelos son dos números primos de la forma $(p, p+2)$.

Ejemplo 4.

a) Algunos pares de primos gemelos son: $(3,5), (5,7), (11,13), (17,19)$ y $(29,31)$.

b) El número 23 no pertenece a ningún par de primos gemelos, debido que 21 y 25 no son números primos.

Definición 7

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{Z}$. Se dice que N es el máximo entero, denotado como $[x]$, si

$$N = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Proposición 5.

Sea $x \in \mathbb{R}$. El entero $[x]$ es el único entero tal que $[x] \leq x < [x] + 1$. Equivalentemente, $x - 1 < [x] \leq x$.

Demostración.

Por definición $[x] \leq x$. Ahora, suponer que $x \geq [x] + 1$ implicaría que

$$[x] + 1 \in \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Tomando máximo en el conjunto anterior tenemos

$$[x] + 1 \leq \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} = [x]$$

Que es una contradicción. Así, la suposición anterior es falso. Por tanto, $x < [x] + 1$.

Falta probar la unicidad. Ahora, supongamos otro $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

De donde,

$$-n - 1 < -x \leq -n.$$

Sumando con

$$[x] \leq x < [x\} + 1$$

tenemos

$$[x] - n - 1 < 0 < [x] + 1 - n.$$

De donde

$$-1 < [x] - n < 1$$

Como $[x] - n \in \mathbb{Z}$, debemos tener que

$$[x] - n = 0,$$

esto es,

$$[x] = n.$$

Termina la prueba.

2.2.2. Función O

Definición 8.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo no acotado superiormente, $f: I \to \mathbb{R}, g: I \to \mathbb{R}^+$ funciones y $a \in I$. Se escribe:

a) $f(x) = O(g(x))\ si\ x \geq a$, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mg(x)\ \forall x \geq a$.

b) $f(x) = O(g(x))\ si\ x > a$, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mg(x)\ \forall x > a$.

c) $f(x) = O(g(x))$, si existe $M > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq Mg(x)\ \forall x \geq a$.

Proposición 6.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo no acotado, $f, h: I \to \mathbb{R}, g, p: I \to \mathbb{R}^+$ funciones, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \in I$ tales que

$$f(x) = O(g(x)), h(x) = O(p(x))\ si\ x \geq a.$$

Se cumple:

a) $f(x) + \lambda h(x) = O(\text{máx}\{g(x), p(x)\})\ si\ x \geq a.$

b) $f(x)h(x) = O(g(x)p(x))\ si\ x \geq a.$

c) Si f, g son integrables sobre $[a, x] \subseteq I$ con $x \geq a$, entonces

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)\ si\ x \geq a.$$

d) Si f, g son integrables sobre $[x, +\infty\rangle \subseteq I$ con $x \geq a$, entonces

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = O\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right)\ si\ x \geq a.$$

Todo lo anterior vale, también, para $x > a$.

Demostración.

Por hipótesis, existen $M, N > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq Mg(x), |h(x)| \leq Np(x) \quad \forall x \geq a.$$

a) Dado $x \geq a$, tenemos

$$\begin{array}{rcc} |f(x) + \lambda h(x)| & \leq & |f(x)| + |\lambda||h(x)| \\ & \leq & Mg(x) + |\lambda|Np(x) \\ & \leq & (M + |\lambda|N)g(x) + (M + |\lambda|N)p(x) \\ & \leq & (M + |\lambda|N)\ \text{máx}\{p(x), g(x)\} \end{array}$$

Esto es,

$$|f(x) + \lambda h(x)| \leq (M + |\lambda|N)\ \text{máx}\{p(x), g(x)\} \quad \forall x \geq a.$$

Por tanto,

$$f(x) + \lambda h(x) = O(\text{máx}\{p(x), g(x)\})\ si\ x \geq a.$$

b) Dado $x \geq a$, tenemos

$$\begin{array}{rcc} |f(x)h(x)| & \leq & |f(x)||h(x)| \\ & \leq & Mg(x)Np(x) \\ & = & (MN)g(x)p(x) \end{array}$$

Esto es,

$$|f(x)h(x)| \leq (MN)p(x)g(x) \quad \forall x \geq a.$$

Por tanto,

$$f(x)h(x) = O\big(p(x)g(x)\big)\ si\ x \geq a.$$

c) Dado $x \geq a$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^x f(t)dt\right| &\leq \int_a^x |f(t)|dt \\
&\leq \int_a^x Mg(t)dt \\
&= M\int_a^x g(t)dt
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leq M\int_a^x g(t)dt \quad \forall x \geq a.$$

Por tanto,

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right) \; si \; x \geq a.$$

d) Dado $x \geq a$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^{+\infty} f(t)dt\right| &\leq \int_x^{+\infty} |f(t)|dt \\
&\leq \int_x^{+\infty} Mg(t)dt \\
&= M\int_x^{+\infty} g(t)dt
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)dt\right| \leq M\int_x^{+\infty} g(t)dt \quad \forall x \geq a.$$

Por tanto,

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = O\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right) \; si \; x \geq a.$$

Terminamos de probar las proposiciones para el caso $x \geq a$. Las demostraciones anteriores valen para $x > a$.

2.2.3. Función logaritmo y función exponencial

Definición 9.

Se define la función $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

El número $\ln x$ es llamado el logaritmo natural de x o, simplemente, logaritmo de x.

Proposición 7.

La función logaritmo es una biyección C^∞ estrictamente creciente con

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

En consecuencia, como $\ln 1 = 0$ se tiene que $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ y $\ln x > 0$ si $x > 1$. Además,

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad \ln x^r = r \ln x \quad \forall x, y > 0, r \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

Ver teorema 21 y corolarios, capítulo 9, sección 7, páginas 275-276, Lima [6].

Definición 10.

Se define la función exponencial $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ como la inversa de la función logaritmo. Se define el número

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Proposición 8.

La función exponencial es una biyección C^∞ estrictamente creciente con

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Además,

$$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

Ver teorema 22, capítulo 9, sección 7, páginas 277-278, L. Lima [6].

2.2.4. Función de Mangoldt y de Chebyshev

Definición 11.

Se define la función de Mangoldt $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como

$$\Lambda(\mathrm{n}) = \begin{cases} \ln p & , \quad n = p^m \; para\ algún\ p\ primo\ y\ m \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad otro\ caso \end{cases}$$

Ejemplo 5.

Algunos valores para la función de Mangoldt son:

N	$\mathbf{\Lambda(n)}$		**N**	$\mathbf{\Lambda(n)}$		**n**	$\mathbf{\Lambda(n)}$
1	0		11	$\ln 11$		21	0
2	$\ln 2$		12	0		22	0
3	$\ln 3$		13	$\ln 13$		23	$\ln 23$
4	$\ln 2$		14	0		24	0
5	$\ln 5$		15	0		25	$\ln 5$
6	0		16	$\ln 2$		26	0
7	$\ln 7$		17	$\ln 17$		27	$\ln 3$
8	$\ln 2$		18	0		28	0
9	$\ln 3$		19	$\ln 19$		29	$\ln 29$
10	0		20	0		30	0

Proposición 9.

Dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N} \\ d|n}} \Lambda(\mathrm{d}) = \ln n.$$

Demostración.

Para $n = 1$ tenemos,

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N} \\ d|1}} \Lambda(\mathrm{d}) = \Lambda(1) = 0 = \ln 1.$$

Para $n > 1$, por la proposición 2.2, existen únicos $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ y únicos números primos $p_1 < \cdots < p_r$, con $r \in \mathbb{N}$, tal que $n = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$. De esto,

$$Div(n) = \left\{p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} : k_i \in \{0, \dots, m_i\}\ \forall i \in \{1, \dots, r\}\right\}.$$

Por definición de Λ, los divisores d de n que cumplen $\Lambda(d) \neq 0$ son de la forma p_i^k con $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq m_i$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbb{N} \\ d|n}} \Lambda(\mathrm{d}) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \Lambda\left(p_i^k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \ln p_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} m_i \ln p_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \ln p_i^{m_i} \\
&= \ln\left(p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}\right) \\
&= \ln n
\end{aligned}$$

Se sigue el resultado pedido.

Lema 1.

Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funciones tal que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dado $x > 0$ se cumple:

a)

$$[x] = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\leq x}} F\left(\frac{x}{k}\right).$$

b)

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} f(m)\left[\frac{x}{m}\right] = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ d|m}} f(d).$$

Demostración.

a) Cuando $x \geq k$ se tiene $\frac{x}{k} \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\leq x}} F\left(\frac{x}{k}\right) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\leq x}} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{[X]} 1 \\ &= [x] \end{aligned}$$

b) Usaremos el ítem anterior en la primera igualdad a seguir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} f(m)\left[\frac{x}{m}\right] &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} f(m) \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k\leq \frac{x}{m}}} F\left(\frac{x/m}{k}\right) \\ &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} f(m) \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ mk\leq x}} F\left(\frac{x}{km}\right) \\ &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\leq x}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ mk\leq x}} f(m)F\left(\frac{x}{km}\right) \end{aligned}$$

Como $x \geq mk$, tenemos que $\frac{x}{mk} \geq 1$ y, así, $F\left(\frac{x}{mk}\right) = 1$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} f(m)\left[\frac{x}{m}\right] &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ mk\leq x}} f(m)F\left(\frac{x}{km}\right)\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ mk\leq x}} f(m)(1)\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ mk\leq x}} f(m)\\
&= \sum_{\substack{m,k\in\mathbb{N}\\ mk\leq x}} f(m)
\end{aligned}
$$

Haciendo $l = mk$, tenemos $m|l$. Luego,

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} f(m)\left[\frac{x}{m}\right] = \sum_{\substack{l\in\mathbb{N}\\ l\leq x}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m|l}} f(m).$$

Como se quería.

