**UNIVERSIDAD NACIONAL "JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN"**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**ESCUELA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

**TESIS**

# PROPUESTA DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA


**AUTOR:**

**MIGUEL ANGEL ABAL SILVA**


**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACION SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA E INFORMÁTICA**


**ASESOR:**

**Mg. NILO TELLO PANDAL**


**HUACHO – PERÚ**

**2018**

**PROPUESTA DE ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.**

## DEDICATORIA

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de mis estudios.

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, de toda mi educación, tanto académicamente como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

# INDICE

## RESUMEN


El propósito del presente trabajo es comprobar en qué medida mejora el aprendizaje de la teoría de probabilidades en el nivel secundario con la incorporación de una propuesta consistente en un conjunto de estrategias didácticas para su enseñanza por parte de los docentes de matemática y su aprendizaje por parte de los alumnos de la secundaria.

Esta propuesta viene de un previo diagnostico que arrojó la detección de dificultades y problemas en el aprendizaje, comprensión y aplicación de esta teoría por parte de los alumnos y también por parte de los mismos docente y; problemas en cuanto a la insuficiente programación de contenidos por parte del Ministerio de Educación en su Currículo Nacional de Educación básica y, por otro lado el poquísimo espacio (no más del 2% de sus páginas) dedicado a los temas de probabilidades en los textos escolares de la secundaria.

Naturalmente que estas estrategias propuestas se validaron en una realidad concreta, en la I.E. María Reyna de Huaral, con alumnos del quinto grado de secundaria, considerando un grupo de control y un grupo experimental. En ambos grupos se enseñaron los mismos temas, pero en el grupo de control con estrategias tomadas de los textos escolares y, en el grupo experimental con las estrategias propuestas.

Al cabo de aproximadamente 10 horas de sesiones a ambos grupos se les aplico una prueba de desempeño estandart (se incluye en anexos). Los resultados fueron muy ventajosos para el grupo experimental; pues, mediante un contraste de hipótesis (prueba T para muestras independientes) se comprobó que las diferencias observadas en su puntaje promedio final (en escala vigesimal) son significativas estadísticamente.



**Palabras claves:** Probabilidad - Estrategias didácticas - Enseñanza - Aprendizaje

## ABSTRAC

The purpose of the present work is to verify to what extent it improves the learning of probability theory at the secondary level with the incorporation of a proposal consisting of a set of teaching strategies for teaching by mathematics teachers and their learning by of the high school students.

This proposal comes from a previous diagnosis that showed the detection of difficulties and problems in the learning, understanding and application of this theory by the students and also by the teachers themselves and; problems in terms of insufficient content programming by the Ministry of Education in its National Curriculum for basic education and, on the other hand, very little space (no more than 2% of its pages) devoted to the topics of probabilities in school textbooks from highschool.

Naturally, these proposed strategies were validated in a concrete reality, in the I.E. María Reyna de Huaral, with fifth grade students, considering a control group and an experimental group. In both groups the same subjects were taught, but in the control group with strategies taken from the school texts and, in the experimental group with the proposed strategies.

After approximately 10 hours of sessions, both groups were given a standard performance test (included in appendices). The results were very advantageous for the experimental group; Thus, by means of a hypothesis test (T test for independent samples) it was found that the differences observed in their final average scores (in the vigesimal scale) are statistically significant.

Keywords: Probability - Teaching strategies - Teaching - Learning

# INTRODUCCIÓN

El presente trabajo ha sido motivado por la detección de un conjunto de problemas y dificultades que se presentan en la actualidad y que repercuten negativamente en la enseñanza – aprendizaje de una rama importante de la matemática escolar como es la teoría de probabilidades en el nivel secundario. Entre estos problemas y dificultades cabe destacar lo siguiente:

- El poco y confuso entendimiento por parte de los escolares de la existencia de hechos, eventos, suceso y fenómenos que acontecen en la naturaleza, en el campo de las ciencias y en nuestras propias vidas, que están influenciados por el azar. Hecho que es una dificultad para comprender conceptos tales como “espacio muestra”, “suceso aleatorio”, “suceso seguro”, “suceso imposible”, etc. y, muchos otros conceptos ligados al azar o a lo fortuito; entendiéndose por azar como un conjunto de factores que no los podemos controlar.
- Los escolares no saben interpretar el significativo de una probabilidad, su cálculo es mecánico, y mucho menos aplicarla para realizar pronósticos y tomar decisiones objetivas en situaciones de incertidumbre.
- En toda la secundaria la única forma que manejan para calcular probabilidades es la asignación de Laplace, cuando se sabe que esta forma es restringida solo para casos donde presenta la equiprobabilidad de sucesos elementales.
- No se incluye en la programación escolar anual para probabilidades otras formas de asignar probabilidades. Como es la asignación frecuentista o asignación estadística que es más general, más realista, más útil y más formativa para los escolares.
- Los escolares, incluso los docentes, aplican mecánicamente las reglas para calcular probabilidades si un mayor explicación ni compresión del resultado obtenido.
- No se tiene el debido dominio del lenguaje conjuntista para definir, reconocer e interpretar conceptos tales como “Suceso contrario”, “Sucesos excluyentes”, “Suceso intersección”, “Suceso unión”, etc.; hecho que arrastra al cálculo defectuoso de sus respectivas probabilidades.

De otro lado, según información recopilada para este trabajo, con seguridad se puede afirmar que la enseñanza y aprendizaje de esta teoría esta descuidada en nuestro país, por hechos tales como:

- El Currículo Nacional de Educación Básica dedica muy poco contenido o estándares de aprendizaje para los temas de probabilidad.
- Los Textos escolares de matemática dedican no más dedican del 2% de sus páginas al tema de probabilidades.
- Los docentes de matemática no están debidamente preparados para enseñar estos temas. Falta capacitación.

Por toda esta problemática, a través de este trabajo se propone un conjunto de estrategias didácticas, con asesoría de docentes de matemática de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión, para contrarrestar en alguna medida las deficiencias antes expuestas.

