UNIVERSIDAD NACIONAL JOSE FAUSTINO SÁNCHEZ CARRION

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS:

"MODELO CATEGÓRICO DEL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE"

Para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática Aplicada

PRESENTADO POR:

Bachiller: SOLÓRZANO RAMÓN, GIANFRANCO URBIGENES

ASESOR: Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT

Huacho – Perú

2021

MODELO CATEGÓRICO DEL PROCESO ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

TESIS DE PREGRADO

ASESOR: Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SANCHEZ CARRIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

ASESOR

Mo. ISIDRO JAVIER RIOS PEREZ

PRESIDENTE

Mo. HECTOR ALEXIS HERRERA VEGA

SECRETARIO

Mo. CRISTIAN MILTON MENDOZA FLORES

VOCAL

DEDICATORIA

A Dios y mi madre Edeliza Prudencia Ramón Serna.

SOLÓRZANO RAMÓN, GIANFRANCO URBIGENES.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por darme la fuerza necesaria para lograr mi objetivo; a mi madre Edeliza Prudencia Ramón Serna por encaminar mi vida con su infinito amor y a mi padre Urbigenes Solórzano Girón por guiarme con sus consejos llenos de sabiduría.

Finalmente, y por ello no menos importante, quiero agradecer a la comisión de grados y títulos de la escuela académico profesional de Matemática Aplicada, por su disposición de ayudarme en temas administrativos tan necesarios para poder cristalizar mi sueño.

SOLÓRZANO RAMÓN, GIANFRANCO URBIGENES.

INDICE

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

RESUMEN

Objetivo. Modelar algebraicamente la dialéctica que se produce al interactuar el docente y los estudiantes con ayuda de la teoría de categorías.

Materiales y métodos.

Por su finalidad que se desea, la investigación es de tipo básica aplicada, con nivel de investigación descriptivo, de diseño no experimental, elaborado bajo un diseño documental de estudio de caso y está basado bajo el enfoque cualitativo. Como resultado de la investigación se desarrolló un modelo algebraico del proceso de enseñanza-aprendizaje

Resultados

En los resultados de la investigación se desarrolló un modelo algebraico del proceso de enseñanza-aprendizaje considerando para tal fin la dinámica interactiva de la transmisión y adquisición del cocimiento de ciertos escenarios contextuales en el aula, así como las creencias de los saberes previos supuestos de los educadores y educandos. Se elaboró el modelo matemático construyendo dos categorías a saber; la categoría docente y la categoría alumno de tal manera que, se construye el funtor enseñanza-aprendizaje entre ambas categorías.

Palabras claves: Teoría de categorías, Funtores, Socio-constructivismo

Enseñanza – aprendizaje.

ABSTRACT

Objective. Algebraically model the teaching-learning process with the help of category theory.

Materials and methods.

Due to its intended purpose, the research is of a basic applied type, with a descriptive research level, of non-experimental design, prepared under a case study documentary design and is based on a qualitative approach. In the results of the research, an algebraic model of the teaching-learning process was developed

Results

In the results of the research, an algebraic model of the teaching-learning process was developed considering for this purpose the interactive dynamics of the transmission and acquisition of knowledge of certain contextual scenarios in the classroom, as well as the beliefs of the previous knowledge assumed of the educators and learners. The mathematical model was developed by building two categories, namely; the teaching category and the student category in such a way that the teaching-learning functors is built between both categories.

Keywords: Category theory, Funtors, Socio-constructivism

Teaching - learning

INTRODUCCIÓN

El vertiginoso cambio tecnológico del siglo XX ha traído consigo nuevos paradigmas respecto al proceso de adquisión del conocimiento, pues nuestro entorno social está encapsulado por un sistema dinámico regido por la difusión y la transmisión de la información. En tal sentido la capacidad perceptiva del ser humano se encuentra constantemente ratificando y rectificando diversas reflexiones de su entorno sensorial exterior. Las diversas vertientes del constructivismo opinan que el aprendizaje del ser humano ocurre como resultado de un proceso dialéctico entre la nueva información asociada a ciertos conocimientos previos. Por lo tanto; las personas tienen la capacidad de construir su conocimiento en ciertos escenarios contextuales.

El presente trabajo de investigación alcanza los siguientes objetivos, modelar e interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje con ayuda de la teoría de categorías y construir dos categorías algebraicas que sean la base de nuestra propuesta de investigación.

A continuación, se presenta la descripción de los contenidos

En primer lugar, se presenta un marco teórico general dedicado exclusivamente a fundamentar la teoría de categorías. Se inicia con una introducción, donde se define de manera axiomática la categoría. Luego, se elabora las construcciones categóricas, por último, se incursiona brevemente en la teoría de funtores.

En seguida, la investigación dedicada al estudio de la teoría del Aprendizaje., se inicia construye la categoría Aprendiz, luego se define el aprendizaje significativo y finalmente, se define la teoría de asimilación.

Finalmente Se introduce la N -Categoría y luego se procede a construir la categoría aprendiz y categoría docente para establecer la interpretación categórica de la enseñanza-aprendizaje.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Uno de los problemas más relevantes de la educación es todo aquello que involucra la interacción del binomio docente - alumno. Por esta razón el proceso educativo es una actividad compleja donde es necesario lidiar con personas de diversas creencias, costumbres y diferentes etapas generacionales. Por lo tanto, toda actividad dentro de un sistema educativo que se encuentre vinculado al proceso de enseñanza-aprendizaje debe privilegiar la calidad de información y los contenidos significativos relacionados ella. En ese sentido el problema es relevante, porque aborda un proceso dinámico e iterativo dentro de un sistema educativo; para tal fin es necesario identificar las relaciones vinculantes de tal proceso dentro de la estructura cognitiva del alumno.

De otro lado, la teoría de categorías fue formalmente introducida en 1945, por Mac Lane y Eilenberg con la finalidad de vincular construcciones matemáticas. El fuerte impacto de esta teoría reside esencialmente en ser una teoría general de estructuras y sistemas de estructuras y provee un marco conceptual para analizar componentes universales mediante la bus- queda de relaciones internas con otros objetos de cierta estructura. Por tanto, la complejidad dinámica y relacional que envuelve al proceso de enseñanza-aprendizaje requiere de nuevas herramientas de entendimiento para abordar ciertos problemas emergentes que su dinámica provoca.

1.2 Formulación del problema

1.2.1Problema General

¿Es posible interpretar el proceso enseñanza-aprendizaje con ayuda de la teoría de categorías?

1.2.2 Problemas Específicos

¿Existirá un proceso de enseñanza-aprendizaje utilizando teoría de categorías?

¿El modelo algebraico planteado funcionaría para representar de manera relacional el proceso enseñanza-aprendizaje?

1.3 Objetivo de la investigación

1.3.1 Objetivo General

Modelar algebraicamente el proceso de enseñanza-aprendizaje con ayuda de la categoría de categorías.

1.3.2 Objetivos Específicos

Exponer en forma clara y detallada la teoría de categorías para ser aplicado en el proceso enseñanza-aprendizaje

Interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde el marco conceptual de la teoría de categorías.

1.4 Justificación de la Investigación

Este trabajo de investigación se direcciona a la ciencia de la educación, el cual estudia los fundamentos científicos de los diferentes aspectos que describen, analizan y explican los fenómenos educativos. Este estudio es realizado desde una perspectiva de las estructuras algebraicas, se procura traer los beneficios de conceptos y técnicas de tal teoría con la finalidad de ayudar a caracterizar propiedades relacionales que envuelven los diferentes aspectos de la ciencia de la educación, con esto se intenta contribuir al área de los fundamentos de la transmisión del conocimiento en el proceso enseñanza-aprendizaje, el cual fundamenta el conocimiento y el entendimiento de la transmisión de ciertos tipos especiales de conocimientos. Cabe resaltar que tales conocimientos se basan en un determinado principio. ¿Cómo aprenden las personas? Por otro lado, se debe resaltar que diversos estudios en teoría cognitiva y fundamentos estadísticos que impulsan su tratamiento matemático.

Finalmente, como la teoría de categorías es un instrumento algebraico relacional que servirá para la fundamentación del proceso enseñanza- aprendizaje que de proyectar los problemas originados en el campo del proceso de transmisión del conocimiento hacia las matemáticas más precisamente las estructuras algebraicas.

1.5 Delimitación del estudio

La Ciencia de la educación fundamenta sus bases científicas en la flexibilidad de sus métodos y principios usados en la dialéctica originada por la transmisión y recepción del conocimiento en los diversos procesos de enseñanza y aprendizaje, siendo esté de sumo interés por parte de diversas ciencias cognitivas, pues es usada en varios campos que van desde la implementación de la inteligencia artificial, pasando por la fundamentación de los aspectos cognitivos del aprendizaje, la teoría de la comunicación, la teoría estructuralista del constructivismo entre otras, esto hace ver que la investigación está delimitada al estudio de las categorías y el proceso enseñanza- aprendizaje a estudios universitarios.

Barbosa (2013), demostró que la teoría de categorías puede ser considerada como marco de referencia para la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje, basándose en una relación entre mapas conceptuales a lo largo de todo el proceso de adquisición del conocimiento. Es decir, logra la asociación entre la transmisión del conocimiento y las estructuras algebraicas. Por lo tanto, la ciencia de la educación y las matemáticas son los campos de la ciencia que delimitan nuestra investigación.

1.6 Viabilidad del estudio

La teoría de categorías fue formalmente introducida en 1945, por Mac Lane y Eilenberg. Sus orígenes se fundamentan en la topología algebraica. La teoría creció rápidamente, consolidándose como una disciplina abstracta y es hoy en día una rama substancial de las matemáticas. Su fuerte impacto reside esencialmente en ser una teoría general de estructuras; que provee un marco conceptual para analizar los componentes universales y relacionarlo con otras estructuras conocidas.

Por todo lo expuesto, interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde óptica de la teoría de categorías es hallar de forma indirecta muchos marcos teóricos equivalentes con la finalidad de transportar problemas de la ciencia de la educación a las matemáticas. Por esta razón la teoría de categorías ha sido elegida para enmarcar el desarrollo de esta propuesta.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1 Ancedentes de la investigación

1. Lima y Douglas (2014), en su libro: Mapas Mentais e Memorizacao. Editorial, Impetus.

Explıca y utiliza la eficiencia de los mapas mentales para la interiorización de ciertos tipos de conocimiento durante el proceso de aprendizaje, además manifiesta la bidimensionalidad cognitiva de los mapas mentales respecto a la organización y estructuralización de la información recabada.