Proposición 10.

Dado $x \geq 1$ se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] = \ln[x]!.$$

Demostración.

Probemos la igualdad de las dos sumatorias. Si $m > x$ se tiene que $\frac{x}{m} \in \langle 0,1\rangle$. De donde, $\left[\frac{x}{m}\right] = 0$ cuando $m > x$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] + \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m>x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] + \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m>x}} \Lambda(m)(0) \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] + 0 \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right]
\end{aligned}
$$

Esto comprueba la igualdad de las sumatorias.

Probemos la segunda igualdad. Por la proposición anterior

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \Lambda(m)\left[\frac{x}{m}\right] &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ d|m}} \Lambda(d) \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\leq x}} \ln m \\
&= \sum_{m=1}^{[x]} \ln m \\
&= \ln\left(\prod_{m=1}^{[x]} m\right) \\
&= \ln[x]!
\end{aligned}
$$

Donde, la primera igualdad y la segunda igualdad se sigue del lema 2.1 b), con $f = \Lambda$, y la proposición 2.9 respectivamente. Se comprueba lo pedido.

Proposición 11. Identidad de Legendre.

Dado $x \geq 1$ se tiene

$$
[x]! = \prod_{p\ primo} p^{\alpha(x.p)} = \prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}
$$

Donde

$$\alpha(x.p) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^m}\right] = \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]} \left[\frac{x}{p^m}\right].$$

Demostración.

Probemos la primera igualdad. Por la sumatoria de la proposición 2.10 y recordando que $\Lambda(n) \neq 0$ cuando n es exactamente una potencia natural de p, tenemos

$$\begin{aligned}
\ln[x]! &= \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda(m) \left[\frac{x}{m}\right] \\
&= \sum_{p\ primo} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(p^k) \left[\frac{x}{p^k}\right] \\
&= \sum_{p\ primo} \sum_{k=1}^{\infty} (\ln p) \left[\frac{x}{p^k}\right] \\
&= \sum_{p\ primo} \ln p^{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^k}\right]} \\
&= \ln\left(\prod_{p\ primo} p^{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^k}\right]}\right)
\end{aligned}$$

De donde, como ln es inyectivo,

$$[x]! = \prod_{p\ primo} p^{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^k}\right]}$$

Probemos, ahora, la igualdad de las sumatorias para $\alpha(x.p)$. Sea $m > \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$. Se sigue,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\quad m > \frac{\ln x}{\ln p} \\
\Rightarrow &\quad \ln x - m \ln p < 0 \\
\Rightarrow &\quad \ln\left(\frac{x}{p^m}\right) < 0 \\
\Rightarrow &\quad 0 < \frac{x}{p^m} < 1 \\
\Rightarrow &\quad \left[\frac{x}{p^m}\right] = 0.
\end{aligned}$$

De donde,

$$
\begin{aligned}
\alpha(x.p) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}\left[\frac{x}{p^m}\right] + \sum_{m=\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]+1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}\left[\frac{x}{p^m}\right] + \sum_{m=\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]+1}^{\infty} 0 \\
&= \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}\left[\frac{x}{p^m}\right] + 0 \\
&= \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}\left[\frac{x}{p^m}\right]
\end{aligned}
$$

Probemos, ahora, la segunda igualdad para $[x]!$. Cuando p es primo tal que $p > x$ se sigue,

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \ln p > \ln x \\
&\Longrightarrow \quad 0 < \frac{\ln x}{\ln p} < 1 \\
&\Longrightarrow \quad \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Así, cuando $p > x$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha(x.p) &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}\left[\frac{x}{p^m}\right] \\
&= \sum_{m=1}^{0}\left[\frac{x}{p^m}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
[x]! &= \prod_{p\ primo} p^{\alpha(x.p)} \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}\right)\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p> x}} p^{\alpha(x.p)}\right) \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}\right)\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p> x}} p^{0}\right) \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}\right)\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p> x}} 1\right) \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}\right)(1) \\
&= \prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} p^{\alpha(x.p)}
\end{aligned}
$$

Concluye la prueba.

Definición 12.

Se define la función de Chebyshev, $\vartheta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como,

$$\vartheta(n) = \sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq n}} \ln\ p$$

Ejemplo 6.

Algunos valores para la función de Chebyshev son:

n	$\vartheta(n)$
1	0
2	$\ln 2$
$3, 4$	$\ln 2 + \ln 3$

$5, 6$	$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5$
$7, 8, 9, 10$	$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7$
$11, 12$	$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11$
$13, 14, 15, 16$	$\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 + \ln 13$

2.2.5. Acotación de $\pi(n)$

Lema 2.

Dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$2^n \leq \binom{2n}{n} < 4^n$$

En consecuencia,

$$n \ln 2 \leq \ln(2n)! - 2 \ln n! < 2n \ln 2$$

Demostración.

Probemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, se tiene

$$\binom{2n}{n} = \binom{2}{1} = 2 = 2^n$$

que es mayor o igual que $2 = 2^n$ y menor que $4 = 4^n$.

Supongamos válido para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Luego,

$$\begin{aligned} \binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\ & \quad 2\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\binom{2n}{n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Notemos que

$$\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \in [1,2\rangle$$

Y, por hipótesis inductiva,

$$2^n \leq \binom{2n}{n} < 4^n$$

Luego, por (2.1), tenemos que

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \in [2(1)2^n, 2(2)4^n\rangle = [2^{n+1}, 4^{n+1}\rangle.$$

Se prueba así que

$$2^n \leq \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^n} < 4^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aplicando ln tenemos

$$n \ln 2 \leq \ln(2n)! - 2 \ln n! < n \ln 4 = 2n \ln 2.$$

Concluye así la prueba.

Lema 3.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ se cumple

a) $$\frac{n \ln 2}{\ln 2n} \leq \pi(2n),$$

b) $$\pi(n) < \frac{n}{\ln n}\left(\frac{4 \ln 2}{\alpha} + \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\right).$$

Demostración.

Por la proposición 2.11, cuando $x = n!$ y $x = (2n)!$, tenemos

$$\begin{cases} n! = \prod\limits_{\substack{p\ primo \\ p \leq n}} p^{\alpha(n,p)} = \prod\limits_{\substack{p\ primo \\ p \leq 2n}} p^{\alpha(n,p)} \quad , \quad (2n)! = \prod\limits_{\substack{p\ primo \\ p \leq 2n}} p^{\alpha(2n,p)} \\ \alpha(n,p) = \sum\limits_{m=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right] = \sum\limits_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right] \quad , \quad \alpha(2n,p) = \sum\limits_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left[\frac{2n}{p^m}\right] \end{cases} \tag{2.2}$$

Aplicando ln en $n!$ y $(2n)!$, de (2.2), se tiene

$$
\begin{aligned}
\ln(2n)! - 2\ln n! &= \left(\sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \alpha(2n,p)\ln p\right) - 2\left(\sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \alpha(n,p)\ln p\right)\\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \big(\alpha(2n,p) - 2\alpha(n,p)\big)\ln p\\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \left(\left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left[\frac{2n}{p^m}\right]\right) - 2\left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right]\right)\right)\ln p\\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \left(\sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)\ln p \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

a) De (2.2), (2.3) y como $[2x] - 2[x] \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
n\ln 2 &\le \ln(2n)! - 2\ln n!\\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)\ln p\\
&\le \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \ln p\\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\le 2n}} \left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]\ln p
\end{aligned}
$$

Así, se cumple a).

b) Por el lema 2 y (2.3) tenemos

$$
\begin{aligned}
2n\ln 2 &> \ln(2n)! - 2\ln n! \\
&= \sum_{\substack{p\ primo \\ p\le 2n}} \sum_{m=1}^{\left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]} \left(\left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)\ln p \\
&\ge \sum_{\substack{p\ primo \\ p\le 2n}} \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right)\ln p \\
&\ge \sum_{\substack{p\ primo \\ n<p\le 2n}} \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right)\ln p \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Analicemos los términos de la sumatoria anterior. Si $n < p \le 2n$ tenemos

$$\frac{1}{2} \le \frac{n}{p} < 1 \qquad y \qquad 1 \le \frac{2n}{p} < 2$$

De donde, cuando $n < p \le 2n$ se tiene

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 1 - 2(0) = 1$$

Esto último en (2.4) tenemos

$$
\begin{aligned}
2n\ln 2 &> \sum_{\substack{p\ primo \\ n<p\le 2n}} \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right)\ln p \\
&= \sum_{\substack{p\ primo \\ n<p\le 2n}} \ln p \\
&= \sum_{\substack{p\ primo \\ p\le 2n}} \ln p - \sum_{\substack{p\ primo \\ p\le n}} \ln p \\
&= \vartheta(2n) - \vartheta(n)
\end{aligned}
$$