Naturalmente que esta propuesta se ensayó y aplicó en una realidad educativa concreta en la I.E. María Reyna de Huaral, con escolares del finito año de media, con resultados muy satisfactorios.

Es de esperar que este trabajo sea el inicio de una investigación seria de la problemática del aprendizaje de la teoría de probabilidades de nivel escolar.

# CAPITULO I:
# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

La Teoría de probabilidades, rama de las matemáticas, cada vez toma más importancia en el campo de las ciencias debido a sus múltiples aplicaciones, como por ejemplo en el campo de la estadística inferencial y bayesiano, lo que ha motivado que en los programas escolares de todo el mundo se la incluya.

Efectivamente, en el Perú su estudio está programado desde el 3er grado de primaria hasta el 5to de grado de secundaria tal como se ha constatado en el Currículo Nacional de la Educación Básica como el Diseño Curricular Nacional (DCN) ambos editados por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU), con una programación gradual tanto como en contenido como en grado de dificultad en función a la evolución de la edad de los escolares de la educación básica regular.

Aun cuando en estos dos documentos oficiales del Minedu están fijados los contenidos, las competencias, capacidades y los logros de aprendizaje para esta teoría, su enseñanza y aprendizaje en nuestros escolares deja mucho que desear por una serie de dificultades y carencias que los podemos resumir entre los más importantes:

a) A nivel nacional se carece de investigaciones sobre estrategias didácticas apropiadas para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades a nivel escolar; por lo que a los alumnos se les dificulta su aprendizaje y los profesores no manejan recursos didácticos como apoyo a su tarea de enseñanza.
b) Poco o nulo conocimiento de los conceptos; definiciones, axiomas y teoremas relacionados a estos campos por parte de los profesores de

matemática; hecho que repercute negativamente en los escolares; pues de todo lo que debieran aprender ellos solo estudian una pequeña parte.

c) Los libros de matemática escolar dedican pocos espacios a los contenidos programáticos y casi nada a recursos didácticos, por lo que gran parte de lo poco que tratan se dedican al cálculo de la probabilidad de Laplace en detrimento del cálculo de la probabilidad estadística, concepto mucho ms general y más importante.

d) Los alumnos, y los profesores también, aplican mecánicamente las reglas básicas para calcular probabilidades sin entender su significado y sus repercusiones en la solución de problemas. Y, peor aún, no saben interpretar sus resultados.

e) No existe una conciencia cabal que las probabilidades son útiles para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

A todos estos problemas de carácter general se suman otros de carácter específico, pero no menos importantes. En efecto, al revisarse una muestra de textos escolares de matemática, la parte que corresponde el tema de probabilidades del 1° al 5° de secundaria, en ninguno se da una interpretación genuina al significado de las reglas básicas para calcular probabilidades. Así tenemos, por ejemplo:

- No se da énfasis a los conjuntos como lenguaje apropiado para la teoría de probabilidades.
- No se explica con claridad por qué un suceso es aleatorio.
- No se interpreta el significado de una probabilidad como una medida del grado de incertidumbre.
- No se explica por qué un suceso es imposible.
- No se explica la utilidad de la regla de la probabilidad contraria.
- En la regla de la probabilidad condicional no se explica las razones de por qué la ocurrencia previa de un suceso aleatorio puede repercutir o condicionar la ocurrencia de un segundo suceso y por ende su probabilidad.
- En la regla de las probabilidades independientes no se explica el

concepto de independencia y, porqué 2 sucesos o más pueden ser independientes.

- En estos textos escolares solo se trata la probabilidad de Laplace, lo que induce a los alumnos a pensar que todos los sucesos elementales son equiprobables, cuando realmente, esta probabilidad de Laplace sólo se presenta en situaciones especiales, cuando un espacio de incertidumbre es discreto y finito, cuyos sucesos elementales son equiprobables.
- No se trata en ninguno de los textos el concepto mucho más importante que es la probabilidad frecuentista o probabilidad estadística, la misma que se deduce experimentando, registrando datos, calculando frecuencias relativas paso a paso, para luego analizar la convergencia hacia un valor estable llamada "probabilidad", en concordancia con la ley de los grandes números.

Así, por ejemplo, no hay forma de calcular, haciendo uso de la probabilidad de Laplace, la probabilidad de infinitos sucesos de la vida cotidiana tales como:

¿Cuál es la probabilidad de que un medicamento cure cierta enfermedad?

¿Cuál es la probabilidad de que en cierto lugar se presente lluvias en determinado mes del año?

¿Cuál es la probabilidad de que un ciudadano vote por un candidato en un proceso electoral?

¿Cuál es la probabilidad de que en cierta ruta de una ciudad a otra ocurra un accidente de tránsito en cierto periodo?

La única manera de calcular estas probabilidades es ya sea experimentando, observando o recolectando datos, luego calculando las frecuencias relativas, para experiencias u observaciones. Esta es la forma más realista de actuar en la vida cotidiana y en el campo de las ciencias. Así, pues, el proceso seguido para calcular una probabilidad estadística va preparando al alumno hacia una actitud investigativa, con tendencia hacia la inducción matemática y la realización de inferencias. Entonces, ¿Por qué insistir en la enseñanza escolar con la probabilidad de Laplace cuando es mucho más formativo el concepto de la probabilidad estadística?

Toda esta problemática expuesta ha motivado como respuesta o solución a la presentación del presente proyecto de tesis titulado: “Propuesta de estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidad en la educación secundaria”.

## 1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### 1.2.1. PROBLEMA GENERAL:

¿Qué efectividad tiene la aplicación de las estrategias didácticas que se propone para la enseñanza - aprendizaje de la Teoría de la probabilidad en la Educación Secundaria?

### 1.2.2. PROBLEMAS ESPECÍFICOS:

a) ¿Es realmente efectiva la estrategia didáctica que se proponen para calcular probabilidades por aproximación, haciendo uso del concepto de probabilidad estadística, realizando experimentos, registrando datos observados, calculando y graficando frecuencias relativas; para luego analizar e interpretar la convergencia de la curva resultante?

b) Las estrategias didácticas que se proponen ¿Es realmente efectiva para interpretar el significado y la utilidad de las reglas básicas (teoremas) para calcular probabilidades?

c) Las estrategias didácticas que se proponen ¿Es realmente efectiva para saber cómo plantear, resolver, interpretar y comunicar problemas matemáticos, en los que el azar juega un papel primordial, para la importante tarea de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre?