2. Black (1952), en su libro: Critical thinking. Editorial, Prentice-Hall.

Sugiere que el estudio del raciocinio y la lógica es una característica relacional entre el sujeto y el objeto aprendido. Pues ambos aspectos están íntimamente correlacionados durante el acto complejo del aprendizaje y la socialización de éste.

Piaget y Greco (1974), en su libro: Aprendizagem e Conhecimiento. Editorial, Prentice-Hall.

Presentan un estudio detallado sobre el aprendizaje cognitivo de un niño, rescatando los sus procesos cognitivos internos en toda la etapa del proceso de aprendizaje y maduración en esta etapa de acomodación sucesiva del entendimiento.

3. Vekiri (2002), en su articulo titulado: What Is the Value of Graphical Displays in Learning? Educational Psychology Review, Vol. 14, No.

Muestra cómo construir inferencias complejas e integrar información usando mapas conceptuales. Para ello propone una metodología basada en la estructuralización de la información bajo ciertos criterios de importancia y relevancia cognitiva.

4. TESIS DE INVESTIGACIÓN

1. Título de la tesis, lugar y año de publicación.

   Sobre dos lógicas categóricas: Lógica Lineal y álgebra con tipos ordinarios

   Madrid 2016

2. Apellidos y nombres del autor

   Narciso Martí, Oliet.

3. Institución que respalda el estudio

   Universidad Complutense de Madrid: Facultad de Ciencias Matemáticas.

4. Conclusiones. Sea presentado un enfoque semántico que permite exhibir los beneficios de la lógica categórica como marco de discusión argumentativa entre la lógica lineal y el algebra con tipos ordinarios.

2.2 Bases Teóricas

Para establecer nuestro modelo categórico del proceso enseñanza-aprendizaje es necesario proporcionar instrumentos de corte teórico propicios para su fundamentación.

2.2.1 Aprendizaje Significativo

Tal como lo comenta Veloz (2014). El aprendizaje significativo es una adquisición de nuevos conocimientos mediante su inclusión en conceptos ya existentes de la estructura cognoscitiva.

2.2.2 Mapas Conceptuales

Según Díaz-Barriga y Hernández (2010). Los mapas conceptuales son organizadores gráficos que mediante ciertos símbolos representan información, la finalidad es jerarquizar y estructura la información según su importancia, por tal sentido son señalados como un instrumento para la construcción del conocimiento.

2.2.3 Errores Conceptuales

Según Molina (2012). Son aquellos obstáculos presentes en el desarrollo del pensamiento creativo y crítico, pues condicionan el proceso por el que se adquieren nuevos conocimientos.

2.2.4 Proceso de enseñanza-aprendizaje

Se entiende por proceso de enseñanza-aprendizaje, a la interacción entre la dupla docente-estudiante encargados de recepcionar y transmitir conocimientos sobre un tópico especifico. Además tiene por finalidad la construcción del conocimiento mediante mecanismos dialecticos entre el objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje.

2.2.5 Teoría de categorías

La teoría de categorías puede concebirse como el generador universal de ciertas construcciones matemáticas en contextos axiomáticos. Además permite generalizarlas mediante construcciones universales descritas como propiedades universales.

2.2.5.1Definición de categoría

El matemático alemán George Cantor (1845-1918) y el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) inventaron la teoría de conjuntos con la finalidad de establecer condiciones de existencia y unicidad de los objetos matemáticos dentro de un contexto dado. Sin duda alguna esta teoría tuvo un papel importante en la fundamentación de la matemática. Cabe resaltar que ésta teoría, hace posible el estudio de los objetos matemáticos a través de sus partes constitutivas (método analítico).

De otro lado, como la matemática moderna se presenta de forma estructurada, la comprensión de los objetos matemáticos requiere de una nueva óptica totalizadora que englobe la acción de estos con su entorno (método sintético); en ese contexto surge la teoría de categorías como alternativa de comprensión del marco estructuralista que el método axiomático pro pone.

Ésta teoría proporciona a los matemáticos un lenguaje y por lo tanto; una forma de razonamiento general, expresado en términos de propiedades universales con ayuda de diagramas conmutativos con la finalidad de establecer regularidades a través del comportamiento del objeto matemático.

Definición (Categoría). Una categoría (C) consta de una clase de objetos, *obj*(C), cuyos elementos son denotados por *A*, *B*, *C*,... tal que, para todo par (*A*; *B*) ∈ *obj*(C)×*obj*(C), existe una clase de morfismos $Hom\, C(A;\, B)$ (posiblemente vacío) de modo tal que para toda *A, B, C* ∈ *obj*(C) y todo $f\ \in\ Hom\, C(A;\, B)$ y $g\ \in\ Hom\, C(B;\, C)$, existe un morfismo llamado composición de $Hom\, C(A;\, B) \times Hom\, C(B;\, C) \rightarrow Hom\, C(A;\, C)$ el cual será denotado por $g\ o\ f\ \in\ Hom\, C(A;\, C)$.

Además toda categoría cumple los siguientes axiomas.

Axioma 1.

Para cada $A\ \in\ obj(C)$, existe $I_A\ \in\ Hom\, C(A;\, A)$, llamado morfismo identidad, tal que para $f\ \in\ Hom\, C(A;\, B)$ y $g\ \in\ Hom\, C(C;\, A)$ se cumple $f\ o\ I_A\ =\ f\ y\ I_A\ o\ g\ =\ g$.

Axioma 2.

Dado los morfismos $f\ \in\ Hom\, C(A;\, B)$, $g\ \in\ Hom\, C(B;\, C)$ y $h\ \in\ Hom\, C(C;\, D)$. Es decir: $h\ o\ (g\ o\ f\ )\ =\ (h\ o\ g)\ o\ f$.

Observación En adelante, $obj(C)$ y $Hom\, C(A;\, B)$ son clases para evitar algunas paradojas de la teoría de conjuntos.

Definición (Diagrama). Sea la categoría C. Un diagrama es una colección de vértices y arcos, etiquetados de manera coherente con objetos y morfismos. Tal como se puede apreciar.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & c \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Definición (Diagrama conmutativo). Un diagrama en la categoría C es llamada conmutativa si, para cualquier par de vértices A y B todas las rutas en el diagrama desde A hasta B son iguales (en el sentido de que cada ruta en el diagrama determina morfismos compuestos iguales). Por ejemplo si para todo $g'' \in Hom_C(P';\, A)$ y $f'' \in Hom_C(P';\, C)$, $f \circ f'' = g \circ g''$, entonces existe un único $h \in Hom_C(P';\, P$ tal que el siguiente diagrama conmuta. Es decir, $g'' = f' \circ h$ y $f'' = g' \circ h$.

Observación Los diagramas se empelan para establecer y demostrar propiedades de las construcciones categóricas; tales propiedades a menudo se expresan diciendo que un diagrama en particular conmuta gracias a la existencia de un único morfismo que cumple tal o cual condición.

Ejemplo Categoría de conjuntos (Set). Si definimos:

1. La clase de objetos obj (Set) como la clase formada por todos los conjuntos.
2. La clase de todas las funciones de A en B como el conjunto $HomSet(A;\, B)$.
3. La composición como la composición usual de funciones. Entonces Set es una categoría.

Definición (Categoría pequeña). C se llama pequeña si y sólo si obj(C) es un conjunto.

Ejemplo. Categoría Carcaj (CA). Un carcaj es una gráfica orientada conexa y finita. Explícitamente, Un carcaj es una cuádrupla ordenada CA = (C0, C1, s, t) formada por dos conjuntos, C_0 = {i, k,………., j} (el conjunto de vértices) y C_1 = {α, β, ..., γ} (el conjunto de caminos); y dos aplicaciones s, t : $C_1 \to C_0$ que asocian a cada camino $\alpha \in C_1$ su inicios s(α) y su fin t(α). Por lo tanto, un carcaj se puede considerar un grafo orientado (que puede tener lazos y caminos múltiples).

Notación.

El esquema α : i → j en CA significaría: el camino dirigido α que inicia en el vértice i y termina en el vértice j. Luego un camino dirigido (de longitud n) de i a j en CA es una sucesión de vértices y caminos

$(j\,|\alpha_n, \alpha_{n-1}, \quad , \alpha_1|\, i)$ con n ≥ 0 que verifica:

Inicio de $\alpha_1 = i$
Final de α_1 = inicio de α_2
Final de α_2 = inicio de α_3
....
Final de $\alpha_n = j$.

Y para el caso n = 0 se tiene i = j. De esta manera asociamos a cada vértice i su camino trivial $e_i = (i\,||\,i)$, el cual debe ser interpretado intuitivamente como permanecer en el vértice i.

Luego si definimos:

1. La clase de objetos obj (CA) como el conjunto C_0.
2. La clase de todos los morfismos Hom_{CA} como el conjunto C_1.

3. La composición de dos caminos se hace por concatenación cuando esto es posible. Es decir, $(j|\beta_p, \beta_{p-1}, ...,\beta_1|k)\circ(l|\alpha_n, \alpha_{n-1}, \; ,\alpha_1|i)$ vale cero si k $\neq$ l, y vale $(j\,|\beta_p, \beta_{p-1}, ..., \beta_1, \alpha_n, \alpha_{n-1}, ..., \alpha_1|\, i)$ en el caso k = l.

Entonces, CA es una categoría pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

Axioma 1.

La asociatividad de la composición es evidente por definición de esquema.

Axioma 2.

Por definición de esquema.

Definición (Categoría localmente pequeña). La categoría C se llama localmente pequeña si para cualquier par ordenado de objetos (A, B); $Hom\ C(A; B)$ es un conjunto.