Haciendo $n = 2^{r-1}$ con $r \epsilon \mathbb{N}$ se tiene

$$\vartheta(2^r) - \vartheta(2^{r-1}) < 2(2^{r-1})\ln 2 = 2^r \ln 2.$$

De aquí, por la regla telescópica,

$$\begin{aligned}
\vartheta(2^r) - \vartheta(1) &= \sum_{l=1}^{r}\left(\vartheta(2^l) - \vartheta(2^{l-1})\right) \\
&< \sum_{l=1}^{r} 2^l \ln 2 \\
&= (2^{r+1} - 1)\ln 2
\end{aligned}$$

Como $\vartheta(1) = 0$,

$$\vartheta(2^r) < (2^{r+1} - 1)\ln 2 < 2^{r+1}\ln 2 \qquad \forall r \epsilon \mathbb{N}.$$

Tomando $r = \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right], se$ cumple $r\epsilon\mathbb{N}$ tal que $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Luego,

$$\vartheta(n) \leq \vartheta(2^{r+1}) < 2^{r+2}\ln 2 = 4(2^r)\ln 2 \leq 4n\ln 2$$

Para $\alpha\epsilon\langle 0,1\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\pi(n) - \pi(n^\alpha)\right)\ln n^\alpha &= \left(\sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq n}} 1 - \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq n^\alpha}} 1\right)\ln n^\alpha \\
&= \sum_{\substack{p\ primo \\ n^\alpha<p\leq n}} \ln n^\alpha \\
&\leq \sum_{\substack{p\ primo \\ n^\alpha<p\leq n}} \ln p \\
&\leq \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq n}} \ln p \\
&= \vartheta(n) \\
&< 4n\ln 2
\end{aligned}$$

Despejando $\pi(n)$de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\pi(n) &< \frac{4n\ln 2}{\ln n^\alpha} + \pi(n^\alpha) \\
&\leq \frac{4n\ln 2}{\alpha\ln n} + n^\alpha \\
&\leq \frac{n}{\ln n}\left(\frac{4\ln 2}{\alpha} + \frac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Como se quiere.

Lema 4.

La función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^{-c}\ln x$, con $c > 0$, tiene máximo global en $x = e^{1/c}$ con valor $y = \frac{1}{ce}$. Esto es,

$$x^{-c}\ln x \leq \frac{1}{ce} \qquad \forall x > 0$$

Además de esto, $f(x)$ es creciente si $x < e^{1/c}$ y $f(x)$ es decreciente si $x > e^{1/c}$.

Demostración.

El único valor donde $f'(x) = 0$ es $x = e^{1/c}$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1 - c\ln x)x^{-c-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - c\ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = e^{1/c}. \end{aligned}$$

Probemos que $f'(x) > 0$ si $x < e^{1/c}$ y $f'(x) < 0$ si $x > e^{1/c}$. En efecto,

- Si $x < e^{1/c}$, entonces $1 - c\ln x > 0$. Luego, $f'(x)$=$(1 - c\ln x)x^{-c-1} > 0$.
- Si $x > e^{1/c}$, entonces $1 - c\ln x < 0$. Luego, $f'(x)$=$(1 - c\ln x)x^{-c-1} < 0$.

Esto implica que f es creciente si $x < e^{1/c}$ y f es decreciente si $x > e^{1/c}$. Con esto, $x = e^{1/c}$ es máximo global de f, con valor

$$\begin{aligned} f\left(e^{1/c}\right) &= \left(e^{1/c}\right)^{-c}\ln\left(e^{1/c}\right) \\ &= e^{-1}\left(\frac{1}{c}\right) \\ &= \frac{1}{ec}. \end{aligned}$$

Termina la prueba.

Proposición 12.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se tiene

$$\frac{n}{6\ln n} < \pi(n) < \frac{6n}{\ln n}.$$

Demostración.

Separemos en dos partes.

<u>Parte 1.</u>

Probemos que $\frac{n}{6\ln n} < \pi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Por el lema 2.3 a) tenemos para $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \pi(2k) &\geq \frac{k\ln 2}{\ln 2k} \\ &= \left(\frac{\ln 2}{2}\right)\left(\frac{2k}{\ln 2k}\right) \\ &> \frac{1}{4}\left(\frac{2k}{\ln 2k}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

De donde se implica

$$\pi(2k) > \frac{1}{6}\left(\frac{2k}{\ln 2k}\right).$$

el resultado para el caso para n par.

Ahora, de (2.5),

$$\begin{aligned} \pi(2k+1) &\geq \pi(2k) \\ &> \frac{1}{4}\left(\frac{2k}{\ln 2k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2k+1}\right)\left(\frac{2k+1}{\ln 2k}\right) \\ &\geq \frac{1}{6}\left(\frac{2k+1}{\ln 2k}\right) \\ &> \frac{1}{6}\left(\frac{2k+1}{\ln(2k+1)}\right) \end{aligned}$$

que es el resultado pedido para n impar.

<u>Parte 2.</u>

Probemos que $\pi(n) < \frac{n}{6\ln n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aplicando el lema 2.4 tenemos

$$n^{-1/3}\ln n \le \frac{3}{e}.$$

Luego, hacemos $\alpha = 2/3$ en el lema 2.3, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \pi(n) & < & \frac{n}{\ln n}\left(\frac{4\ln 2}{2/3} + \frac{\ln n}{n^{1-2/3}}\right) \\ & = & \frac{n}{\ln n}\left(6\ln 2 + n^{-1/3}\ln n\right) \\ & \le & \frac{n}{\ln n}\left(6\ln 2 + \frac{3}{e}\right) \end{array}$$

Como

$$6\ln 2 + \frac{3}{e} = 5.2625\ \ldots$$

Tenemos que

$$\pi(n) < \frac{6n}{\ln n}$$

Concluye la prueba.

Corolario 1.

$$\pi(x) < \frac{6x}{\ln x} \qquad \forall x \ge 3.$$

Demostración.

Por el lema 2.4, para $c = 1$, tenemos que $x^{-1}\ln x$ es decreciente si $x > e$. Esto equivale a que $\frac{x}{\ln x}$ es creciente si $x > e$. Tomemos ahora $x \ge 3$. Como $[x] \le x$ y por la proposición 2.12 tenemos

$$\begin{array}{rcl} \pi(x) & = & \pi([x]) \\ & < & \frac{6[x]}{\ln[x]} \\ & \le & \frac{6x}{\ln x} \end{array}$$

Como se quería.

Algunos símbolos:

$\pi(x)$: número de números primos menores o iguales que x.

$\pi_2(x)$: número de pares de números primos $(p, p+2)$ tal que $p \leq x$.

$\tau(n)$: número de divisores de un número natural n.

$\ln(x)$: el logaritmo de base e.

2.3. Formulación de hipótesis

2.3.1. Hipótesis general

La suma de los recíprocos de los números primos gemelos es convergente.

2.3.2. Hipótesis específicas

- Existe una cota inferior cota superior para la cantidad de números primos.
- Existe una cota superior para la cantidad de números primos gemelos.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Diseño metodológico

3.1.1. Tipo de investigación

El tipo de investigación que se aplicó en el presente trabajo fue descriptivo, considerando al mismo tiempo los siguientes métodos:

Método Deductivo: Porque nos permite mostrar determinados ejemplos como casos especiales de los resultados obtenidos.

Método Hipotético-Deductivo: Porque se analizó la convergencia de los números primos gemelos, a partir de la formulación de hipótesis y los procedimientos deductivos.

3.2. Población y muestra

Población:

En la investigación se consideró como población al conjunto de todos los números primos.

Muestra:

Se consideró como muestra a los números primos gemelos y las diferentes propiedades.

3.3. Operacionalización de variables

El conjunto de números primos gemelos.

3.4. Técnica de recolección de datos

TECNICA	INSTRUMENTO
Análisis Documental: se realizó la búsqueda de información registradas en otras investigaciones ya sea de impresas, electrónicas, libros, papers, etc.	Fichas textuales y de resumen.
Método Deductivo: Se llegó a una conclusión a partir de premisas.	Demostración.

3.5. Técnicas para el procesamiento de información

A partir de la información obtenida se procedió a: analizar, interpretar y utilizar teoremas y proposiciones permitiendo asi abordar el resultado del problema planteado.

3.6. Materiales y equipos

- Material de Escritorio
- Libros

Capítulo 4

Resultados y Discusión

4.1. Suma y producto de inversos de números primos

Proposición 13. Identidad de Abel.