## 1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.3.1 OBJETIVO GENERAL:

Comprobar la efectividad de la aplicación de las estrategias didácticas que se proponen para la enseñanza – aprendizaje de la Teoría de probabilidades en la educación secundaria.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

a) Comprobar la eficacia de las estrategias didácticas que se proponen para calcular probabilidades por aproximación, haciendo experimentos, registrando datos observados, calculando y practicando frecuencias relativas; para luego analizar e interpretar la convergencia de la curva resultante.
b) Comprobar la eficacia de las estrategias didácticas que se proponen para calcular para interpretar el significado y la utilidad de las reglas básicas (teoremas) para calcular probabilidades.
c) Comprobar la eficacia de las estrategias didácticas que se proponen para saber cómo plantear, resolver, interpretar y comunicar problemas matemáticos, en los que el azar juega un papel primordial, para la importante tarea de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

## 1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En concordancia con la realidad problemática expuesta en la sección 1.1 del presente proyecto titulado: Propuesta de estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidad en la Educación Secundaria, su ejecución está plenamente justificado porque pretende llenar un vacío en un campo específico de la educación matemática.

El propósito del presente trabajo es facilitar y hacer más asequible el aprendizaje de esta importante teoría por parte de nuestros alumnos, debido a su creciente importancia, para así llegar a los claustros superiores con una base sólida y de calidad para otros aprendizajes más complicados, como por ejemplo la Estadística Inferencial, cuyos métodos y técnicas se fundamentan en la teoría de las probabilidades.

# CAPITULO II:
# MARCO TEÓRICO

## 2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Las referencias sobre investigaciones relacionadas al presente proyecto son internacionales. No se tiene conocimiento de antecedentes nacionales.

Jiménez M.- Jiménez J. (2016) realizaron la investigación titulada: Enseñar probabilidad en primaria y secundaria. ¿Para qué y Por qué?

Este trabajo está dirigido a maestros y profesores de matemática en Costa Rica. En él se exponen algunas reflexiones sobre la necesidad de abordar, en nuestros días, los conceptos de incertidumbre y probabilidad y, además proponen modelos de problemas con comentarios didácticos para orientar el proceso hacia la búsqueda de soluciones.

Palabras claves: Incertidumbre, probabilidad, el azar en la enseñanza.

Reconocen que en Costa Rica se están quedando rezagados en cuanto se refiere a la enseñanza – aprendizaje de la teoría de probabilidades. Para llegar a esta conclusión analizaron los planes de estudio vigentes y notaron que la balanza se inclina hacia los temas tradicionales como la aritmética, algebra, geometría y funciones. Hallaron que recién en el octavo año de estudios se trata tangencialmente algunos elementos de la estadística descriptiva elemental.

¿Por qué enseñar probabilidad?

Los autores reconocen que enseñar probabilidad en los colegios se hace imprescindible porque los tiempos modernos exigen su aprendizaje debido a que esta teoría sirve para modelar situaciones que se presentan en campos de la vida cotidiana y en el campo de las ciencias diversas en las que se presentan situaciones de incertidumbre, en las que necesariamente hay que tomar decisiones en base a las probabilidades.

Los autores hacen una referencia histórica al citar a Descartes quien ya se anticipaba a la aplicación de las probabilidades para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, quien dijo: “Cuando no está en nuestra mano determinar lo que es verdad, debemos actuar de acuerdo con lo que es más probable”

Concluyen diciendo estos autores que una manera de contribuir a mejorar la enseñanza de la teoría de probabilidades en Costa Rica, es por medio de la investigación.

Pajares, G. - Almudena – Tomeo, P. (2014) realizaron la investigación titulada: Enseñanza de la estadística y la probabilidad en secundaria: experimentos y materiales.

Los autores tienen por motivación destacar la importancia de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la enseñanza secundaria de España; pero reconocen que muchas veces en la práctica son “Temas que suelen ser las grandes olvidadas por los profesores de matemáticas y los alumnos”

Palabras claves: estadística, probabilidad, motivación y experimentos.

Los autores proponen en este trabajo un método y un conjunto de actividades que pretenden desarrollar el interés por los fenómenos aleatorios y la estadística a través de la experimentación directa con materiales creados por ellos para este fin.

Reconocen que la enseñanza de probabilidades se justifica hoy en día con más razón porque ha aumentado el alcance de sus aplicaciones y que tiene la enorme cualidad de ser capaz de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales. Agregan que su conocimiento es fundamental para la formación de un individuo capaz de comprender el mundo en el que vivimos.

Destacan las investigaciones sobre el razonamiento probabilístico en los niños llevadas a cabo por Piaget e Ingelder (1951) por un lado y, Fischbein (1975) por otro. Para Piaget el niño no comprende la naturaleza aleatoria antes de los 7 años; pero para Fischbein la distinción entre los fenómenos probabilísticos y determinísticos aparecen antes de los 7 años cuando se les instruye tempranamente sobre las consecuencias del azar o incertidumbre.

Los autores recomiendan la secuencia didáctica de la Comisión Inter – IREM (Francia) para la enseñanza de la probabilidad en secundaria, propuesta por Dental (1997) donde se señalan los siguientes pasos:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Finalmente, recomiendan algunos juegos aleatorios didácticos experimentados por los alumnos en el cálculo de algunas probabilidades de Laplace sugeridas por el profesor.

Batanero C.- Ortiz J.- Serrano L. (2006). Titularon su artículo: Investigación en didáctica de la probabilidad.