Ejemplo Categoría de matrices ($Matr_R$)**.** Sea R un anillo conmutativo y $M_{m\times n}(R)$ el conjunto de matrices con entradas en R. Si definimos:

1. La clase de objetos *obj* ($Matr_R$) como la clase formada por todos los enteros positivos.
2. La clase de todos los morfismos $Hom_{Matr_R}(m; n)$ como la clase de todas las matrices $A \in M_{m\times n}(R)$.
3. La composición como el producto matricial; es decir, para todo $A \in Hom_{Matr_R}(m; n)$ y $B \in Hom_{Matr_R}(p; m)$, implica que $B \circ A = AB \in Hom_{Matr_R}(p; n)$.

Entonces, $Matr_R$ una categoría localmente pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

Axioma 1.

La composición entre morfismos se hereda de la asociatividad del producto entre matrices.

Axioma 2.

Para cada $m \in obj\ (Matr_R)$ se propone como morfismo identidad $I_m \in Hom_{Matr_R}(m; m)$, aa la matriz identidad de orden m.

En efecto, de la teoría básica de matrices sabemos que para toda $A \in Hom_{Matr_R}(m; n)$ se cumple $A \circ I_m = AI_m = A$. Análogamente, para toda $B \in Hom_{Matr_R}(n; m)$ se cumple $I_m \circ B = I_mB = B$.

Definición (Categoría pre-orden). Una categoría C es pre- orden si, para cualesquiera A y B, $Hom_C(A; B)$ es vacío o unitario.

Observación Toda categoría pre-orden es localmente pequeña.

Ejemplo Categoría 0. Es aquella categoría sin objetos, ni morfismos. Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque están universalmente cuantificadas sobre conjuntos vacíos

Ejemplo Categoría 1. Es aquella categoría que tiene un único objeto, y un único morfismo (el morfismo identidad de ese objeto). Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque la composición es trivial.

2.2.6 Principio de Dualidad.

La teoría de dualización aplicada a la axiomática categórica permite estudiar sólo un aspecto de los problemas planteados, pues los resultados que se obtengan serán ciertos si y sólo si lo son sus respectivos duales. La formulación que aquí se ofrece es informal e imprecisa, para aquellos lectores que deseen mayor precisión se debe exigir una aplicación metódica de la lógica formal; por lo tanto para aquellos interesados podrán hallar información precisa en el libro de MacLane (1971): Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Definición (Concepto categórico). Un concepto categórico es el que se puede definir mediante una sentencia dentro de la categoría.

Definición (Principio de Dualidad). Si la sentencia categórica P es válida en la categoría C, entonces su enunciado dual P^{op} también es válida en C.

Proposición *Si* C *es una categoría, entonces* C^{op} *también lo es y es llamada categoría dual.*

1. *Obj* (C^{op}):= *obj*(C)*. Por lo tanto* A^{op}*:= A para todo A* ∈ *obj*(C)*.*

2. Hom C^{op} (B; A):= Hom $_C$ (A; B)*. Luego* $f^{op}: B^{op} \to A^{op} \in C$ si y solo si $f; A \to B$ es un morfismo en C.

3. La composición es inducida por C y se define de la siguiente manera

$f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$ Para todo $f \in Hom_C(A; b)$ y todo $g \in Hom_C(B; C)$

Demostración: *Se verificará los axiomas de categoría.*

Axioma 1.

Por definición de composición en C^{op} *y la asociatividad de la composición en* C*, se tiene.*

$h^{op} \circ (g^{op} \circ \boldsymbol{f}^{op}) = h^{op} \circ (\boldsymbol{f} \circ g)^{op} = (\, \boldsymbol{f}(g \circ h))^{op} = (\, \boldsymbol{f}(g \circ h))^{op} = (h^{op} \circ g^{op}) \circ \boldsymbol{f}^{op}$

Axioma 2.

Como C *es una categoría, para todo* $A \in obj\ (C^{op})$*,* $f \in$ Hom $_C$ (B; A) *y* $g \in$ Hom $_C$(A; C) *existe* $I_A \in$ Hom $_C$(A, A) *tal que* $I_A \circ f = f$ *y* $g \circ I_A = g$*, luego* $(I_A \circ f)\ op = f^{op}$*,* $(g \circ I_A)^{op} = g^{op}$*,* $I^{op} \circ f^{op} = f^{op}$ *y* $g^{op} \circ I^{op} = g^{op}$*.* Q

Observación Por definición de categoría opuesta es evidente que $(C^{op})^{op} = C$.

2.2.7 Estructuras Abstractas

2.2.7.1 Objetos Categóricos.

Definición. (Objeto inicial). Cierto objeto de una categoría es llamado objeto inicial si desde´el parte exactamente un único morfismo a cada uno de los demás objetos de la categoría.

Notación.

Se representa un objeto inicial por 0^{I}.

Ejemplo En la categoría *Grp*, donde los objetos *obj* (*Grp*) son grupos y clase de morfismos $\mathrm{Hom}_{obj\,(ttrp)}(A; B)$ para todo $A, B \in obj\,(Grp)$ son los homomorfismos entre grupos, se demuestra que cualquier grupo trivial es un objeto inicial.

En primer lugar, demostraremos que si $\{e\}$ es el grupo trivial, entonces $\{e\}$ es un objeto inicial.

En efecto; si B es un grupo cualquiera, entonces existe un homomorfismo

$f : 0 \to B$. tal que $f\,(e) = e^{I}$ y es evidente que es único.

De manera recíproca, demostraremos que si A es un objeto inicial, entonces $A = \{e\}$. Para tal efecto, usaremos la demostración por contradicción. Es decir; si asumimos que $A\ f \neq \{e\}$ y es un objeto inicial, entonces llegaremos a una contradicción.

Como $A\ f \neq\ \{e\}$ admite por lo menos un elemento diferente de elemento nulo e, es decir $A = \{z, ...\}$, luego para cierto grupo $B = \{x, y,\}$ con $x \neq y$ es posible definir los homomorfismos f, g: $A \to B$ como $f\,(z) = x$ y $g\,(z) = y$ para todo $z \in A$; los cuales obviamente son diferentes pues $x\ f = y$. Por lo tanto, bajo estas condiciones A no puede ser un objeto inicial.

Definición (Objeto final). Cierto objeto de una categoría es llamado objeto final si a él llega exactamente un único morfismo de cada uno de los demás objetos de la categoría.

Notación.

Se representa un objeto inicial por 1.

Ejemplo En la categoría *Set*, C es un objeto final si y sólo si es un conjunto unitario.

En efecto; demostraremos que si $C = \{*\}$ es un conjunto unitario y A

Un conjunto cualquiera, entonces C es un objeto final. Consideremos los siguientes casos.

Si $A = \emptyset$, es evidente que existe una función vacía. $f : A \to C$ Llamada función vacío si $A \neq \emptyset$, entonces existe un único $f : A \to C$ llamada función constante $f(z) = *$; para todo $z \in A$.

Por lo tanto, C es un objeto final.

De manera recíproca, demostraremos que si C es un objeto final, entonces C es un conjunto unitario.

Para verificar tal aseveración, usaremos su afirmación contrapositiva. Es decir, si C no es un conjunto unitario, entonces no es un objeto final. Para tal fin, consideremos los siguientes casos.

a) si $C = \emptyset$, entonces no existe $f \subset A \times C$, pues cada elemento de A No tendría imagen en C. Por lo tanto, C no es un objeto final.

b) si existieran $x, y \in C$ con $x \neq y$, dado cualquier conjunto $A \neq \emptyset$, es posible definir por lo menos dos funciones distintas $f, g : A \to C$. Por lo tanto, C no es un objeto final.

Definición (Objetos isomorfos). En toda categoría C, dos objetos *A, B* son isomorfos si para $f \in \mathrm{Hom}_C(A; B)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_C(B; A)$ tal que $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$.

Lema *Si* 1 *y* $1'$ *son objetos finales, entonces son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración: En efecto; si 1 y $1'$ son objetos finales, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_C(1; 1')$ y un único $h' \in \mathrm{Hom}_C(1'; 1)$, tal que $h \circ h' : 1' \to 1'$ y $h' \circ h : 1 \to 1$. Luego por consecuencia de la unicidad de h y h' se tiene $h \circ h' = I_{1'}$ y $h' \circ h = I_1$.Q

Lema *Si* $0'$ *y* $0''$ *son objetos iniciales, entonces son únicos salvo isomorfismo.*

Definición (Objeto cero). Cierto objeto en una categoría se llama objeto cero, si es un objeto que simultáneamente es inicial y final.

Notación. Se representa un objeto cero por 0.

Observación Existen algunas categorías que no tienen objeto ce- ro como es el caso de *Set*.

Cuando una categoría C tiene objeto cero para cualquier par de objetos $(A; B)$ siempre $Hom_C(A; B)$ es diferente del vacío, pues siempre existe el morfismo composición.

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$$

Lema *En toda categoría, el objeto cero es único salvo isomorfismo.*

2.2.7.2 Morfismo Cero

Definición (Morfismo cero a izquierda). $f : A \rightarrow B$ Es morfismo cero a izquierda si $f \circ g = f \circ h$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in Hom\, C(C;\, A)$.

Definición (Morfismo cero a derecha). $f : A \rightarrow B$ .Es morfismo cero a derecha si $g \circ f = h \circ f$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in Hom\, C(B;\, C)$.

Observación Todo morfismo con dominio 0^J es morfismo cero a derecha y todo morfismo con codominio 1 es morfismo cero a izquierda.

Definición (Morfismo cero). $f : A \rightarrow B$ Es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha.

Proposición *Si* C *es una categoría con objeto cero, entonces para cada par de objetos A, B* ∈ *obj*(C) *existe un único morfismo cero en* $Hom\, C(A;\, B)$*; denotado por* 0_A^B

Definición (Categoría con morfismo cero). Si para todo

A, B ∈ *obj*(C) existe $0_A^B : A \rightarrow B$ que verifica cada uno de los siguientes ítems:
A

a) $h \circ 0_A^B = 0_A^C$, para todo *C* ∈ *obj*(C) y $h \in Hom\, C(B;\, C)$;

b) $0_A^B \circ h^j = 0_C^B$, para todo *C* ∈ *obj*(C) y *h*ˡ ∈ Hom
A C

c) C (*C*; *A*). entones se dice que la categoría C posee morfismos cero.