Para toda función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$. Si $g\colon I \to \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}^{+}$ con derivada continua sobre el intervalo $[y, x] \subseteq I$, donde $0 < y < x$, entonces

$$\sum_{\substack{n \epsilon \mathbb{N} \\ y < n \leq x}} f(n)g(n) = F(x)g(x) - F(y)g(y) - \int_{y}^{x} F(t)g'(t)dt.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \epsilon \mathbb{N} \\ y < n \leq x}} f(n)g(n) &= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} f(n)g(n) \\
&= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} \big(F(n) - F(n-1)\big)g(n) \\
&= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} F(n)g(n) \; - \sum_{n=[y]+1}^{[x]} F(n-1)g(n) \\
&= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} F(n)g(n) \; - \sum_{n=[y]}^{[x]-1} F(n)g(n+1) \\
&= F([x])g([x]) - F([y])g([y]) + \sum_{n=[y]}^{[x]-1} F(n)\big(g(n) - g(n+1)\big) \\
&= F([x])g([x]) - F([y])g([y]) - \sum_{n=[y]}^{[x]-1} F(n)\big(g(n+1) - g(n)\big) \\
&= F([x])g([x]) - F([y])g([y]) - \sum_{n=[y]}^{[x]-1} F(n) \int_{n}^{n+1} g'(t)dt \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Como $F(t) = F(n)$ para todo $t\epsilon[n, n+1\rangle$, $F(t) = F([x])$ para todo $t\epsilon\big[[x], x\big]$ y $F(t) = F([y])$ para todo $t\epsilon\big[[y], y\big]$ entonces

$$F(n)\int_n^{n+1} g'(t)dt \quad = \quad \int_n^{n+1} F(n)g'(t)dt \quad = \quad \int_n^{n+1} F(t)g'(t)dt$$

$$\begin{aligned} F([x])g([x]) \quad &= \quad F([x])g(x) - \int_{[x]}^{x} F([x])g'(t)dt \quad = \quad F([x])g(x) - \int_{[x]}^{x} F(t)g'(t)dt \\ F([y])g([y]) \quad &= \quad F([y])g(y) - \int_{[y]}^{y} F([y])g'(t)dt \quad = \quad F([y])g(y) - \int_{[y]}^{y} F(t)g'(t)dt \end{aligned}$$

Luego, en (2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ y<n\leq x}} f(n)g(n) \quad &= \quad F([x])g(x) - \int_{[x]}^{x} F([x])g'(t)dt - F([y])g(y) + \int_{[y]}^{y} F([y])g'(t)dt \\ &\qquad - \sum_{n=[y]}^{[x]-1} \int_n^{n+1} F(t)g'(t)dt \\ &= \quad F([x])g(x) - F([y])g(y) + \int_{[y]}^{y} F([y])g'(t)dt - \int_{[x]}^{x} F([x])g'(t)dt \\ &\qquad - \int_{[y]}^{[x]} F(t)g'(t)dt \\ &= \quad F([x])g(x) - F([y])g(y) - \int_{y}^{x} F([y])g'(t)dt \end{aligned}$$

Proposición 14. Fórmula de sumación de Euler.

Si $g: I \to \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}^+$ con derivada continua sobre el intervalo $[y, x] \subseteq I$, donde $0 < y < x$, entonces

$$\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ y<n\leq x}} g(n) = g(x)([x] - x) - g(y)([y] - y) + \int_y^x (t - [t])g'(t)dt$$

Demostración.

Consideremos $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida como $f(n) = 1$ y $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ n\leq x}} f(n) = \sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ n\leq x}} 1 = [x].$$

Reemplazando $f(n) = 1$ y $F(x) = [x]$ en la proposición 2.13 tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ y<n\leq x}} g(n) &= [x]g(x) - [y]g(y) - \int_y^x [t]g'(t)dt \\
&= [x]g(x) - [y]g(y) - \int_y^x tg'(t)dt + \int_y^x (t-[t])g'(t)dt \\
&= [x]g(x) - [y]g(y) - \left(xg(x) - yg(y) - \int_y^x g(t)dt\right) + \int_y^x (t-[t])g'(t)dt \\
&= g(x)([x]-x) - g(y)([y]-y) + \int_y^x g(t)dt + \int_y^x (t-[t])g'(t)dt
\end{aligned}$$

Note que se usó la fórmula de integración por partes en

$$\int_y^x tg'(t)dt = xg(x) - yg(y) - \int_y^x g(t)dt$$

con $u = t$ y $dv = g'(t)dt$.

Proposición 15.

Dado $x > 1$ se tiene

$$\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ y<n\leq x}} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\ln x - x + O(\ln x).$$

Demostración.

Haciendo $y = 1$ y $g(t) = \ln t$ en la proposición 14 (fórmula de sumación de Euler), para todo $x > 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ 1<n\leq x}} \ln n &= (\ln x)([x]-x) - (\ln 1)([1]-1) + \int_1^x \ln t\, dt + \int_1^x (t-[t])\ln' t\, dt \\
&= (\ln x)([x]-x) + \int_1^x \ln t\, dt + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}\, dt \\
&= (\ln x)\big(O(1)\big) + x\ln x - x + \int_1^x \frac{O(1)}{t}\, dt \\
&= O(\ln x) + x\ln x - x + \int_1^x O\left(\frac{1}{t}\right) dt \\
&= O(\ln x) + x\ln x - x + O\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) \\
&= O(\ln x) + x\ln x - x + O(\ln x)
\end{aligned}$$

De la proposición 10, se sigue lo pedido.

Proposición 16.

Dado $x > 1$ se tiene

$$\sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p = x \ln x + O(x)$$

Demostración.

Como $\Lambda(n) = 0$ cuando n no es potencia de un número primo tenemos la igualdad

$$\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N}\\ n\leq x}} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n) = \sum_{p\ primo} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \Lambda(p^m) = \sum_{p\ primo} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p$$

Notemos que si $p > x$, entonces $\frac{x}{p^m} \epsilon \langle 0,1\rangle$ para todo $m\epsilon\mathbb{N}$. De allí, cuando $p > 0$ se tiene $\left[\frac{x}{p^m}\right] = 0$ para todo $m\epsilon\mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N}\\ n\leq x}} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n) &= \sum_{p\ primo} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p \\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p + \sum_{\substack{p\ primo\\ p> x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \underbrace{\left[\frac{x}{p^m}\right]}_{0} \ln p \\
&= \sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p}_{m=1} + \underbrace{\sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N},m\geq 2\\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p}_{m\geq 2} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Analicemos el segundo término de la suma anterior. Como $[x] \leq x$ para todo $x\epsilon\mathbb{R}$ tenemos para $x > 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}, m\geq 2 \\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p &\leq \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}, m\geq 2 \\ p^m\leq x}} \frac{x}{p^m} \ln p \\
&= x \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \ln p \left(\sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}, m\geq 2 \\ p^m\leq x}} \frac{1}{p^m} \right) \\
&\leq x \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \ln p \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right) \\
&= x \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \frac{\ln p}{p(p-1)} \\
&\leq x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

De donde, para $x > 1$ tenemos

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \sum_{\substack{m\epsilon\mathbb{N}, m\geq 2 \\ p^m\leq x}} \left[\frac{x}{p^m}\right] \ln p = O(x).$$

Esto último en (2.7), para $x > 1$ tenemos

$$\sum_{\substack{n\epsilon\mathbb{N} \\ n\leq x}} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p + O(x).$$

Por la proposición 15, para $x > 1$ tenemos

$$x \ln x - x + O(\ln x) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p + O(x).$$

Despejando, para $x > 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \left[\frac{x}{p}\right] \ln p &= x \ln x - x + O(\ln x) - O(x) \\
&= x \ln x + O(x) + O(\ln x) + O(x) \\
&= x \ln x + O(\text{máx}\{\ln x, x\}) \\
&= x \ln x + O(x)
\end{aligned}$$

Termina la prueba.

Proposición 17.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números no negativos tal que para $x>1$ se tiene

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right] = x\ln x + O(x).$$

Entonces, para $x>0$ se tiene

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} \frac{a_n}{n} = \ln x + O(1).$$

Demostración.

Definamos

$$S(x)=\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} a_n \quad , \quad T(x)=\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right].$$

Afirmamos que

$$0\le S(x)-S\left(\frac{x}{2}\right)\le T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right]-2\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le \frac{x}{2}}} a_n\left[\frac{x}{2n}\right]\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le \frac{x}{2}}} a_n\underbrace{\left(\left[\frac{x}{n}\right]-2\left[\frac{x}{2n}\right]\right)}_{\ge 0}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \frac{x}{2}<n\le x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right]\\
&\ge \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \frac{x}{2}<n\le x}} a_n\underbrace{\left[\frac{x}{n}\right]}_{\ge 1}\\
&\ge \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \frac{x}{2}<n\le x}} a_n\\
&\ge \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} a_n-\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le \frac{x}{2}}} a_n\\
&= S(x)-S\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como se afirmó.