Esta investigación, acerca de los avances de la didáctica de las probabilidades, la realizaron en Brasil e iniciaron su introducción con los estudios de Piaget e Ingelder (1951), quienes iniciaron el análisis detallado de las etapas en la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, así como la cuantificación de probabilidades en niños y adolescentes. Estudios que indican que en el estadio pre operacional (4 - 7 años) los niños rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre; al comparar probabilidades solo toman los casos favorables. En el periodo de las operaciones concretas (7 – 11 años) los niños adquieren progresivamente una comprensión del azar, pero aún confían de la posibilidad de controlarlo. Finalmente, en la etapa de operaciones formales (A partir de 12 años) progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones no predecibles, adquieren la intuición de convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria.

Posteriormente las conclusiones de Piaget e Inhelder fueron rebatidas por Fischbein (1975), cuyos trabajos constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la psicología y la educación matemática. Fischbein concluye que las ideas sobre el azar y sus efectos ya se dan en el estadio pre operacional (4 – 7 años).

Resaltan también los trabajos de Kahneman, Slovic y Tversky (1982) que se refieren al razonamiento correlacional, la inferencia, la probabilidad condicional y la regla o teorema de Bayes. Realizan los estudios psicológicos sobre toma de decisiones en situación de incertidumbre.

Respecto a la enseñanza y resolución de problemas de probabilidad resaltan la importancia de los trabajos de Tauber, Batanero y Sanchez (2005) quienes diseñan una secuencia de aprendizaje basada en el uso de programas de computación, haciendo que la introducción de la tecnología introduzca nuevos significados en los conceptos que se trata de enseñar, y que lleva también a nuevas formas de evaluación.

En cuanto a currículo y formación de profesores, los autores manifiestan de que a pesar de que la probabilidad se incluye oficialmente en los planes curriculares de la educación secundaria, no siempre se enseña, y muchos profesores hacen énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de seguir las directrices actuales que recomiendan el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas y experimentación con fenómenos aleatorios. De otro lado, dicen que surge la necesidad de la formación didáctica de los profesores que enseñan probabilidad.

Respecto al análisis de los libros de texto de probabilidad indican que es difícil para los profesores encontrar un apoyo para cambiar el enfoque tradicional, ya que estos presentan a veces una visión sesgada e incompleta del tema.

Cardona J.- Arias J. (2007) Son autores de la ponencia: Didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional, presentada en el primer encuentro regional de la enseñanza de las ciencias exactas y naturales, realizado en el Universidad Católica Popular de Risaralda (Brasil) en noviembre 2007.

En este trabajo, los autores reconocen que uno de los temas de difícil aprendizaje es la probabilidad condicional, por lo que proponen un método para facilitar el proceso de enseñanza – aprendizaje de este tema, a los jóvenes que están pasando del pensamiento concreto al formal.

Palabras claves: cálculo de probabilidad, probabilidad condicional, educación media, competencias, estándares y aleatoriedad.

El método que proponen consiste en realizar una reducción del espacio muestral en una y en dos variables, tomando como punto de partida la probabilidad conjunta y marginal para el caso bivariado y desde allí poder explicar el concepto y la forma de conceptuar el mismo por medio de ejemplos, pero antes hacen una crítica a la forma tradicional de enseñanza, esto es poner la fórmula $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ siendo $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$ y luego proponer ejercicios para la solución mecánica por parte del estudiante, sin que este comprenda a cabalidad el significado del concepto.

La propuesta didáctica de los ponentes busca precisamente que el estudiante, primero comprenda el concepto como tal, segundo que pueda, por sí mismo, llegar al descubrimiento de la expresión para realizar el cálculo de la probabilidad condicional y, tercero que pueda posteriormente aplicar la regla de forma conciente y no mecánica.

Barraquez, J.- Guisasola, J. (2009). Son autores españoles de la investigación titulada: Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la Universidad basada en la investigación didáctica. El primero pertenece a la Escuela Universitaria Politécnica de San Sebastián, Departamento de matemática aplicada, San Sebastián, España. El segundo pertenece a la misma universidad, pero al departamento de Física Aplicada I.

Los autores parten de que actualmente se acepta que la formación probabilística y estadística es importante para la formación de ciudadanos adultos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, en las que con frecuencia se toman decisiones sobre la base de estudios estadísticos.

El trabajo consiste en una investigación destinada a diseñar y evaluar una innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudios técnicos universitarios. Experimentaron la propuesta con estudiantes del segundo curso de Ingeniería (18 – 20 años) de la Universidad Politécnica de San Sebastián.

Basan sus propuestas en tres principios. El primero consiste en la revisión y análisis sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos elementales de la teoría de probabilidades investigadas por diversos autores, el segundo consiste en realizar el diseño de la enseñanza en la perspectiva social constructivista del aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, la misma que se basa en que los estudiantes aprenden matemática construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia y el conocimiento previos y para facilitar esa construcción, deben participar en actividades colectivas destinadas a que tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales y desarrollen su capacidad de razonamiento y argumentación. Y el tercer principio en que se basan los autores, para esta investigación, es el concepto de demanda de aprendizaje. Las demandas de aprendizaje en un área concreta de contenidos surgen de la diferencia entre las ideas y formas de razonamiento de “sentido común” de los estudiantes y las de las matemáticas en un contexto escolar.

Para esta investigación los autores utilizaron hasta 4 instrumentos de evaluación. El primero consistió en aplicar un cuestionario de preguntas de tipo abierto con énfasis en los niveles de comprensión de las ideas y de la complejidad de los razonamientos. La segunda prueba consistió en un diseño con la intención de profundizar en las explicaciones de los estudiantes experimentales y contrastar hasta que puntos se habían producidos logros en los indicadores de aprendizaje.

La tercera prueba consistió en una entrevista a 6 de los 13 equipos formados, elegidos al azar, con el objetivo de observar la perspectiva general que habían adquirido acerca de la teoría de la probabilidad. La cuarta prueba consistió en un cuestionario de opinión sobre los contenidos que se habían trabajado y la manera de trabajarlos. Se presentaron en esta cuarta prueba diversas afirmaciones y los estudiantes debían valorar de 0 a 10 su grado de acuerdo con cada una.