Observación En toda categoría la colección de morfismos cero $[0_A^B]$ es única

Proposición *Toda categoría con objeto cero es una categoría con morfismos cero.*

2.2.7.3 Equalizador y Coequalizador

Definición (Equalizador). El Equalizador de $f, g \colon A \rightarrow B$ es el par (D, h), donde, el morfismo $h : D \rightarrow A$ satisface *f* ∘ *h* = *g* ∘ *h* y el objeto *D* es universal respecto de esta propiedad. Para todo morfismo

$f^{I} \in$ Hom $_{C}(C; A)$ que satisface $f \circ f^{I} = g \circ f^{I}$, existe un único $Hom\ C(C;\ D)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, "h^{I}"] \arrow[ur, "f^{I}"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición: Si (D, h) y (D^{I}, h^{I}) son equalizadores de $\mathbf{f}, g \in$ Hom $_{C}(A; B)$ entonces Des isomorfo a D^{I} y el isomorfismo conmuta con los morfismo h y h^{I}.

Demostració: El resultado es consecuencia de la definición de equalizador.

Proposición : Si $\mathbf{f}^{I} : D^{I} \rightarrow D$ es isomorfismo y (D, h) es un equalizador de $\mathbf{f}, g \in$ Hom $_{C}(A; B)$ entonces $(D^{I}, h \circ \mathbf{f}^{I})$ es un equalizador para $\mathbf{f}$ y g.

Proposición: En toda categoría C con objeto cero el núcleo (ker $(\mathbf{f})$, K) del morfismo f: A→B es el equalizador de f, 0 ∈Hom $_{C}(A; B)$.

Lema Toda categoría C con objeto cero si tiene equalizador, entonces tiene núcleos.

Definición (Coequalizador). El coequalizador de $\mathbf{f}, g$: $A \rightarrow B$ es el par (E, h), donde el morfismo $h \in$ Hom $_{C}$ (B; E) satisface la igualdad $h \circ f = h \circ g$ y el objeto E es universal respecto de esta propiedad.

Para todo h^{I} ∈ Hom C (B; C) con $h^{I} \circ f = h^{I} \circ g$ existe un único

f J ∈ Hom C (E; C) que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h^{i}"'] & E \arrow[d, "f^{i}"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Proposición Si (E, h) es el coequalizador de los morfismos $f, g : A \rightarrow B$, entonces el morfismo h es un epimorfismo.

2.2.7.4 Pushout y Pullback

Definición (Pullback). Un Pullback para los morfismos $g : A \rightarrow B$ y $f : C \rightarrow B$ ocurre si y sólo si, los morfismos $\boldsymbol{f}^{I}$ y g^{I} satisfacen las siguientes propiedades:

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g^I"] \\ C \arrow[r, "f^I"'] & P \end{tikzcd}$$

b) Para todo $g^{II} \in \mathrm{Hom}_C\,(P^J; A)$ y $f^{II} \in \mathrm{Hom}_C\,(P^J; C)$ si $f \circ f^{II} = g \circ g^{II}$, existe un único $h \in Hom_C(P\ ;\ P^I)$ tal que el siguiente diagrama conmuta conmuta.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\ & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Es decir $g'' = f' \, o \, h$ y $f'' = g' \, o \, h$.

Lema Dado el Pushout: A → B y f: C→ B

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f^I"] \\ C \arrow[r, "g^I"'] & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P^I \arrow[r, "g^{II}"] \arrow[d, "f^{II}"'] & c \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Tambien es Pushout para f y g, entonces existe un único isomorfismo $h \in \mathrm{Hom}_C\,(P; P^I)$ *tal que* $f^I = f^{II} \circ h$ *y* $g^I = g^{II} \circ h$.

Definición (Pushout). Un Pushout para los morfismos g: A → C y f: A → B ocurre si y sólo si, los morfismos f^I y g^I satisfacen las siguientes propiedades.

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g^I"] \\ C \arrow[r, "f^I"'] & P \end{tikzcd}$$

b) Para todo $f^{II} \in \mathrm{Hom}_C\,(B;P^I)$ y $g^{II} \in \mathrm{Hom}_C(C;P^I)$ si $f^{II}\circ f = g^{II}\circ g$, entonces existe un único $h \in \mathrm{Hom}_C\,(P;P^J)$ tal que conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g^I"] \arrow[ddr, "f^{II}"] & \\ C \arrow[r, "f^I"] \arrow[drr, "g^{II}"'] & P \arrow[dr, "h"] & \\ & & P^I \end{tikzcd}$$

Lema Dado el Pushout para los morfismos g: A → C y f: A → B

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g^I"] \\ C \arrow[r, "f^I"'] & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g^{II}"] \\ C \arrow[r, "f^{II}"'] & P \end{tikzcd}$$

También es Pushout de f y entonces existe un único isomorfismo $h \in \mathrm{Hom}_C(P^I; P)$ *tal que* $g^I = h \circ g^{II}$ *y* $f^I = h \circ f^{II}$.

2.2.7.5 Producto y Coproducto

Definición (Producto). El producto de dos objetos A, B ∈ C es el triplete $(A\times B, \pi_A, \pi_B)$, con $A\times B \in obj(C)$, $\pi_A \in \mathrm{Hom}_C(A\times B; A)$ y $\pi_B \in \mathrm{Hom}_C(A \times B; A)$, llamados proyecciones canónicas, los cuales cumplen la siguiente propiedad universal respecto al objeto A × B. Dado $C \in obj(C)$ si $f \in \mathrm{Hom}_C(C; A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_C(C; B)$ entonces existe un único $h = (f, g) \in \mathrm{Hom}_C(C; A \times B)$ tal que $\pi_A \circ h = f$, $\pi_B \circ h = g$. Es decir el siguiente diagrama conmuta.

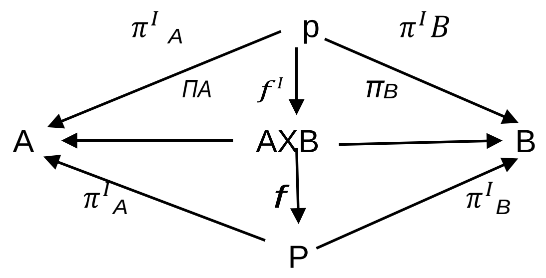
$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "g"'] & A\mathrm{X}\ B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Proposición Si (A × B, πA, πB) es el producto de A, B ∈ obj(C) y existe un isomorfismo $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_C(P^I; A\times B)$, entonces $(P^I; \pi_A\circ\tilde{h}, \pi_B\circ\tilde{h}$ también es un producto de A y B.

Demostración: Dado $C \in obj(C)$ y $f \in \mathrm{Hom}_C(C; A)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(C; B)$,
Demostraremos que existe un único $h \in \mathrm{Hom}_C(C; P^I)$ talque (πA∘ $h)$ o h=f ($\pi_B \circ$h)oh= g.
En efecto; como (A × B, πA, πB) es el producto de A, B ∈ obj(C) existe un único morfismo $g^I \in \mathrm{Hom}_C(C; A\times B)$ tal que $\pi_A \circ g^I = f$ y $\pi_B \circ g^I = g$. Como $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_C(P^I; A \times B)$ es un isomorfismo Σ existe n−1 $\in \mathrm{Hom}_C(A \times B; P^I)$, entonces existe un único morfismo $h \in \mathrm{Hom}_C(C; P^I)$ tal que .πA ∘ h˜Σ ∘ h = f y $\pi_B \circ h \circ h = g$

Teorema Si $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ *y* $(P, \pi^I{}_A, \pi^I{}_B)$ son los productos de los objetos A, B ∈ C, entonces A × B es isomorfo a P.

Demostración: Del diagrama conmutativo adjunto,



Se deduce:

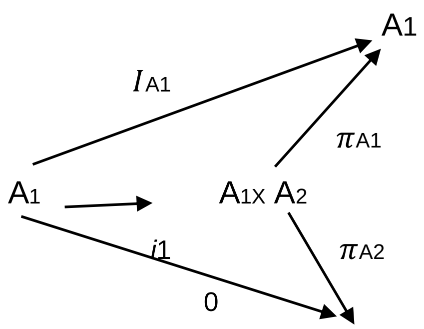
$$(\pi^I{}_A \circ \boldsymbol{f}) \circ f^I = \pi^I{}_A \circ (\boldsymbol{f} \circ f^I) = \pi^I{}_A \circ f^I = \pi^I{}_A \circ \boldsymbol{I}P^I$$

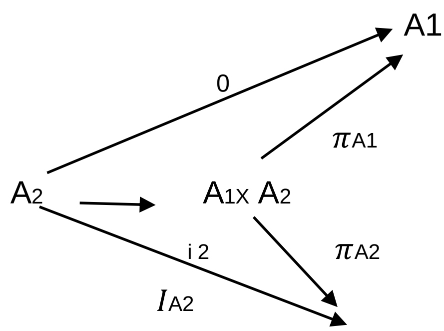
$$(\pi^I{}_B \circ \boldsymbol{f}) \circ f^I = \pi^I{}_B \circ (\boldsymbol{f} \circ f^I) = \pi^I{}_B \ 0\ f^I = \pi^I{}_B \circ \boldsymbol{I}P^I$$

Es decir $\boldsymbol{I}_{PI}$ y $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^I$ hacen conmutar el diagrama, luego por la unicidad en la definición del producto se deduce $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^I = \boldsymbol{I}_P$ y de manera Simétrica se obtiene $\boldsymbol{f}^I \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{I}_{A\times B}$. Por lo tanto, A × B es isomorfo a P.

Lema Si C una categoría con objeto cero y producto y definimos $\delta_{jk} \in \mathrm{Hom}_C\ (A_j; A_k)$ para cada j, k ∈ {1, 2} tal que δjk = 0 cuando j ≠ k y δjj = I_{Aj}, entonces existen $i_{Aj} \in \mathrm{Hom}_C\ (A_j; A_1 \times A_2)$ llamados inclusiones, tales que $\pi_{Ak} \circ i_{Aj} = \delta_{jk}$, ∀j, k.

Demostración: La afirmación se deduce de los siguientes diagramas conmutativos y la propiedad universal de producto, se logra verificar.