Ahora, por la proposición 16, para $x > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= x\ln x + O(x) - 2\left(\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2} + O\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= x\ln x - x\ln\frac{x}{2} + O(x) - 2O\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= x\left(\ln x - \ln\frac{x}{2}\right) + O(x) \\
&= x\ln 2 + O(x) \\
&= O(x)
\end{aligned}$$

Luego, existe $M > 0$ tal que para $x > 0$ se tiene

$$0 \leq S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \leq T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \leq Mx$$

Esto es, para todo $x > 0$ se tiene

$$S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \leq Mx$$

Cambiando x por $\frac{x}{2^{k-1}}$ con $k \in \mathbb{N}$, para todo $x > 0$ tenemos

$$S\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - S\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq \frac{Mx}{2^{k-1}}.$$

Sumando, tenemos para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(S\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - S\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Mx}{2^{k-1}} \\
S(x) - \lim_{k\to+\infty} S\left(\frac{x}{2^k}\right) &\leq 2Mx
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Afirmamos que dado $x > 0$ se tiene

$$\lim_{k\to+\infty} S\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0.$$

En efecto, tomando k suficientemente grande se tiene que $0 < \frac{x}{2^k} < 1$. Así,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq \frac{x}{2^k}}} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2^k}\right]} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{0} a_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

De donde, para todo $x > 0$ se tiene

$$\lim_{k\to+\infty} S\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0$$

cómo se afirmó. Esta afirmación en (2.8) implica que

$$S(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n \leq 2Mx \qquad \forall x > 0.$$

Usando esto último, para todo $x > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n\left(\frac{x}{n}\right) - x\ln x\right| &= \left|\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n\left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]\right) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right] - x\ln x\right| \\ &\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n \underbrace{\left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]\right)}_{\leq 1} + \left|\underbrace{\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n\left[\frac{x}{n}\right] - x\ln x}_{Por\ hipótesis\ es\ O(x)}\right| \\ &\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} a_n + Nx \\ &\leq 2Mx + Nx \\ &= (2M+N)x. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\left|\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq x}} a_n\left(\frac{x}{n}\right)-x\ln x\right|\leq(2M+N)x\qquad\forall x>0$$

Dividiendo por x tenemos

$$\left|\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq x}}\frac{a_n}{n}-\ln x\right|\leq 2M+N\qquad\forall x>0.$$

Esto es,

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq x}}\frac{a_n}{n}-\ln x=O(1)\qquad\forall x>0.$$

Como se quería probar.

Proposición 18.

Para todo $x>0$ se tiene

$$\sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1).$$

Demostración.

Escogiendo la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $a_n=\ln n$ si n es primo y $a_n=0$ si n no es primo. En la hipótesis de la proposición 17 tenemos lo afirmado en la proposición 16. Luego, por la conclusión de la proposición 17, reemplazando a_n, obtenemos lo pedido

Proposición 19.

Existe $C\in\mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\frac{1}{p}=\ln\ln x+C+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\qquad\forall x\geq 2.$$

Demostración.

Definamos $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ como

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{\ln n}{n} & , \quad n\ es\ primo \\ 0 & , \quad n\ no\ es\ primo \end{cases}$$

$g\colon \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\leq x}} f(n) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \frac{\ln p}{p}$$

y

$$g(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Reconozcamos cada parte de la fórmula de la proposición 13. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 2<n\leq x}} f(n)g(n) &= \sum_{\substack{p\ primo \\ 2<p\leq x}} f(n)g(n) \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{\substack{p\ primo \\ 2<p\leq x}} \frac{1}{p} \\ F(2)G(2) &= \left(\underbrace{f(1)}_{0} + f(2)\right) g(2) \\ &= f(2)g(2) \\ &= \left(\frac{\ln 2}{2}\right)\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \\ g'(t) &= -\frac{1}{t\ln^2 t} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 2<n\le x}} f(n)g(n) &= F(x)g(x)-F(2)g(2)-\int_2^x F(t)g'(t)dt\\
-\frac{1}{2}+\sum_{\substack{p\ primo\\ 2<p\le x}}\frac{1}{p} &= \frac{F(x)}{\ln x}-\frac{1}{2}+\int_2^x\frac{F(t)}{t\ln^2 t}dt\\
\sum_{\substack{p\ primo\\ 2<p\le x}}\frac{1}{p} &= \frac{F(x)}{\ln x}+\int_2^x\frac{F(t)}{t\ln^2 t}dt
\end{aligned}$$

Por la proposición 18,

$$F(x)=\sum_{\substack{p\ primo\\ 2<p\le x}}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1)\quad x>0.$$

Así, para $x\geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\ primo\\ 2<p\le x}}\frac{1}{p} &= \frac{F(x)}{\ln x}+\int_2^x\frac{F(1)}{t\ln^2 t}dt\\
&= \frac{\ln x+O(1)}{\ln x}+\int_2^x\frac{\ln t+O(1)}{t\ln^2 t}dt\\
&= 1+\frac{O(1)}{\ln x}+\int_2^x\frac{dt}{t\ln t}+\int_2^x\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt\\
&= 1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)+\ln\ln x-\ln\ln 2+\int_2^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt-\int_x^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt\\
&= \ln\ln x+\left(1-\ln\ln 2+\int_2^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)-\int_x^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt
\end{aligned}$$

Basta considerar

$$C=1-\ln\ln 2+\int_2^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt$$

y probar que

$$\int_x^{+\infty}\frac{O(t)}{t\ln^2 t}dt=O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\qquad x\geq 2,$$

$$\int_x^{+\infty}\frac{O(1)}{t\ln^2 t}dt\in\mathbb{R}.$$

En efecto, para $x\geq 2$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{O(1)}{t\ln^2 t}\,dt &= \int_x^{+\infty} O\left(\frac{1}{t\ln^2 t}\right) dt \\
&= O\left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt\right) \\
&= O\left(\underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\ln t}\right)}_{0} - \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\ln x}\right)
\end{aligned}
$$

Esto es, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\int_x^{+\infty} \frac{O(1)}{t\ln^2 t}\,dt\right| \le \frac{M}{\ln x} \qquad x \ge 2.$$

De aquí, para $x = 2$,

$$\left|\int_2^{+\infty} \frac{O(1)}{t\ln^2 t}\,dt\right| \le \frac{M}{\ln 2}$$

Esto comprueba que

$$\int_2^{+\infty} \frac{O(1)}{t\ln^2 t}\,dt \in \mathbb{R}.$$

Corolario 2.

Existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p\le x}} \frac{1}{p} < \ln\ln x + C \qquad x \ge 2.$$

Demostración.

Por la proposición 19, existen $C_1 \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p\le x}} \frac{1}{p} \le \ln\ln x + C_1 + \frac{M}{\ln x} \qquad x \ge 2.$$

Como ln es creciente,

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \frac{1}{p} \leq \ln\ln x + C_1 + \frac{M}{\ln 2} \qquad x \geq 2.$$

Basta considerar

$$C = C_1 + \frac{M}{\ln 2} + 1.$$

Termina la prueba.

Proposición 20.

Se tiene que

$$\prod_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{\ln x} \qquad x \geq 2.$$

Demostración.

Consideremos

$$r = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}: p^k | n\ con\ n \leq x, p\ primo, p \leq x\}.$$

Así, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq x$, por el Teorema fundamental de la aritmética, la expresión siguiente

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{r_1}} \cdots \frac{1}{p_s^{r_s}}$$

es única para $s \in \mathbb{N}$, $p_1 < \cdots < p_s$ primos y $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$. Notemos que $p_1 \leq x, \dots, p_s \leq x$ y $r_1 \leq r, \dots, r_s \leq r$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{-1} &= \prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\\
&= \prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}\right)\\
&\geq \prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{p^k}\right)\\
&\geq \sum_{k=0}^{r}\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\frac{1}{p^k}\right)\\
&\geq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq x}}\frac{1}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Usando integrales,

$$
\begin{aligned}
\int_1^{[x]+1}\frac{dt}{t} &= \sum_{n=1}^{[x]}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\\
&\leq \sum_{n=1}^{[x]}\int_n^{n+1}\frac{dt}{n}\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\leq x}}\frac{1}{n}\\
&\leq \left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Se sigue, como $x < [x] + 1$ y ln es creciente,

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{\substack{p\ primo\\ p\leq x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{-1} &\geq \int_1^{[x]+1}\frac{dt}{t}\\
&= \ln([x]+1)\\
&> \ln x\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, invertimos la última desigualdad

$$\left(\prod_{\substack{p\ primo \\ p\leq x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{-1} > \ln x$$

y obtenemos la desigualdad pedida.

4.2. Acotación de $\boldsymbol{\pi_2(x)}$

Dado $n \in \mathbb{N}$ denotemos $a_n = n(n+2)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales $x \geq 1$ y $1 \leq y \leq \sqrt{x}$, definamos el conjunto

$$A(x,y) = \#\{a_n : 1 \leq n \leq x, p\ no\ divide\ a_n\ para\ todo\ p\ primo\ p \leq y\}$$

y el número

$$R = \prod_{\substack{p\ primo \\ p\leq y}} p$$

Es inmediato que dado p número primo, $p \leq y$ si y solo si $p|R$.

Lema 5.

Se cumple que $\pi_2(x) \leq \pi(y) + A(x,y)$.

Demostración.

Sea p que se contabiliza en $\pi_2(x)$, esto es, p primo tal que $p+2$ es primo y $p \leq x$.

Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $p \leq y$. En este caso p se contabiliza en $\pi(y)$.

Caso 2. Si $p > y$. En este caso, también $p+2 > y$. Los únicos factores primos de $p(p+2)$ son p y $p+2$. Luego, q no divide $p(p+2)$ para todo $q \leq y$ con q primo. Este caso, p se contabiliza en $A(x,y)$.

Así, $\pi_2(x) \leq \pi(y) + A(x, y)$.

Denotemos números primos como

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots$$

ordenados de manera creciente.

Dado $j \geq 0$ consideraremos

$$S_j = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1.$$

Se considerará

$$\sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 = 1 \; cuando \; j = 0.$$

De esta manera

$$S_0 = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} 1 = [x].$$

Lema 6.

Se cumple que

$$A(x, y) \leq S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + S_{2k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq 2k \leq \pi(y)$.

Demostración.

Fijado $n \leq x$, denotemos m_n la cantidad de números primos que dividen R y a_n. Luego,

$$\sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 = \begin{cases} \binom{m_n}{j} & , \quad si\ j \leq m_n \\ \\ 0 & , \quad si\ j > m_n \end{cases} \tag{2.9}$$

y de la definición de $A(x, y)$ tenemos

$$A(x, y) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x \\ m_n = 0}} 1. \tag{2.10}$$

Denotemos, también,

$$C(a_n) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j S_j &= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} C(a_n) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora, tenemos cinco casos (en todos los casos usaremos (2.9)):

Caso 1. Si $m_n = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} C(a_n) &= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 \\ &= \sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{0}{j} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En este caso, $C(a_n) = 1$.

Caso 2. Si $0 < m_n \leq 2k$. Entonces

$$
\begin{aligned}
C(a_n) &= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 \\
&= \sum_{j=0}^{m_n} (-1)^j \binom{m_n}{j} \\
&= (1-1)^{m_n} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En este caso, $C(a_n) = 0$.

Caso 3. Si $2k \leq \frac{m_n+1}{2} < m_n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
C(a_n) &= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \dots p_j | a_n}} 1 \\
&= \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{m_n}{j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{2j-1} \binom{m_n}{2j-1} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{2j} \binom{m_n}{2j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{m_n}{2j} - \binom{m_n}{2j-1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{m_n - 2j + 1}{2j} - 1 \right) \binom{m_n}{2j-1} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{m_n - 4j + 1}{2j} \right) \binom{m_n}{2j-1}
\end{aligned}
$$

La condición

$$
\frac{m_n + 1}{2} \geq 2k
$$

implica que

$$
m_n - 4j + 1 \geq m_n - 4k + 1 \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.
$$

En este caso, $C(a_n) \geq 1$.

Caso 4. Si $\frac{m_n+1}{2} < 2k < m_n = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
C(a_n) &= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j \sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\dots p_j|a_n}} 1\\
&= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j \binom{m_n}{j}\\
&= \sum_{j=0}^{m_n}(-1)^j \binom{m_n}{j} - \sum_{j=2k+1}^{m_n}(-1)^j \binom{m_n}{j}\\
&= \underbrace{(1-1)^{m_n}}_{=0} - \sum_{j=k}^{h-1}(-1)^{2j+1}\binom{2h}{2j+1} - \sum_{j=k}^{h-1}(-1)^{2j+2}\binom{2h}{2j+2}\\
&= \sum_{j=k}^{h-1}\binom{2h}{2j+1} - \binom{2h}{2j+2}\\
&= \sum_{j=k}^{h-1}\left(1-\frac{2h-2j-1}{2j+2}\right)\binom{2h}{2j+1}\\
&= \sum_{j=k}^{h-1}\left(\frac{4j-2h+3}{2j+2}\right)\binom{2h}{2j+1}
\end{aligned}
$$

La condición

$$\frac{2h+1}{2} = \frac{m_n+1}{2} < 2k$$

implica que

$$4j-2h+3 \geq 4k-2h-1 > 0 \quad \forall j \in \{k, \dots, h-1\}.$$

En este caso, $C(a_n) \geq 1$.

Así, en la sumatoria anterior, haciendo $j = h-1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
C(a_n) &\geq \left(\frac{4(h-1)-2h+3}{2(h-1)+2}\right)\binom{2h}{2(h-1)+1}\\
&= \left(\frac{2h-1}{2h}\right)\binom{2h}{2h-1}\\
&= 2h-1\\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

En este caso, $C(a_n) \geq 1$.

Caso 5. Si $\frac{m_n+1}{2} < 2k < m_n = 2h-1$ con $h \in \mathbb{N}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
C(a_n) &= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j \sum_{\substack{p_1\ldots p_j|R\\ p_1\ldots p_j|a_n}} 1 \\
&= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j \binom{m_n}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{m_n}(-1)^j \binom{m_n}{j} - \sum_{j=2k+1}^{m_n}(-1)^j \binom{m_n}{j} \\
&= \underbrace{(1-1)^{m_n}}_{=0} - \sum_{j=2k+1}^{2h-1}(-1)^j \binom{2h-1}{j} \\
&= 1 - \sum_{j=k}^{h-2}(-1)^{2j+1}\binom{2h-1}{2j+1} - \sum_{j=k}^{h-2}(-1)^{2j+2}\binom{2h-1}{2j+2} \\
&= 1 + \sum_{j=k}^{h-2}\binom{2h-1}{2j+1} - \binom{2h-1}{2j+2} \\
&= 1 + \sum_{j=k}^{h-2}\left(1 - \frac{2h-2j-3}{2j+2}\right)\binom{2h-1}{2j+1} \\
&= 1 + \sum_{j=k}^{h-2}\left(\frac{4j-2h+5}{2j+2}\right)\binom{2h-1}{2j+1}
\end{aligned}
$$

La condición

$$\frac{2h+1}{2} = \frac{m_n+1}{2} < 2k$$

implica que

$$4j - 2h + 5 \geq 4k - 2h - 1 > 0 \quad \forall j \in \{k, \ldots, h-2\}.$$

En este caso, $C(a_n) \geq 1$.

Los cinco casos anteriores se resumen en: $C(a_n) = 1$ cuando $m_n = 0$ y $C(a_n) \geq 0$ cuando $m_n > 0$. Luego, de (2.11) y (2.10), tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j S_j &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} C(a_n)\\
&= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x\\ m_n=0}} C(a_n) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x\\ m_n>0}} C(a_n)\\
&\ge \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x\\ m_n=0}} 1\\
&= A(x,y).
\end{aligned}
$$

Termina la prueba.

Denotemos $d = p_1 p_2 \ldots p_j$. Denotaremos, también, T_d el número de soluciones $n \in \mathbb{N}$ de la congruencia

$$n(n+2) \equiv 0 \,\text{mód}\, d\,, \quad n \le x.$$

Notemos que

$$T_d = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\le x}} \sum_{p_1\ldots p_j | a_n} 1.$$

Este número será usado en

$$S_0 - S_1 + \cdots + S_{2k}$$

para acotar de una manera útil a $A(x,y)$.

En el siguiente resultado hallaremos una fórmula asociada a T_d.

Lema 7.

$$T_d = \begin{cases} 2^j\left(\left[\dfrac{x}{d}\right]+1\right) & , \quad d \text{ es impar}\\ 2^{j-1}\left(\left[\dfrac{x}{d}\right]+1\right) & , \quad d \text{ es par} \end{cases}$$

Demostración.

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = qd + r$, $q \geq 0$, $r \in \{0, \dots, d-1\}$. Si $n(n+2) \equiv 0 \text{ mód } d$, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $n(n+2) = hd$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} r(r+2) & = & (n-qd)(n+2-qd) \\ & = & n(n+2)-(2n+2-qd)qd \\ & = & hd-(2n+2-qd)qd \\ & = & d(h-2qn-2q+q^2d) \end{array}$$

Así se tiene que $r(r+2) \equiv 0 \text{ mód } d$. Así el número T_d depende de r y q.

- Analizando q.

  Como

  $$q = \frac{n}{d} - \frac{r}{d} \leq \frac{x}{d} - \frac{r}{d} \leq \left[\frac{x}{d}\right].$$

  Luego,

  $$q \in \left\{0, 1, \dots, \left[\frac{x}{d}\right]\right\}.$$

  Tenemos $\left[\frac{x}{d}\right] + 1$ posibilidades para q.

- Probemos que $r = 0$ o $d = r(r+2)$.

  En efecto, como $r \in \{0, \dots, d-1\}$ entonces $r \leq d-1$ y $r+2 \leq d+1$. Así,

  $$0 \leq r(r+2) \leq (d-1)(d+1) < d^2$$

  Como $d|r(r+2)$, debemos tener que $r(r+2) = 0$ o $r(r+2) = d$. En caso $r(r+2) = 0$, como $r \geq 0$, entonces $r = 0$.

- Analizando r

  Si $r > 0$, tendríamos que $d = r(r+2)$, esto es, r divide a $d = p_1 \dots p_j$. Luego, r tendría la forma

  $$r = p_{k_1} \dots p_{k_l}$$

  con $k_1 < \cdots < k_l$ tomados de $\{1, \dots, j\}$.