Los datos recogidos con cada una de las pruebas para el grupo experimental se contrastaron estadísticamente con los datos recogidos con el grupo de control a quienes se les aplicó pruebas convencionales.

Los resultados obtenidos en esta investigación mostraron diferencias significativas entre el método de enseñanza propuesto por los autores con un método convencional de enseñanza. En conclusión, el método propuesto por los autores producía mejores aprendizajes, pues los estudiantes lograron una mayor capacidad de razonamiento probabilístico.

## 2.2 BASES TEÓRICAS

### 2.2.1 CONJUNTOS

#### 2.2.1.1. NOCIONES Y DEFINICIONES BÁSICAS

**a) Noción de Conjunto**

Intuitivamente y sin pretender dar una definición, entendemos que un conjunto es una colección bien definida de objetos. Bien definida significa que es posible determinar con certeza cuándo un objeto es un miembro, o no, de un conjunto.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas A, B, C, ...

Cada objeto o miembro x de un conjunto A se llama elemento del conjunto A y se denota con la proposición lógica p: “x pertenece a A”, lo cual se simboliza con "$x \in A$". En caso que x no sea elemento se denota con la preposición ~p: “x no pertenece a A”, lo cual se simboliza“$x \notin A$”.

Hay 2 formas de denotar un conjunto, una por comprensión y otra por extensión. En el primer caso solo se denota la propiedad p(x) que deben cumplir los elementos x de A y; en el segundo caso se indican sus elementos uno a uno separados por comas o punto y coma.

$A = \{x | x \ cumple \ p(x)\}; por \ comprensión$

$A = \{a_1, a_{2,} a_{3,} \ldots\}; por \ extensión$

**b) Tipos de Conjuntos**

**Conjunto vacío. –** Es aquel conjunto que no posee elemento alguno. Este conjunto se forma por las contradicciones lógicas de las formas “x ≠ x”. Se acostumbra denotarlo con la letra ø.

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$

**Subconjuntos. -** Se dice que un conjunto A es subconjunto de otro B cuando todos los elementos x de A son también elementos de B, lo cual se simboliza por $A \subset B$ y se lee: “A está contenido en B” o “A esta incluido en B”.

**Decir** $A \subset B$ es equivalente a la proposición siguiente:

Si $x \in A \Rightarrow x \in B$; para todo x de A.

**Conjuntos Iguales. –** Un conjunto A es igual a otro conjunto B si se da el caso que $A \subset B \ y \ B \subset A$. Decir que A = B es equivalente a decir:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$. Para todo x de A y B o también $x \in A \Leftrightarrow x \in B$; para todo x de A y de B.

**Conjunto Referencial. –** Un conjunto R es referencial para otro conjunto A cuando se cumple que A es subconjunto de R. si se tiene una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$, se dice que R es referencial para todos ellos cuando cada uno es subconjunto de R.

**Conjuntos Complemento. –** Si R es un referencial para A, se dice que el conjunto A' es el complemento de A, con respecto a R, cuando sus elementos son de R, pero no son de A. Dicho simbólicamente:

$$A' = \{x \in R \mid x \notin A\}$$

**Conjuntos Discretos y finitos. –** Se dice que un conjunto A es discreto y finito cuando se puede enumerar uno a uno sus elementos y saber cuántos elementos posee.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$$

$A$ tienen $n$ elementos

### 2.2.1.2. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El álgebra de conjuntos se genera por la combinación de tres (3) operaciones básicas, que son las siguientes:

a) **Operación de Complementación. –** Sea el conjunto A con un referencial R, la operación de complementación consiste en hallar o deducir otro conjunto A', llamado complemento, tal que:

$$A' = \{x \in R \mid x \notin A \; es \; verdad\}$$

b) **Operación de Intersección. –** Sean los conjuntos A, B con un único referencial R. La operación de intersección consiste en hallar o deducir un tercer conjunto denotado por $A \cap B$, tal que:

$$A \cap B = \{x \in R \mid (x \in A \wedge x \in A) \; es \; verdad\}$$

c) **Operación de Unión. –** Sean los conjuntos A, B con un único referencial R. La operación de unión consiste en hallar o deducir un tercer conjunto denotado por $A \cup B$, tal que:

$$A \cup B = \{x \in R | (x \in A \vee x \in A)\ es\ verdad\}$$

Los elementos de $A \cup B$ son aquellos que están en por lo menos uno de los conjuntos A ó B

**d) Otras Operaciones. –** A partir de las 3 operaciones básicas de complementación, intersección y unión se pueden definir otras operaciones como, por ejemplo:

$A - B = \{x \in R | (x \in A \wedge x \notin B)\ es\ verdad\}$;

$A - B = A \cap B'$ Diferencia de A con B

$A\ \Delta\ B = \{x \in R | (x \in A \wedge x \notin B) \vee\ (x \notin A \wedge x \in B)\}$

$A\ \Delta\ B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ Diferencia simétrica de A con B

### 2.2.1.3. LEYES DE ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El álgebra de conjuntos tiene leyes o propiedades que se dan en el siguiente cuadro:

Leyes del algebra de conjuntos

| N° | LEY | DESCRIPCIÓN |
|---|---|---|
| 1. | $A \cap B = B \cap A$ | La intersección es conmutativa. |
| 2. | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | La intersección es asociativa. |
| 3. | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | La intersección de A con el conjunto vacío es siempre vacío. |
| 4. | $A \cap R = A$ | La intersección de A con su referencial R es el propio A. |

| | | |
|---|---|---|
| 5. | $A \cap A' = \emptyset$ | La intersección de A con su complemento A´ es vacío. |
| 6. | $A \cap A = A$ | La intersección es idempotente. |
| 7. | $A \cup B = B \cup A$ | La unión es conmutativa. |
| 8. | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | La unión es asociativa. |
| 9. | $A \cup \emptyset = A$ | El conjunto vacío es neutro para la unión. |
| 10. | $A \cup R = A$ | La unión de A con su referencial es el propio referencial. |
| 11. | $A \cup A' = R$ | La unión de A con su complemento A' resulta el referencial R. |
| 12. | $A \cup A = A$ | La unión es idempotente. |
| 13. | $(A')' = A$ | La doble complementación de A resulta el mismo A. |
| 14. | $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | El complemento de la intersección es la unión de los complementos. |
| 15. | $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | El complemento de la unión es la intersección de los complementos. |
| 16. | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | La intersección es distributiva con respecto a la unión. |
| 17. | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | La unión es distributiva con respecto a la intersección. |

Todas estas leyes son demostrables usando la lógica formal.