Proposición Si C es una categoría con productos binarios, entonces dado los morfismos $f \in Hom\, C(A; C)$ y $g \in Hom\, C(B; D)$, existe un único morfismo f × g definido $por\ f \times g = (f \circ \pi A, g \circ \pi B) \in Hom\, C(A \times B; C \times D)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] & & C \\
A X B \arrow[ur, "\pi A"] \arrow[dr, "\pi B"'] \arrow[rr, "f \times g"'] & & C\ X\ D \arrow[ur, "\pi C"'] \arrow[dr, "\pi D"] & \\
 & B \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}
$$

Demostración: Se deduce por la definición de producto.

Observación Por definición de producto, se cumple cada una de las siguientes proposiciones.

a) $IA \times IB = IA \times B$.

b) $(f, g) \circ h = (f \circ h, g \circ h)$.

c) $(f \times g) \circ (h \times f\,j) = (f \circ h) \times (g \circ f\,j)$.

d) $(f \times g) \circ (h, f\,j) = (f \circ h, g \circ f\,j)$.

Teorema En toda categoría, si existe A× (B × C) y (A × B) ×C, entonces son isomorfos.

Teorema En toda categoría si existen los productos binarios, entonces existe el producto para un número finito de objetos.

Definición (Coproducto). El coproducto de A, B ∈ obj(C), es el triplete (A B; i, i), donde *A B obj*(C), *i* Hom (*A, A B*) e i_B ∈ Hom $_C$ (*B, A B*), llamados inclusiones canónicas, que satisfacen la siguiente propiedad universal.

Dado *C* ∈ *obj*(C), *g* ∈ Hom $_C$(*A, C*) y *h* ∈ Hom $_C$ (*B, C*), existe un único morfismo *g h* ∈ Hom $_C$(*A B, C*) tal que *f* ∘ i_A = *g*, *f* ∘ i_B = *h*. Es decir el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "IA"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
 & A\coprod B \arrow[r, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, "I_B"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Proposición Dado el coproducto $(A\coprod B, i_A, i_B)$ de A, B ∈ obj(C), si existe un isomorfismo $h \in Hom_C(A\coprod B; Q)$,entonces $(Q; h \circ i_A, h \circ i_b)$ también es coproducto para A y B

Proposición Si $(A\coprod B, i_A, i_B)$y $\left(Q, i_A^j, i_B^j\right)$ son coproductos de los objetos A y B, entonces A∐B es isomorfo a Q

Teorema Si existen A∐ (B∐C) y (A∐B) ∐C, entonces son isomorfos.

Lema Sea C una categoría con objeto cero y coproductos, si para cada j, k ∈ {1, 2}, se define δjk ∈ Hom C (Aj; Ak) tal que δjk = 0 cuando j $\neq$ k y δjj = IAj, entonces existen $\pi_{Aj} \in$ Hom $_C$ $(A_1\, A_2; A_j)$, tales que πk ∘ iAj = δjk, ∀j, k.

Teorema En toda categoría si existe coproductos binarios, entones existe el coproducto para un número finito de objetos.

2.2.7.6 Funtor

En toda categoría C se puede apreciar, que la clase Hom C cobra sentido explícito cuando para todo par ordenado de objetos (A, B) se define $Hom_C(A, B)$. Luego si definimos Hom_C (−; −): C×C → C se deduce que Hom_C (−; −) nos permite establecer conexiones entre diversos objetos. Por lo tanto es necesario definir la noción de preservación de estructura entre dos categorías en el sentido: objetos-objetos, morfismo-morfismo, morfismo identidad - morfismo identidad y la misma operación de composición. En ese sentido se requiere definir a los funtores.

Definición: (Funtor o Funtor Covariante). Sean C y D dos categorías. Un funtor covariante de C en D (denotado como F: C → D) consiste en dos aplicaciones:

1. La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto A de C un objeto
F(A) de D.

2. La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo f: A → B de C el morfismo
F (f): F(A) → F (B) de D.

Y satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1.

F (f ∘ g) = F (f) ∘ F (g).

Axioma 2.

Para cada $A \in$ C, F $(I_A) = I_{F(A)}$.

Ejemplo Sean las categorías C y Set. Si A es un objeto fijo en C, entonces Hom_C $(A; -)$: C → *Set* es un funtor covariante.

Para verificar la afirmación se debe observar cómo actúa $Hom_C(A; -)$

Sobre los objetos y morfismos de C. Es decir:

$\text{Hom}_C(A; -): obj(C) \to obj(Set)$

$$B \to \text{Hom}_C(A; -)(B) = \text{Hom}_C(A; B)$$

$\text{Hom}_C(A; -): \text{Hom}_C(B; C) \to \text{Hom}_{Set}\ F(B); F(C)$

$$F \to \text{Hom}_C(A; -)(f) = \text{Hom}_C(A; f)$$

Con:

$\text{Hom}_C(A; f)$: $\text{Hom}_C(A; B) \to \text{Hom}_C(A; C)$

$$H \to \text{Hom}_C(A; f)(h) = f \circ h$$

Satisface los dos axiomas de funtor covariante.

Axioma 1.

Si $f \in \text{Hom}_C(B; C)$ y $g \in \text{Hom}_C(C; D)$, entonces $g \circ f \in \text{Hom}_C(B; D)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_C(A; g \circ f)(h) &= (g \circ f) \circ h \\
&= g \circ (f \circ h) \\
&= \text{Hom}(A \circ g)(f \circ h) \\
&= \text{Hom}_C(A; g)\ \text{Hom}_C(A; f))(h)) \\
&= \text{Hom}_C(A; g) \circ \text{Hom}_C(A; f))(h)
\end{aligned}$$

Para todo $h \in \text{Hom}_C(A; B)$.

Axioma 2.

Como para cada B ∈ obj(C) existe $I_B \in \text{Hom}_C(B; B)$, se tiene:

$\text{Hom}_C(A; I_B)(g) = I_B \circ g = g = I_{\text{Hom}\ C(A;\ B)} \circ g$ para todo $g \in \text{Hom}_C(A; B)$.

Definición (Funtor contravariante). Sean C y D dos categorías. Un funtor contravariante de C en D (denotado como F: C → D) consiste en dos aplicaciones:

1. La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto A de C un objeto F(A) de D.
2. La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo f: A → B de C el morfismo F (f): F (B) → F(A) de D.

Y satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1.

$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Axioma 2.

Para cada $A \in C$, $F(I_A) = I_{F(A)}$.

Los funtores que preservan la dirección de morfismos se llaman funtores covariantes y los que cambian su dirección se llaman funtores contravariantes.

Ejemplo Sean las categorías C y Set. Si B es un objeto fijo en C, entonces $\mathrm{Hom}_C(-; B): C \to Set$ es un funtor contravariante.

Para verificar la afirmación se debe observar cómo actúa $\mathrm{Hom}_C(-; B)$

Sobre los objetos y morfismos de C. Es decir:

$$\mathrm{Hom}_C(-; B): obj(C) \to obj\,(Set)$$

$$A \to \mathrm{Hom}_C(-; B)(A) = \mathrm{Hom}_C(A; B)$$

$$\mathrm{Hom}_C(-; B): \mathrm{Hom}_C(A; B) \to \mathrm{Hom}_{Set}\ F(A); F(B)$$

$$F \to \mathrm{Hom}_C(-; B)(f) = \mathrm{Hom}_C(f; B)$$

Con:

$$\mathrm{Hom}_C(f; B): \mathrm{Hom}_C(A; B) \to \mathrm{Hom}_C(C; B)$$

$$H \to \mathrm{Hom}_C(f; B)(h) = h \circ f$$

Se verifica que $\mathrm{Hom}_C(-; B): C \to Set$ satisface los dos axiomas de funtor contravariante:

Axioma 1.

Si $f \in \mathrm{Hom}_C(C; A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_C(D; C)$, entonces para todo $h \in \mathrm{Hom}_C(A; B)$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_C(f \circ g; B)(h) &= h \circ (f \circ g) \\
&= (h \circ f) \circ g \\
&= \mathrm{Hom}(g; B)(h \circ f) \\
&= \mathrm{Hom}_C(g; B)\ \mathrm{Hom}_C(f; B)(h) \\
&= \mathrm{Hom}_C(g; B) \circ \mathrm{Hom}_C(f; B)(h)
\end{aligned}$$

Axioma 2.

Como para cada $A \in obj(C)$, existe $I_A \in \mathrm{Hom}_C(A; A)$, se deduce:

$\mathrm{Hom}_C(I_A; B)(g) = g \circ I_A = g = g \circ I_{\mathrm{Hom}\ C(A; B)}$ para todo $g \in \mathrm{Hom}_C(A, B)$

Definición (Composición de funtores). Sean los funtores f: C → D y g: D → B

La composición g ∘ f: C ⟶ B se define como: (g ∘ F) (A) = g (f (A) (f)=g (f (f))

.

Observación: En toda categoría C, si definimos **I**: C → C como I(A) = A y I (f) = f cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1.

I (g ∘ f) = g ∘ f = I (g) ∘ I (f)

Axioma 2.

$\mathbf{I}(I_A) = I_A = I_{\mathbf{I}(A)}$ Por lo tanto es un funtor y será llamado funtor identidad.

Proposición Si definimos:

1. La clase de objetos obj (Cat) como la clase formada por todas las categorías.
2. La clase de todos los morfismos HomCat(C; B) como la clase de todos los funtores entre las categorias C y B.
3. La composición como la composición definida antes entonces Cat es una categoría, llamada categoría de categorías.

2.2.7.7 Propiedades que preservan los funtores.

Definición (Funtor que preserva productos). Se dice que el funtor F: C → B preserva productos, si (F($A \times B$), F (π_1), F (π_2)) es un producto de F(A) y F (B) en la categoría B.

Definición (Funtor y objeto cero). El funtor F: C → B preserva objeto cero, si F (0) es objeto cero en la categoría B.

Definición (Funtor y morfismo cero). Se dice que el funtor F: C → B preserva morfismo cero si F (0) es un morfismo cero en la categoría B.

Lema Sea F: C → B es un funtor. F preserva objeto cero si y sólo si F preserva morfismos cero.

Demostración: El resultado es consecuencia directa del siguiente hecho. Un objeto en una categoría está caracterizado por su morfismo identidad.