Caso 1. Si d es impar. Como r depende de $k_1 < \cdots < k_l$ tomados de $\{1, \dots, j\}$, tenemos $\binom{j}{l}$ posibilidades para r. Agregándole la posibilidad que $r = 0$, y como $\binom{j}{l} + 1 \leq 2^j$, tenemos, en este caso, a lo más 2^j posibilidades para r.

Caso 2. Si d es par. Se tiene que r es par. Luego, $p_{k_1} = p_1 = 2$. Como r depende de $k_2 < \cdots < k_l$ tomados de $\{2, \dots, j\}$, tenemos $\binom{j-1}{l}$ posibilidades para r. Igual que en el caso anterior, agregándole el caso $r = 0$, tenemos, en este caso, a lo más 2^{j-1} posibilidades para r.

Se sigue el resultado por el principio de multiplicación.

Denotemos

$$\tau(d) = \begin{cases} 2^j & , \quad d \text{ es impar} \\ 2^{j-1} & , \quad d \text{ es par} \end{cases}$$

Por el lema anterior

$$T_d \leq \tau(d)\left(\left[\frac{x}{d}\right] + 1\right) \leq \tau(d)\frac{x}{d} + \tau(d). \tag{2.12}$$

Denotaremos, también,

$$V_k = \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j}.$$

Lema 8.

Se cumple que

a) $$\sum_{j=1}^{2k} \sum_{p_1 \dots p_j | R} \tau(p_1 \dots p_j) < e^2 \pi^{2k}(y).$$

b) $$1+\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j\sum_{p_1\dots p_j|R}\frac{\tau\left(p_1\dots p_j\right)}{p_1\dots p_j}=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\ primo\\ p|\frac{R}{2}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)-V_k.$$

Demostración.

a) Como $p_1,\dots,p_j$ son tomados de entre todos los números primos menores que $[y]$, hay $\binom{\pi(y)}{j}$ posibilidades. Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2k}\sum_{p_1\dots p_j|R}\tau(p_1\dots p_j) &\leq \sum_{j=1}^{2k}\sum_{p_1\dots p_j|R}2^j\\
&\leq \sum_{j=1}^{2k}2^j\binom{\pi(y)}{j}\\
&= \sum_{j=1}^{2k}2^j\left(\frac{\pi(y)(\pi(y)-1)\dots(\pi(y)-j+1)}{j!}\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{2k}\frac{2^j\pi^j(y)}{j!}\\
&\leq \sum_{j=1}^{2k}\frac{2^j\pi^{2k}(y)}{j!}\\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{2k}\frac{2^j}{j!}\right)\pi^{2k}(y)\\
&< e^2\pi^{2k}(y)
\end{aligned}$$

b) Notemos que

$$\sum_{j=1}^{\pi(y)}(-1)^j\sum_{p_1\dots p_j|R}\frac{\tau(p_1\dots p_j)}{p_1\dots p_j}=$$

$$= \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 = 2}} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^j}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 = 2}} \frac{2^{j-1}}{p_1 \dots p_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^j}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_2 \dots p_j | R \\ p_2 \neq 2}} \frac{2^{j-2}}{p_2 \dots p_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^j}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=0}^{\pi(y)-1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^{j-1}}{p_1 \dots p_j}$$

$$= \underbrace{\dots}_{j=\pi(y)} - \underbrace{1}_{j=0} + \sum_{j=0}^{\pi(y)-1} (-1)^j \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^j}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=0}^{\pi(y)-1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^{j-1}}{p_1 \dots p_j}$$

La expresión

$$\underbrace{\dots}_{j=\pi(y)} = (-1)^{\pi(y)} \sum_{\substack{p_1 \dots p_{\pi(y)} | R \\ p_1 \neq 2}} \frac{2^{\pi(y)}}{p_1 \dots p_{\pi(y)}}$$

Ya que no existe $\pi(y) + 1$ números primos menores o iguales a y. Luego,

$$\sum_{j=1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -1+\sum_{j=0}^{\pi(y)-1}(-1)^j\sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\neq 2}}\frac{2^j}{p_1\dots p_j}+\sum_{j=0}^{\pi(y)-1}(-1)^{j-1}\sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\neq 2}}\frac{2^{j-1}}{p_1\dots p_j}\\
&= -1+\sum_{j=0}^{\pi(y)-1}(-1)^j\sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\neq 2}}\frac{2^j-2^{j-1}}{p_1\dots p_j}\\
&= -1+\sum_{j=0}^{\pi(y)-1}(-1)^j\sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\neq 2}}\frac{2^{j-1}}{p_1\dots p_j}\\
&= -1+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\pi(y)-1}(-1)^j\sum_{\substack{p_1\dots p_j|R\\ p_1\neq 2}}\frac{2^{j}}{p_1\dots p_j}\\
&= -1+\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\ primo\\ p|\frac{R}{2}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}
$$

De donde

$$
V_k+\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j\sum_{p_1\dots p_j|R}\frac{\tau(p_1\dots p_j)}{p_1\dots p_j}=\sum_{j=1}^{\pi(y)}(-1)^j\sum_{p_1\dots p_j|R}\frac{\tau(p_1\dots p_j)}{p_1\dots p_j}
$$

$$
=1+\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\ primo\\ p|\frac{R}{2}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)
$$

Luego, despejamos y se sigue el resultado.

Lema 9.

Se cumple que

$$
A(x,y)<\frac{x}{2}\prod_{\substack{p\ primo\\ p|\frac{R}{2}}}\left(1-\frac{2}{p}\right)+e^2\pi^{2k}(y)+x|V_k|.
$$

Demostración.

Por el lema 6, la definición de S_j y (2.12), que se usará en el paso de la segunda a la tercera línea, tenemos

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &\leq S_0 - S_1 + \cdots + S_{2k} \\
&= [x] + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \underbrace{\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \sum_{p_1 \dots p_j | a_n} 1}_{T_{p_1 \dots p_j}} \\
&\leq x + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \left(x \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} + \tau(p_1 \dots p_j) \right) \\
&= x + x \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \tau(p_1 \dots p_j) \\
&\leq x \left(\underbrace{1 + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j}}_{Lema\ 2.8\ a} \right) + \underbrace{\sum_{j=1}^{2k} \sum_{p_1 \dots p_j | R} \tau(p_1 \dots p_j)}_{Lema\ 2.8\ b} \\
&< x \left(\frac{1}{2} \prod_{\substack{p\ primo \\ p | \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - V_k \right) + e^2 \pi^{2k}(y) \\
&= \frac{x}{2} \prod_{\substack{p\ primo \\ p | \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) + e^2 \pi^{2k}(y) - x V_k \\
&\leq \frac{x}{2} \prod_{\substack{p\ primo \\ p | \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) + e^2 \pi^{2k}(y) + x |V_k|
\end{aligned}
$$

Como se quería probar.

Lema 10.

Existe $M > 0$ tal que para $y \geq M$, $k = [6 \ln \ln y]$ se tiene

$$|V_k| < \frac{1}{\ln^8 y}.$$

Demostración.

Usaremos el corolario 2, lema 6 y la definición de S_j tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} &\leq \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{2^j}{p_1 \dots p_j} \\
&\leq \frac{1}{j!}\left(\sum_{p|R} \frac{2}{p}\right)^j \\
&< \frac{(2 \ln \ln y + c)^j}{j!}
\end{aligned}
$$

para algún $c \in \mathbb{R}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
|V_k| &= \left| \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} (-1)^j \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} \right| \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \left| \sum_{p_1 \dots p_j | R} \frac{\tau(p_1 \dots p_j)}{p_1 \dots p_j} \right| \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \frac{(2 \ln \ln y + c)^j}{j!}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
e^j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} > \frac{j^j}{j!}
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
|V_k| &\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \frac{(2 \ln \ln y + c)^j}{j!} \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \frac{(2 \ln \ln y + c)^j}{j!} \frac{j!\, e^j}{j^j} \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \frac{(2e \ln \ln y + ce)^j}{j^j} \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \left(\frac{k}{j}\right)^j \\
&\leq \sum_{j=2k+1}^{\pi(y)} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&< 2^{-2k} \\
&\leq 2^{-12 \ln \ln y}
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
2^{-12\ln\ln y} &= 2^{\ln(\ln y)^{-12}} \\
&= 2^{\left(\frac{\ln(\ln y)^{-12}}{\ln 2}\right)\ln 2} \\
&= \left(2^{\log_2(\ln y)^{-12}}\right)^{\ln 2} \\
&= ((\ln y)^{-12})^{\ln 2} \\
&= (\ln y)^{-12\ln 2} \\
&< (\ln y)^{-8}
\end{aligned}$$

Termina la prueba.

Lema 11.

Se cumple que

$$\prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(1-\frac{2}{p}\right) < \frac{4}{\ln^2 y}$$

Demostración.