Por ejemplo, demostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$

Solución: Por definición de igualdad de conjunto tenemos:

$x \in (A \cap \emptyset) \Leftrightarrow x \in \emptyset$; debemos demostrar que esto es verdad por definición de intersección:

$(x \in A \wedge x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Sabemos que la proposición "$x \in A$" puede ser verdad o falsa en cambio $x \in \emptyset$ es siempre falso, porque por definición de conjunto vacío este no tiene elementos. Por lo tanto, llevamos esta situación a una tabla;

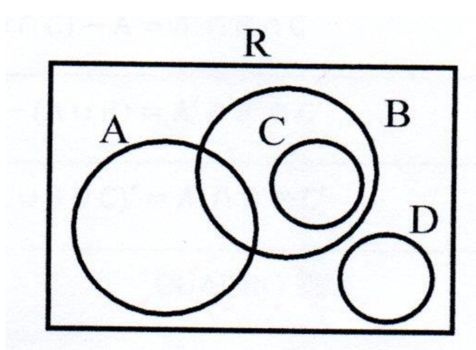
| $(x \in A$ | $\wedge$ | $x \in \emptyset)$ | $\Leftrightarrow$ | $x \in \emptyset$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

En efecto resultó una verdad, por lo tanto es verdad que $A \cap \emptyset = \emptyset$.

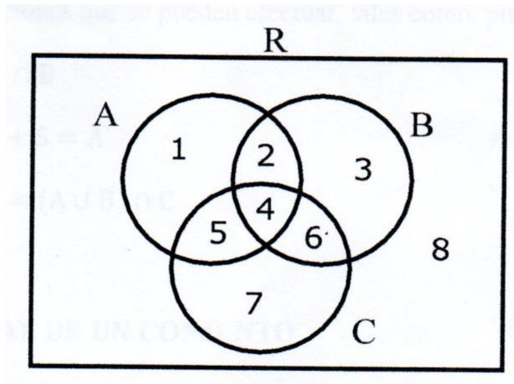
## 2.2.1.4. DIAGRAMA DE VENN

Son diagramas especiales que permiten representar gráficamente a los conjuntos y permiten visualizar algunas relaciones existentes entre ellos. Así como también permite representar distintas operaciones que se pueden dar entre ellos.

Se utiliza un rectángulo para representar el conjunto referencial R y al interior de este van representados los conjuntos A, B, C, ... con figuras cerradas (circunferencias, elipses, polígonos, etc.)



A modo de ilustración, veremos el caso para tres conjuntos donde las regiones o zonas que se forman representan diversas operaciones.




Cada una de estas zonas enumeradas con 1, 2, …8 representan operaciones y conjuntos intersección, tal como se indican a continuación.

| ZONAS | CONJUNTOS |
|---|---|
| 1. | $A-(B\cup C)=A\cap B'\cap C'$ |
| 2. | $(A\cap B)-C=A\cap B\cap C'$ |
| 3. | $B-(A\cup C)=A'\cap B\cap C'$ |
| 4. | $A\cap B\cap C$ |
| 5. | $(A\cap C)-B=A\cap B'\cap C$ |
| 6. | $(B\cap C)-A=A'\cap B\cap C$ |
| 7. | $C-(A\cup B)=A'\cap B'\cap C$ |
| 8. | $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$ |

Además, el diagrama de Ven también permite visualizar simplificaciones que se pueden efectuar, tales como, por ejemplo:

$2+4=A\cap B$

$1+2+4+5=A$

$4+5+6=(A\cup B)\cap C$

#### 2.2.1.5. CARDINAL DE UN CONJUNTO

Llamamos cardinal de un conjunto discreto finito A al número n de elementos que posee, el cual se denota n(A).

Para calcular el cardinal de conjuntos se usan fórmulas apropiadas a partir de la unión de conjuntos.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = {} & n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) \\ & - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)] \end{aligned}$$

Obsérvese que a medida que aumenta la cantidad de conjuntos en la unión, la fórmula resultante se hace más extensa.

Si los conjuntos A, B, C, … son disjuntos entre ellos entonces las fórmulas se hacen más simples.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$$

Existen también otras fórmulas para calcular el cardinal de los conjuntos a partir del cardinal del conjunto referencial.

Para 3 conjuntos A, B, C:

$$\begin{aligned} n(R) = {} & n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap C') + n(A \cap B' \cap C) \\ & + n(A \cap B' \cap C') + (A' \cap B \cap C) + (A' \cap B \cap C') \\ & + n(A' \cap B' \cap C) + n(A' \cap B' \cap C') \end{aligned}$$

De igual manera, a mayor cantidad de conjuntos más extensas son las fórmulas.

### 2.2.2 TÉCNICAS DE CONTEO

Se refiere a las distintas técnicas matemáticas que se conoce para calcular el número de maneras o formas en que se pueden ordenar los elementos de un conjunto de objetos.