2.2.8 Teorías del Aprendizaje

La teoría del aprendizaje y del conocimiento configuran un manto propicio para el desarrollo de las diversas teorías que tratan de explicar cómo se constituyen los significados en el intelecto en base a ciertos conocimientos previos, se presentará tres teorías, las cuales enmarcan el proceso de enseñanza - aprendizaje.

1. Teoría conductual.

El conductismo sostiene que el ser humano aprende con ayuda de mediadores, es decir el aprendizaje es el resultado inevitable de una serie de condicionamientos dirigidos y pre establecidos. Esta teoría, señala que el aprendizaje es el cambio en la conducta observable del sujeto.

2. Teoría Cognitivista.

Esta teoría pretende fusionar el humanismo y el conductismo. Ella sostiene que el ser humano es activo, cuando se trata de la adquisición del conocimiento regido por un orden lógico. En la práctica cognitivista el aprendizaje es una actividad mental que implica una codificación interna y una estructuración por parte del estudiante. Según esta teoría, el objetivo fundamental del educador es construir o modificar las estructuras mentales del estudiante para introducir en ellas el conocimiento mediante una serie de procesos.

3. Teoría Constructivista.

Antes de su tratamiento se debe definir algunos conceptos básicos para comprender el sustento de esta teoría.

a) Esquema.

Es una actividad operacional que se repite al inicio de forma refleja y se universaliza, es una imagen simplificada de la realidad. Cabe resaltar que estos son comportamientos reflejos que posteriormente serán comportamientos voluntarios que han de convertirse en operaciones mentales.

b) Estructura.

Es el conjunto de respuestas proporcionadas por el sujeto tras haber adquirido nuevos elementos provenientes del exterior. Por lo tanto; la inteligencia es el resultado de la dinámica entre las estructuras mentales del individuo el cual se alimenta de esquemas de acción, es decir de la regulación y coordinación de actividades.

c) Organización.

Es un atributo de la inteligencia y está formada por etapas de conocimiento que conducen a conductas diferentes en determinadas situaciones.

d) Acomodación.

Es una modificación a la organización actual en respuestas a las demandas del medio.

e) Adaptación.

Es un proceso presente en la dialéctica de la asimilación y la acomodación. Este proceso busca a veces la estabilidad y a veces el cambio. La información nueva se adquiere por asimilación y ´esta se regula por acomodación.

f) Equilibrio.

Es el resultado de la interacción del individuo con la realidad y son los marcos mediante los cuales la nueva información se incorpora a la persona.

Por lo expuesto esta teoría percibe el conocimiento como una construcción realizada desde el interior del individuo y no como una interiorización del entorno. Este proceso de construcción del conocimiento, ocurre cuando el individuo a través de mecanismos de acomodación y asimilación, recibe las nuevas informaciones modificando a la vez sus estructuras de conocimiento preexistentes.

4**. Teoría de aprendizaje significativo.**

Esta teoría fue introducida por David Ausubel y trata de construir un marco teórico que pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición del conocimiento y la retención de los grandes cuerpos de significados.

Según Díaz y Hernández (2010) el aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas del estudiante.

De otro lado, Roncal (2009) describe que el aprendizaje significativo es el resultado de la interacción de los conocimientos previos y los conocimientos nuevos y de su adaptación al contexto, y que además el aprendizaje es funcional en un determinado momento en la vida del individuo.

Galicia, et al. (2004) ponen de manifiesto las siguientes características del aprendizaje significativo:

a) Se puede aplicar a la vida, lo que se aprende adquiere sentido cuando se emplea de manera práctica y creativa en el contexto.

b) Es motivado por interés personal, debido a que el aprendizaje significativo es parte de la autorrealización.

c) Es un aprendizaje integral y penetrante porque contribuye en la plenitud del desarrollo de la persona debido a que los conocimientos deben ser aplicados en actividades cotidianas.

Así mismo plantearon tres condiciones necesarias para que se lograr un aprendizaje significativo.

a) Los materiales educativos deben ser diseñados respetando los momentos de aprendizaje de los individuos.

b) Se debe considerar los estilos de aprendizaje como el eje primordial de todo diseño instruccional.

c) Generar un clima de motivación constante.

2.2.8.1 Constructivismo y aprendizaje significativo

La relación entre el constructivismo y el aprendizaje significativo, tiene un carácter relevante en la teoría de la enseñanza-aprendizaje porque son dos corrientes educativas que se vinculan en los procesos de aprendizaje, en ese sentido Romero (2009) señala que el aprendizaje significativo se desarrolla a partir de dos ejes: la actividad constructiva y la interacción con los otros. Se construyen significados cada vez que se es capaz de establecer relaciones sustantivas y no arbitrarias entre lo que se aprende y lo que ya se conoce. La diferencia entre el constructivismo y el aprendizaje significativo radica fundamentalmente entro lo dinámico y lo estático.

2.2.8.1.1 Clases de aprendizaje significativo

Atendiendo al objeto aprendido Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo:

a) Aprendizaje de representaciones.

Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, es un aprendizaje reiterativo y por descubrimiento, al respecto Ausubel dice:

Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan (Ausubel; 1983:46).

b) Aprendizaje de conceptos.

Para Ausubel (1983:61). Los conceptos se definen como objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos, partiendo de ello podemos afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones.

c) Aprendizaje de proposiciones.

El aprendizaje de conceptos tiene una función simbólica que deriva de la relación de equivalencia que se establece entre el símbolo y los diferentes ejemplos del referentes. La base del aprendizaje proposicional: los conceptos (Ausubel los define como objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales comunes y se designan, en una cultura por algún signo aceptado) a medida que se incorporen nuevos significados adicionales a los mismos símbolos y signos, se irán delimitando los atributos criteriales definitorios de los conceptos en sentido estricto.

2.2.8.1.2 Teoría de la simulación

Ausubel indica que la asimilación, es un proceso que se genera al combinar diversos atributos característicos de los conceptos que constituyen las ideas de anclaje, para dar nuevos significados a nuevos conceptos y proposiciones enriqueciendo paulatinamente la estructura cognitiva del individuo. Por lo tanto la asimilación, es la interacción entre el nuevo material que será aprendido y la estructura cognoscitiva existente en el individuo el cual origina una reorganización de los nuevos y antiguos significados con la finalidad de formar una estructura cognoscitiva diferenciada.

Según Moreira (2000 pág. 26) la teoría de la asimilación fundamenta que los nuevos significados (a) son adquiridos a través de la interacción de los nuevos conocimientos con los conceptos o proposiciones previas (A), existentes en la estructura cognitiva del que aprende, de esa interacción resulta de un producto ($A^{I}a^{I}$), en el que no solo la nueva información adquiere un nuevo significado (A^{J}) sino, también el sub-sensor (A) adquiere significados adicionales (A^{J}). Durante la etapa de retención el producto es disociable en $A^{J} + a^{J}$; para luego entrar en la fase obliteradora donde ($A^{I}a^{I}$) se reduce a A^{J} dando lugar al olvido. Tal proceso se representa mediante el siguiente esquema.

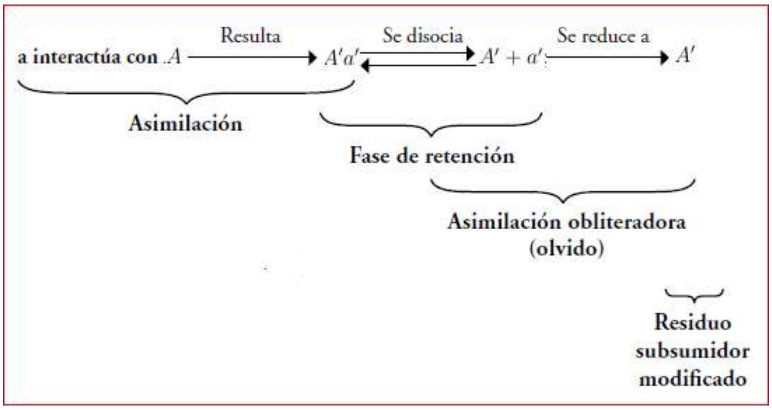


Figura 5.1: Fases del proceso de asimilación según Moreira.

2.2.8.1.3 El docente como mediador del aprendizaje significativo

Díaz y Hernández (2010) señalan que el aprendizaje es el resultado de un compromiso establecido de manera biunívoca entre el docente, interactuando alrededor del mismo medio social, natural y cultural. Las competencias necesarias que un docente debe tener para lograr un aprendizaje significativo son:

1. Conocimiento teórico y pertinente para diseñar su plan de clases.
2. Valores y actitudes necesarias para incentivar y potenciar los valores
3. Conocer el contenido programático.
4. Conocer estrategias de enseñanza y aprendizaje
5. Dominio de las teorías del conocimiento.

2.2.9 Modelo categórico del proceso enseñanza-aprendizaje

En esta sección se construirá dos categorías; una llamada categoría docente Cat_{Doc} y la otra categoría aprendiz Cat_{Apr} con la finalidad de establecer una relación de transmisión (funtor) de aprendizaje entre ellas. Tal propuesta tiene como marco de desarrollo a la teoría del aprendizaje significativo y a la teoría constructivista ambas vistos en el capítulo anterior.

De otro lado, el funtor entre CatDoc y CatApr se sustenta en la transmisión del conocimiento que ocurre entre el docente y el aprendiz (alumno) en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las hipótesis necesarias para nuestra propuesta son las siguientes:

1. El conocimiento transmitido por el docente al aprendiz no es alea- torio.
2. El docente cumple con las características establecidas en la subsección 2.2.7.3 del capítulo anterior.
3. El aprendiz tiene conocimientos previos establecidos en su estructura cognitiva.
4. El docente es un ser razonador que cree lo siguiente: Para todo conocimiento transmitido existe un conocimiento previo.
5. El aprendiz se encuentra motivado por adquirir nuevos conocimientos.
6. El docente entiendo el proceso de asimilación que el aprendiz re- quiere para adquirir nuevos significados de conceptos para afianzar su conocimiento.

7. El aprendiz construye activamente su conocimiento a través de mecanismos de acomodación y asimilación.

8. Se asume que un concepto previo para el aprendiz es una creencia verdadera que podemos describir como una justificación racional para él.

2.2.9.1 La categoría Aprendiz

Definición (Aprendiz). Un aprendiz es toda persona dedicada a tratar de aprender valiéndose para ello de diversas estrategias. Será representado por P.