Usando diferencia de cuadrados tenemos

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(1-\frac{2}{p}\right) &= \prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1}{p^2}\right) \\
&< \prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Como

$$R = \prod_{\substack{p\ primo \\ p\leq y}} p,$$

$$\left\{p\ primo: p \mid \frac{R}{2}\right\} = \{p\ primo: 2 < p \leq y\}.$$

Así,

$$\prod_{\substack{p\ primo \\ p \mid \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{\substack{p\ primo \\ 2 < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Reemplazando esto en la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{p\ primo \\ p \mid \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) &< \left(\prod_{\substack{p\ primo \\ p \mid \frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)^2 \\
&= \left(\prod_{\substack{p\ primo \\ 2 < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)^2 \\
&= 4\left(\prod_{\substack{p\ primo \\ p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)^2. \\
&< \frac{4}{\ln^2 y}.
\end{aligned}$$

De la penúltima a la última línea se usó la proposición 2.20. Termina la prueba.

Proposición 21.

Existe $M > 0$ tal que para $x \gg 0$ se tiene

$$\pi_2(x) < Mx\left(\frac{\ln \ln x}{\ln x}\right)^2$$

Demostración.

Por proposición 2.12, lema 2.5, lema 2.9, lema 10, para $y \gg 0$ y tomando $k = [\ln \ln y]$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\pi_2(x) &\leq \pi(y) + A(x,y) \\
&< \frac{6y}{\ln y} + \frac{x}{2} \prod_{\substack{p\ primo \\ p|\frac{R}{2}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) + e^2 \pi^{2k}(y) + x|V_k| \\
&< \frac{6y}{\ln y} + \frac{2x}{\ln^2 y} + e^2 \pi^{2k}(y) + \frac{x}{\ln^8 y} \\
&\leq \frac{6y}{\ln y} + \frac{2x}{\ln^2 y} + e^2 \pi^{2\ln\ln y}(y) + \frac{x}{\ln^2 y} \\
&\leq \frac{6y}{\ln y} + \frac{3x}{\ln^2 y} + e^2 \left(\frac{6y}{\ln y}\right)^{2\ln\ln y}
\end{aligned}
$$

Esto es,

$$
\pi_2(x) < \frac{6y}{\ln y} + \frac{3x}{\ln^2 y} + e^2 \left(\frac{6y}{\ln y}\right)^{2\ln\ln y} \tag{2.13}
$$

Haciendo $y = x^{\frac{1}{2\ln\ln x}}$ tenemos que $1 \leq y \leq \sqrt{x}$. En efecto, como

$$
2\ln\ln x \geq 2 \;\; cuando \;\; x \gg 0.
$$

se tiene

$$
1 \leq y = x^{\frac{1}{2\ln\ln x}} \leq x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \;\;\; cuando \;\;\; x \gg 0.
$$

De esta manera, podemos evaluar $A(x,y)$ cuando $y = x^{\frac{1}{2\ln\ln x}}$ y $x \gg 0$. Ahora, acotaremos cada sumando de la desigualdad (2.13).

Así, dado $x \gg 0$,

$$
\frac{6y}{\ln y} \leq \left(\frac{6y}{\ln y}\right)^2 = \frac{36x^{\frac{1}{\ln\ln x}}}{\ln^2\left(x^{\frac{1}{2\ln\ln x}}\right)} = \frac{72x^{\frac{1}{\ln\ln x}}\ln\ln x}{\ln^2 x} \leq 72x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)
$$

$$
\leq 72x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2,
$$

$$
\frac{3\mathrm{x}}{\ln^2 y} = \frac{3x}{\ln^2\left(x^{\frac{1}{2\ln\ln x}}\right)} = \frac{6x\ln\ln x}{\ln^2 x} \leq 6x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2,
$$

$$\left(\frac{6y}{\ln y}\right)^{2\ln\ln y} \leq \left(\frac{y^2}{\ln y}\right)^{2\ln\ln\sqrt{x}} = \left(\frac{x^{\frac{1}{\ln\ln x}}}{\ln\left(x^{\frac{1}{2\ln\ln x}}\right)}\right)^{\ln\ln x} = x\left(\frac{2\ln\ln x}{\ln x}\right)^{\ln\ln x}$$

$$\leq 4x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2.$$

Así, en (2.16), cuando $x \gg 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\pi_2(x) &< \frac{6y}{\ln y} + \frac{3x}{\ln^2 y} + e^2\left(\frac{6y}{\ln y}\right)^{2\ln\ln y} \\
&\leq 72x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2 + 6x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2 + e^2\left(4x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2\right) \\
&= (78+4e^2)x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2.
\end{aligned}$$

cómo se quería.

4.3. El teorema de Brun

Teorema 1.

La serie

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$

es convergente.

Demostración.

Consideremos las funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidos como

$$f(n) = \begin{cases} 1 \quad , \quad n\ es\ primo\ y\ n+2\ es\ primo \\ \\ 0 \quad , \quad n\ no\ es\ primo\ o\ n+2\ no\ es\ primo \end{cases}$$

y

$$g(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+2}.$$

Notemos que

$$\pi_2(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} f(n)$$

Aplicando estas funciones en la proposición 2.13, identidad de Abel, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \leq x \; primo \\ p+2 \; primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ e < n \leq x}} f(n) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \pi_2(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) - \underbrace{\pi_2(e)}_{=0} g(e) - \int_e^x \pi_2(t) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+2)^2}\right) dt \\
&\leq \frac{2\pi_2(x)}{x} + 2 \int_e^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt
\end{aligned}$$

Por la proposición 21, existe $M > 0$ tal que

$$\pi_2(x) \leq \frac{Mx \ln^2 \ln x}{\ln^2 x} \qquad x \gg 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \leq x \; primo \\ p+2 \; primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) &\leq \frac{2\pi_2(x)}{x} + 2 \int_e^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt \\
&\leq \frac{2M \ln^2 \ln x}{\ln^2 x} + 2M \int_e^x \frac{\ln^2 \ln t}{t \ln^2 t} dt \\
&\leq 2M + 2M \int_e^x \frac{\ln^2 \ln t}{t \ln^2 t} dt
\end{aligned}$$

Para resolver la última integral, haciendo el cambio $t = e^{e^u}$, para $x \gg 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_e^x \frac{\ln^2 \ln t}{t \ln^2 t} dt &= \int_0^{\ln \ln x} \frac{u^2}{e^{e^u} e^{2u}} e^{e^u} e^u du \\
&= \int_0^{\ln \ln x} u^2 e^{-u} du \\
&= [(-u^2 - 2u - 2)e^{-u}]_0^{\ln \ln x} \\
&= -\left(\frac{\ln^2 \ln x + 2x \ln \ln x + 2x}{\ln x}\right) + 2 \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

Así, para $x \gg 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\leq x\ primo\\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) &\leq 2M + 2M\int_e^x \frac{\ln^2 \ln t}{t\ln^2 t}\,dt \\
&\leq 2M + 2M(2) \\
&= 6M
\end{aligned}
$$

Ahora, haciendo $x \to +\infty$ y como

$$\sum_{\substack{p\leq x\ primo\\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)$$

es creciente y acotado,

$$\sum_{\substack{p\ primo\\ p+2\ primo}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right)$$

converge.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones:

Como conclusiones en la presente investigación fueron:

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se tiene que
$$\frac{n}{6\ln n} < \pi(n) < \frac{6n}{\ln n}.$$
2. La serie
$$\sum_{\substack{p \leq x \; primo \\ p+2 \; primo}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$$
es convergente.
3. El teorema de Brun no implica la conjetura de los números primos gemelos.
4. Si el teorema de Brun fuese falso implicaría que la conjetura de los números primos gemelos.

Recomendaciones.

1. Se recomienda investigar si la constante de Brun es un número racional o irracional. En caso esta constante fuese irracional se tendría que la conjetura de los números racionales sería verdad. En caso contrario no se puede concluir dicha conjetura.

Capítulo 6

Fuentes de información

[1] Apostol, T. M. (1976). *Introduction to analytic number theory*. USA: Springer.

[2] Barrero, E. L. (2013). *"La conjetura de los primos gemelos en un mundo paralelo al mundo de los números enteros".* Trabajo de tesis para optar al Grado de Maestría en Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[3] Fraleigh, J. B. (2014). *A first course in abstract algebra*. USA: Pearson.

[4] Laradji, M. (2015). *Brun's theorem on twin primes*. Researchgate. Recuperado el 29 de mayo del 2019, de https://www.researchgate.net/publication/325953599.

[5] LeVeque, W. (1977). *Fundamentals of number theory.* USA: Addison-Wesley.

[6] Lima, E. L. (1992). *Curso de análise volume 1.* Sétima edição. Brasil: SBM.

[7] Soto, E. (2011). *Diccionario de Ilustrado de Conceptos Matemáticos.* Tercera Edición. México.

[8] Tantarico, G. (2019). "*Teorema de los números primos".* Trabajo de tesis para optar el Grado de Maestría en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

[9] Walsh, M. N. (2010). *Progresiones aritméticas en subconjuntos de los primos.* Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

[10] Wong, B. (2014). *The twin primes conjecture*. Researchgate. Recuperado el 29 de mayo del 2019, de https://www.researchgate.net/publication/262378056.