**a) TÉCNICA DE LA MULTIPLICACIÓN. –**

Si un evento A puede ocurrir de m maneras y, otro evento B puede ocurrir de n maneras, ¿de cuantas maneras N pueden ocurrir simultáneamente ambos eventos?

$$N\ (A\ y\ B) = mn$$

Ej.: Sea A: lanzar una moneda, que tiene m = 2 resultados: cara, sello

Sea B: Lanzar un dado, que tiene n = 6 resultados: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

¿Si se lanzan simultáneamente la moneda y el dado cuantos resultados pueden aparecer?

$$N(A\ y\ B) = 2 \times\ 6 = 12\ maneras\ o\ resultados$$

**b) TÉCNICA DE LA ADICIÓN. –**

Si un evento A puede ocurrir de m maneras y otro B puede ocurrir de n maneras, ¿de cuantas maneras N puede ocurrir A ó B?

$$N(A\ \text{ó}\ B) = m + n$$

Ej.: Según los datos del ejemplo anterior, ¿de cuantas maneras puede ocurrir uno u otro evento?

$$N(A\ \text{ó}\ B) = 2 + 6 = 8\ maneras$$

**c) TÉCNICA DE LA PERMUTACIÓN SIN REPETICIÓN. –**

Si un conjunto A tiene n objetos, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar todos sus objetos, sin repetir alguno de ellos?

$$P_n = n!$$

Siendo $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times (n)$

Ej.: Se tiene un conjunto A de 5 libros, ¿de cuantas maneras diferentes se pueden colocar estos 5 libros en un estante?

$$P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120\ maneras$$

**d) TÉCNICA DE LA PERMUTACIÓN POR GRUPOS SIN REPETICIÓN.–**

Si un conjunto A tiene n objetos, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar estos objetos en grupos de K objetos $(k < n)$, sin repetir algún objeto?

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ej.: Se tiene un conjunto de 8 objetos, ¿de cuantas maneras se puede ordenar los elementos de este conjunto en grupos de 3 objetos, sin repetir algún objeto?

$$P_{8;3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \times 7 \times 8 = 336\ maneras$$

**e) TÉCNICA DE PERMUTACIÓN POR GRUPOS CON REPETICIÓN. -**

Si un conjunto A tiene n objetos, ¿de cuantas maneras se pueden ordenar estos objetos en grupos de k objetos, repitiendo por lo menos uno de los objetos?

$$rPn; k = n^k$$

Ej.: Se deben fabricar placas para autos con 5 dígitos. Si está permitido repetir dígitos ¿cuantas placas de este tipo se puede fabricar? Los dígitos que usamos son 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, si las placas tienen 5 dígitos, entonces la cantidad de placas que se pueden fabricar es:

$$rP_{10,5} = 10^5 = 100\ 000\ placas$$

**f) TÉCNICA DE LAS COMBINACIONES. –**

Es un caso especial de permutación en el que los objetos se permutan en un solo orden o en una sola dirección ¿de cuántas maneras se pueden combinar n objetos en grupos de k objetos?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ej.: ¿De cuantas maneras se puede seleccionar una comisión de 5 personas de un conjunto de 20 personas?

$$\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\,(15)!} = 15504\ maneras$$

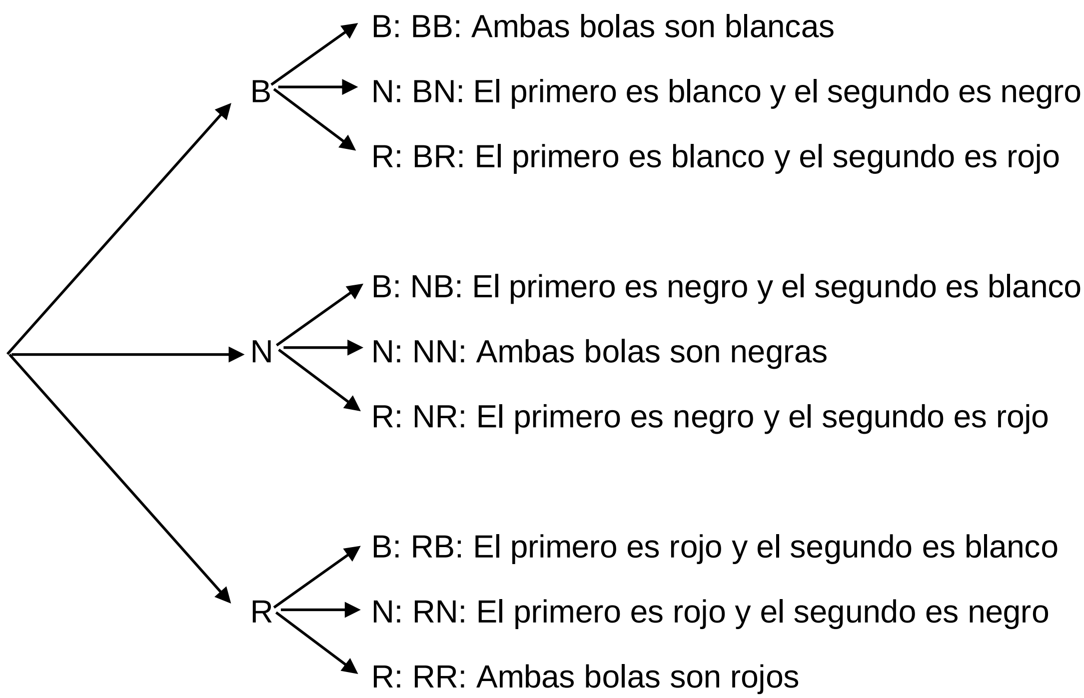
## g) TÉCNICA DEL ÁRBOL. -

Esta técnica no solo permite calcular el número de maneras en que se pueden permutar n objetos, sino que permite visualizar los resultados.

Ej.: En una caja hay 8 bolas de color blanco (B), 5 bolas de color negro (N) y 3 bolas de color rojo (R). Si se extraen de la caja 2 bolas uno tras otro, ¿cuantos resultados de este experimento se espera y cuáles son?

El diagrama del árbol para este experimento es:

Se espera 9 resultados y estos son:



### 2.2.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

#### 2.2.3.1 INTRODUCCIÓN

En la naturaleza existen 2 tipos de fenómenos:

a) Los determinísticos y

b) Los probabilísticos.

Los primeros son aquellos cuya ocurrencia se puede prever exactamente sin ningún error. En cambio, los segundos son imprevisibles, fortuitos o aleatorios porque están afectados por un conjunto de factores incontrolables (azar) que inciden o influyen en la ocurrencia o no del fenómeno.

Por ejemplo, si soltamos un vaso de vidrio desde una altura determinada,

a) Estamos seguros que caerá por atracción de la gravedad (es determinístico), pero;

b) No estamos seguros si este cuerpo se quebrará al llegar al suelo y; peor aun, no estamos seguros en cuántos pedazos se quebrará (es probabilístico).