Definición (Concepto previo del aprendiz). Es una creencia verdadera denotada por φ, susceptible a ser modificada.

Definición (Mundo posible del aprendiz). El mundo posible de un aprendiz es el conjunto A = {φ, ψ,...}. De creencias verdaderas de cierto aprendiz P.

Observación El aprendiz P tiene tantos mundos posibles como tanto sea su motivación por aprender.

Definición (Lógica de los mundos posibles). Es el conjunto de razonamientos posibles que el aprendiz utiliza marco referencia para establecer su estructura dinámica de aprendizaje. Así por ejemplo:

1. P sabe que ψ.

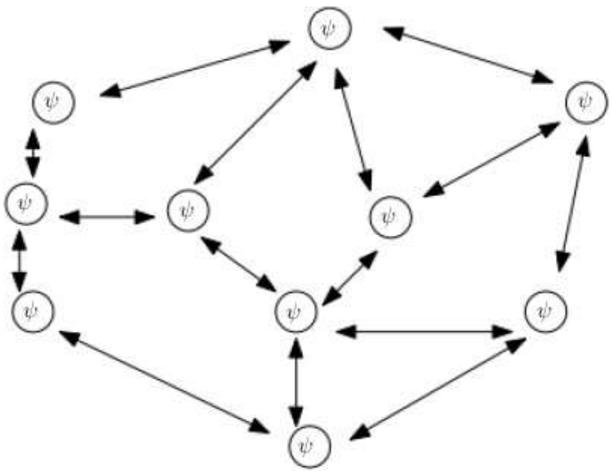
2. P sabe si ψ.

3. P no sabe que ψ.

4. P no sabe si ψ.

5. P considera posible que sabe ψ.

Permite construir la siguiente estructura dinámica de aprendizaje.



Lógica de los mundos posibles para el aprendiz.

Definición (Estados de aprendizaje). Los estados de aprendizaje, es un conjunto $E = \{A_P, B_P, ...\}$ de estructuras dinámicas de cierto aprendiz P.

Definición (Relación de accesibilidad). Dados $A_P, B_P \in E$, decimos que A_P f B_P si y sólo si son indistinguibles para el conocimiento de P.

De otro lado, por convención cuando ocurra AP f BP será representado por el siguiente esquema relacional $f : A_P \to B_P$.

Observación El aprendiz P se dice que domina o conoce una ψ

En E si y sólo si ψ es verdadero en todos los estados indistinguibles para él.

Proposición La relación de accesibilidad definida antes es una relación de equivalencia.

Proposición Si definimos.

1. La clase de objetos *obj* (Cat_{Apr}) como la clase de todos los estados de aprendizaje de cierto aprendiz.

2. La clase de todos los morfismos de A_P *en* B_P ;$Hom_{Cat_{Apr}}$ (A_P ; B_P) a la clase de todos los morfismos de AP en BP , como la clase de todas las relaciones de accesibilidad. Luego por Proposición 6.1.9, $\boldsymbol{f} : A_P \to B_P$ es una clase de equivalencia que por abuso de notación es representado por f .

3. La composición como la composición usual de relaciones. Entonces Cat_{Apr} es una categoría.

Demostración: Para demostrar tal afirmación se debe verificar que se cumplen los axiomas de categoría.

Axioma 1.

Demostraremos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Para $f \in \text{Hom}_{Cat_{Apr}} (A_P; B_P)$,

$g \in \text{Hom}_{Cat_{Apr}} (B_P; C_P)$ y $h \in \text{Hom}_{Cat_{Apr}} (C_P; D_P)$.

En efecto; por definición de la relación de accesibilidad y propiedad transitiva de $g \circ f$ se deduce que A_P es indistinguible con C_P.De otro lado, de $h \circ (g \circ f)$ se tiene que CP es indistinguible con D_P. Luego por transitiva se concluye que A_P es indistinguible con D_P.Por un razonamiento totalmente análogo se establece que A_P es indistinguible con D_P.Por lo tanto se verifica la igualdad.

Axioma 2.

Dado $A_P \in obj\ (Cat_{Apr})$ demostraremos que existe $I_A \in \text{Hom}_{Cat_{Apr}} (A_P;A_P)$tal que $f \circ I_{A_P} = f$ y $I_{A_P} \circ g = g$.

En efecto; es evidente que IAP existe pues por Proposición 6.1.9 es una relación reflexiva, luego $f \circ I_{A_P} = f \circ I_{A_P} = f$ y $I_{A_P} \circ g = I_{A_P} \circ g = g$, para todo objeto $A_P \in obj\ (Cat_{Apr})$.

2.2.9.2 La categoría Docente

Definición (Docente). Es una persona dedicada a enseñar o que realiza acciones referentes a la enseñanza. Será representado por D.

Definición (Creencias del docente). Una creencia para D es el estado de la mente en el que supone verdadero el conocimiento previo φ de P.

Definición (Mundo posible del docente). Es el conjunto D = {φ∗, ψ...}.

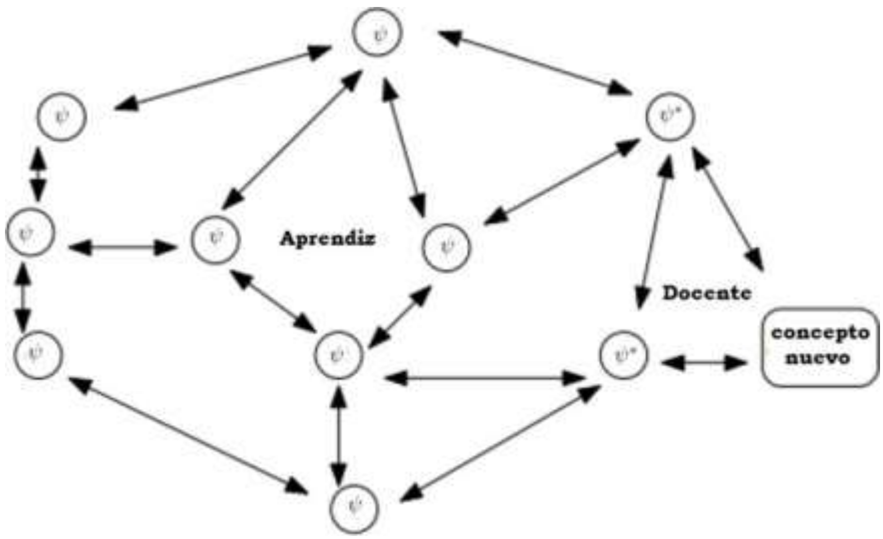
De creencias verdaderas de cierto docente D.

Observación El docente D tiene tantos mundos posibles como tanto sea su motivación por enseñar.

Definición (Lógica de los mundos posibles). Es el conjunto de razonamientos posibles que el docente utiliza marco referencia para establecer su estructura dinámica de enseñanza. Así, por ejemplo:

1. D cree que $\psi*$.
2. D cree si $\psi*$.
3. D no cree que $\psi*$.
4. D no cree si $\psi*$.
5. D considera posible que cree $\psi*$.

Permite construir la siguiente estructura dinámica de enseñanza respecto a un conocimiento nuevo para el aprendiz.



Lógica de los mundos posibles para el maestro.

Definición (Estados de creencias). Los estados de creencias es el conjunto $C = \{A_D, B_D, \ldots\}$ de estructuras dinámicas de metodologías de enseñanza de cierto docente D.

Definición (Relación de creencia). Dados $A_D, B_D \in D$ decimos que $A_D \boldsymbol{f} B_D$ si y sólo si son indistinguibles para el conocimiento de D.

De otro lado, por convención cuando ocurra $A_D \boldsymbol{f} B_D$ será representado por el siguiente esquema relacional f: $A_D \to B_D$.

Proposición La relación de creencias definida en es una relación de equivalencia.

Demostración: Es evidente por la definición.

Proposición Si definimos.

1. A la clase de objetos *obj* (Cat_{Doc}) como la clase de todos los estados de creencias de cierto docente.

2. Por Hom $_{Cat}Doc$ (A_D; B_D) a la clase de todos los morfismos de A_D en B_D como la clase de todas las relaciones de creencias del docente D.

Luego por Proposición f: $A_D \rightarrow B_D$ es una clase de equivalencia que por abuso de notación es representado por f.

3. La composición como la composición usual de relaciones. Entonces Cat_{Doc} es una categoría.

2.2.9.3 El funtor enseñanza-aprendizaje

Como sustento al modelo funtorial de enseñanza-aprendizaje que desarrollaremos a continuación se considera las aseveraciones hechas en la del capítulo anterior.

Definición (Categoría de las categorías Cat_{Apr}). Es aquella categoría denotada por Cat_{Apr}**).** Donde:

1. La clase de objetos *obj* (Cat_{Apr}) se define como el conjunto de todos los aprendices presentes en un determinado momento en el salón de clase.

2. La clase de todos los morfismos de A en B es representada por $Hom_{Cat}Apr$ (A; B) y se define como las creencias que poseen los aprendices.

3. La composición se define como la acción de saber manipular las creencias con la finalidad de lograr cierto conocimiento.

Definición (El funtor enseñanza-aprendizaje). Dadas las categorías Cat_{Apr} y Cat_{Doc}. Definimos el funtor F: $Cat_{Doc} \rightarrow Cat_{Apr}$ llamado enseñanza-aprendizaje como la transmisión del conocimiento.

Proposición El funtor F: $Cat_{Doc} \rightarrow Cat_{Apr}$ es un funtor covariante llamado enseñanza-aprendizaje entre ambas categorías.

Demostración: Para verificar la afirmación se debe observar cómo actúa

F sobre los objetos y morfismos de Cat_{Doc}.Es decir:

F: $obj\ (Cat_{Doc}) \rightarrow obj\ (Cat_{Apr})$

$A_D \rightarrow$ F (A_D)

F: Hom $_{Cat}Doc\ (A_D; B_D) \rightarrow$ Hom $_{Cat}Apr$

F (A_D); F (B_D)

$F \rightarrow$ F (f); donde, $f: A_D \rightarrow B_D$

Satisface los dos axiomas de funtor covariante

Axioma 1.

Dados los morfismos $f \in \text{Hom}_{Cat_{Doc}}(A_D; B_D)$ y $g \in \text{Hom}_{Cat_{Doc}}(B_D; C_D)$, es evidente que se verifica la igualdad F (g ◦ f) = F (g) ◦ F (f).

Axioma 2.

Como para cada $B_D \in obj\,(Cat_{Doc})$ existe $I_{B_D} \in \text{Hom}_{Cat_{Doc}}(B_D; B_D)$, se tiene:

$F\,(I_{B_D}) = I_{F\,(B_D)} \circ f = f = I_{F\,(B_D)} \circ f,$ para todo $f \in \text{Hom}_{Cat_{Doc}}(A_D; B_D)$.

2.3 DEFINICION DE TERMINOS

1. Aprendizaje significativo Tal como lo comenta Veloz (2014). El aprendizaje significativo es una adquisición de nuevos conocimientos mediante su inclusión en conceptos ya existentes de la estructura cognoscitiva.

2. categoría. La teoría de categorías es una propuesta lógica que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos, morfismos y funtores.

3. Errores conceptuales. Según Molina (2012). Los errores conceptuales son todos los obstáculos para el desarrollo del pensamiento creativo y crítico, pues condicionan el proceso por el que se adquieren nuevos conocimientos

4. Definición (Docente). Es una persona dedicada a enseñar o que realiza acciones referentes a la enseñanza. Será representado por D.

5. Definición (Creencias del docente). Una creencia para D es el estado de la mente en el que supone verdadero el conocimiento previo φ de P

6. Definición (Funtor contravariante). Sean C y D dos categorías. Un funtor contravariante de C en D (denotado como F: C → D) consiste en dos aplicaciones:

1. La aplicación objeto F, que asigna a cada objeto A de C un objeto

   F(A) de D.

2. La aplicación morfismo F, que asigna a cada morfismo F: A → B de C el morfismo F (f): F (B) → F(A) de D. satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1.

$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Axioma 2.

Para cada $A \in C$, $F(I_A) = I_{F(A)}$.

Los funtores que preservan la dirección de morfismos se llaman funtores covariantes y los que cambian su dirección se llaman funtores contravariantes.

7. Definición (El funtor enseñanza-aprendizaje). Dadas las categorías Cat_{Apr} y Cat_{Doc}. Definimos el funtor $F: Cat_{Doc} \to Cat_{Apr}$ llamado enseñanza-aprendizaje como la transmisión del conocimiento.

8. Mapas Conceptuales

Según Díaz-Barriga y Hernández (2010). Los mapas conceptuales son organizadores gráficos que buscan jerarquizar y representar información. Esta herramienta relaciona información a nivel general o global y se forman proposiciones por medio del sistema de enlaces con conectores.

9. Prueba Constructiva

En opinión de Quispe, M. (2019), una prueba constructiva es la demostración de la existencia de cierto objeto matemático a través de su construcción. Por lo tanto, una prueba constructiva debe proveer un algoritmo para obtener el objeto en cuestión.

10. Proceso de enseñanza-aprendizaje

Según Wikipedia, es el procedimiento mediante el cual se transmiten conocimientos especiales o generales sobre una materia y tiene por finalidad la construcción del conocimiento con ayuda de mecanismos específicos

11. Definición (Morfismo cero a izquierda).

$f: A \to B$ es morfismo cero a izquierda si $f \circ g = f \circ h$, para cualquier $C \in obj(C)$ y cualesquiera $g, h \in \mathrm{Hom}_C(C; A)$.

12. Definición (Morfismo cero a derecha). f: A → B es morfismo cero a derecha si $g \circ f = h \circ f$, para cualquier C ∈ obj(C) y cualesquiera *g, h* ∈ Hom_C (*B*; *C*).

13. Definición (Morfismo cero). f : A → B es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha.

2.4 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

2.4.1 Hipótesis general

La trasmisión del proceso enseñanza – aprendizaje se caracteriza con la ayuda de la teoría de categorías

2.4.2 Hipótesis específicas

1. Los fundamentos de la teoría del conocimiento son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la teoría de categorías.

2. El proceso de trasmisión del conocimiento se interpreta en el plano categórico

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1 Diseño Metodológico

Esta investigación se desarrolla a partir de un estudio de caso, aplicado en el ámbito de la teoría del conocimiento, donde los fundamentos los conceptos y los métodos de enseñanza son las unidades de análisis, pues se pretende construir un Modelo de la transmisión del conocimiento. Para tal fin utilizaremos el método de Síntesis o Sintético.

3.1.1Tipo de Investigación

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica.

3.1.2 Nivel de Investigación

De acuerdo a la naturaleza del estudio de la investigación, reúne por su nivel las características de un estudio de nivel exploratorio.

3.1.3 Diseño

Por ser un tema de carácter teórico, el diseño de la investigación es de carácter básicamente explicativo basada en la discusión y el análisis crítico.

3.1.4 Enfoque

De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo.

3.2 Población y Muestra

Ésta investigación tiene como ámbito de estudio a la ciencia de la educación y la teoría de categorías. Específicamente: el proceso de transmisión del conocimiento en el enseñanza-aprendizaje y las construcciones categóricas.

3.3 Operacionalización de Variables e indicadores

Se define como variable independiente a la transmisión del conocimiento en la enseñanza-aprendizaje y la variable dependiente es la interpretación que existe entre este sistema y la teoría de categorías.

Con la finalidad de concretizar la operacionalización de las variables propuestas se propone las siguientes acciones de estudio.

1. El primer paso es definir los elementos del proceso enseñanza - aprendizaje.

2. El segundo paso es definir el conocimiento.

3. El tercer paso es definir la teoría de categorías.

4. El cuarto paso es elaborar una interpretación categórica de la transmisión del conocimiento.

3.4Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Con la finalidad de lograr los objetivos de nuestra investigación se procederá a recopilar y extraer información referente a la variable de estudio.

3.4.1Técnicas a emplear

Por el tipo de la investigación, reúne las condiciones metodológicas de una investigación documental.

3.4.2 Descripción de los instrumentos

Se va a crear una base de datos personalizada en el Drive de Google con información alojada en repositorios institucionales como el Renati- Sunedu y Revistas especializadas del área de Matemáticas como MathScinet.

3.5 Técnicas para el procesamiento de la información

La recopilación de la información fue documental basada en la indagación y reflexión.

CAPITULO IV

SUGERENCIAS CONCLUCIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. Sugerencias

Las sugerencias para trabajos futuros son los siguientes

a) Por ser el proceso de enseñanza- aprendizaje importante en la adquisición de conocimiento, un trabajo futuro pendiente de nuestra propuesta seria la generalización de esta metodología hacia los mapas conceptuales.

b) Extender los principios metodológicos de nuestra investigación a la teoría socio-constructivista del aprendizaje.

c) Implementar un marco interpretativo categórico para el proceso de transmisión del conocimiento.

4.2. Conclusiones

Primera.- Se ha modelado categóricamente el proceso enseñanza-aprendizaje y luego se ha interpretado dentro del marco teórico de la teoría de categorías. Se ha establecido que la teoría del conocimiento es susceptible a ser estudiado en el marco de la teoría de categorías.

Segunda.- Se ha demostrado que el proceso de trasmisión del conocimiento se interpreta en el plano categórico.

4.3. Recomendaciones

Se recomienda lo siguiente:

1. Continuar con otras investigaciones referentes al estudio de categorías para el proceso de trasmisión de conocimientos.

2. Generar nuevas interpretaciones en base a modelos matemáticos.

ANEXO

MATRIZ DE CONSISTENCIA

"INTERPRETACIÓN CATEGÓRICA DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE"

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA
PROBLEMA GENERAL ¿Es posible interpretar el proceso enseñanza-aprendizaje con ayuda de la teoría de categorías? **Problemas Específicos** ¿Existirá un proceso de enseñanza-aprendizaje utilizando teoría de categorías? ¿El modelo algebraico planteado funcionará para representar de manera relacional el proceso enseñanza-aprendizaje?	**OBJETIVO GENERAL** Modelar algebraicamente el proceso de enseñanza-aprendizaje con ayuda de la teoría de categorías. **Objetivos Específicos** Exponer en forma clara y detallada la teoría de categorías para ser aplicado en el proceso enseñanza-aprendizaje Interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde el marco conceptual de la teoría de categorías. .	**HIPOTESIS GENERAL** La trasmisión del proceso enseñanza – aprendizaje se caracteriza con la ayuda de la teoría de categorías **Hipótesis específicos** HE 01. Los fundamentos de la teoría del conocimiento son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la teoría de categorías. El proceso de trasmisión del conocimiento se interpreta en el plano categórico	**TIPO DE INVESTIGACIÓN** Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica. **ENFOQUE.** De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo **POBLACIÓN Y MUESTRA** Por ser una tesis netamente teórica, no hay universo, ni población ni muestra. **TÉCNICAS EMPLEADAS.** Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación documental.

CAPITULO V

FUENTES DE INFORMACIÓN

5.1 Fuentes bibliográficas

Awodey, S. (2010). Category Theory, Published in the United States by Oxford University Press Inc.

Ausubel, D. (1978). La **educación** y la estructura del conocimiento. Buenos Aires. El Ateneo.

Ausubel, D.; Novak, J. y Hanesian, H. (1990), Educational psychology: a cognitive view.New York: Holt, Rinehart and Winston.

Broncano, J. (2018), **Construcción de una pro-categorí**a abeliana. (Tesis de **maestría**). Universidad Nacional de **Ingeniería**. **Perú**. Recurepado de http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/17633

Camargo, J; Lima, H; et al (2006). A Method for Preparing Experts in Computer Engineering. Brasil

Freund, M. (2000). Lógica epistémica. Enciclopedia Iberoamericana de **Filosofía** Vol. 7. Editorial Trota. Consejo de **investigación. Españ**a.

Meyer, J.; y Van der Hoek, W. (1995). Epistemic Logic for AI and Com- puter Science, volume 41 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, Great Britain.

Barbosa, F.; Camargo, H. (2013). Mapas de Conhecimento. Revista Uno- par **Científica** Ciencias Humanas e Educacao.

MacLane, S. (1998). Categories for th**e Working Mathematician, Sprin**ger: Berlin, Heidelberg, New York, 2nd Ed.