#### 2.2.3.2 EXPERIENCIAS ALEATORIAS – ESPACIO MUESTRA

Se llama experiencia aleatoria a un conjunto de hechos o fenómenos observables en la naturaleza o realizadas por el hombre, cuyas características son:

a) No es posible predecir con exactitud un hecho particular de la experiencia porque ésta está afectada por el azar.

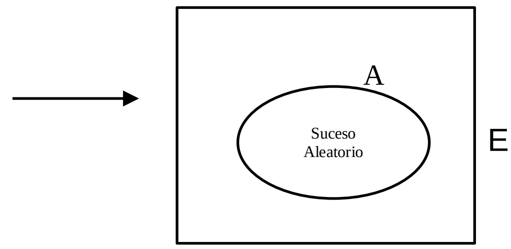
b) La experiencia es repetible o al menos se puede concebir teóricamente la repetición.

c) Es posible conocer o concebir todos los resultados posibles de la experiencia. El conjunto de todos los resultados de la experiencia se llama espacio muestra el cual lo denotaremos con la letra E.

### 2.2.3.3 SUCESOS ALEATORIOS – TIPOS

Observada una experiencia aleatoria, puede ser de interés un resultado o hecho particular de ella. Este resultado particular se llama suceso aleatorio, lo cual lo denotaremos con letras mayúsculas A, B, C, …, etc. En este caso el suceso aleatorio es un subconjunto de E.

Experiencia Aleatoria




Existen diversos tipos de sucesos aleatorios:

a) <u>Suceso Imposible</u>. – Es el suceso que carece de elementos ($\emptyset$) (suceso vacío).

b) <u>Suceso Elemental</u>. – Es el suceso de un solo elemento.

c) <u>Suceso Contrario</u>. – Si A es un suceso, su complemento A’ se llama suceso contrario de A (y viceversa).

d) <u>Suceso Seguro</u>. – Es aquel suceso A que coincide con su espacio muestra E (A=E).

e) <u>Suceso Intersección</u>. – Es la ocurrencia simultánea de dos sucesos A y B. Se denota por $A \cap B$.

f) <u>Suceso Unión</u>. – Es la ocurrencia de por lo menos uno de dos sucesos A o B. Se denota por $A \cup B$.

g) <u>Suceso Disjuntos</u>. – Son dos sucesos A, B cuya ocurrencia simultanea es imposible o vacía $(A \cap B = \emptyset)$ .

Ejemplo N° 01: En una caja se tiene 10 bolos etiquetados con los dígitos 0, 1, 2, … 9. Se realiza la experiencia de extraer al azar un bolo, y luego se registra el digito que aparece.

a) ¿Es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?

Rpta.: Si porque la extracción de bolos es al azar o a la suerte.

b) El espacio muestra es $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

c) Hallar los elementos de los siguientes sucesos aleatorios ligados a la experiencia anterior.

A: El bolo extraído tiene un digito par.

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

B: El bolo extraído tiene un digito no menor que 4 ni mayor que 7.

$B = \{4, 5, 6, 7\}$

C: El bolo extraído no posee el digito 5.

$C = \{\ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

D: El bolo extraído tiene un digito igual a 10.

$D = \{\ \}(es\ vacío\ porque\ no\ existe\ ningún\ bolo\ con\ éste\ número)$

d) Hallar los sucesos contrarios de los anteriores sucesos

A´: El bolo extraído no tiene un digito par.

$A´ = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

B´: El bolo extraído tiene un digito menor de 4 o mayor que 7.

$B´ = \{0, 1, 3, 8, 9\}$

C´: El bolo extraído posee el digito 5.

$C´ = \{5\}$

D´: El bolo extraído no tiene digito igual a 10.

$D´ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

e) De los sucesos dados en c) y d) identificar al suceso imposible, al suceso elemental, al suceso seguro.

D´ es seguro, D es imposible, C´ es elemental

f) Interpretar y hallar los elementos de los siguientes sucesos:

$A \cap B: El\ bolo\ extraido\ tiene\ digito\ par\ y\ no\ es\ menor\ que\ 4\ ni\ mayor\ que\ 7.$

$A \cap B = \{4, 6\}$

$A \cup B: El\ bolo\ extraido\ tiene\ digito\ par\ y/o, no\ es\ menor\ que\ 4\ ni\ es\ mayor\ que\ 7$

$A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 5, 7\}$

$B \cap C: El\ bolo\ extraido\ tiene\ un\ digito\ no\ menor\ que\ 4\ ni\ mayor\ que\ 7\ y, no\ posee\ el\ digito\ 5$

$B \cap C = \{4, 6, 7\}$

$A' \cap B': El\ bolo\ extraido\ no\ tiene\ digito\ par\ y\ es\ menor\ que\ 4\ y\ es\ mayor\ que\ 7$

$A' \cap B' = \{1, 3, 9\}$

Ejemplo N° 02: En cierto lugar de nuestra serranía se realizarán las siguientes experiencias a las 12 del día:

(1) : Se verifica si llueve o no llueve es ese momento.

(2) : Se registra la cantidad de lluvia (en litros por $m^2$) caída en las 24 horas anteriores.

a) ¿son experiencias aleatorias? ¿por qué?

Rpta.: Si porque la presencia de lluvias es aleatoria.

b) Hallar sus espacios muestra

$E_1 = \{Sí, No\}$

$E_2 = \{X \in R | X \geq 0\ litros\}$

c) Hallar los elementos de los siguientes sucesos en relación a $E_2$:

$A: No\ llovió$

$A = \{0\}$

$B: Llovió\ un\ minimo\ de\ 2\ litros\ por\ m^2$

$B: \{X \in R | X \geq 2\ litros\}$

$C: Llovió\ máximo\ 3\ litros\ por\ m^2$

$C: \{X \in R | X \leq 3\ litros\}$

d) Hallar los contrarios de los sucesos anteriores

$A' = \{X \in R | X > 0\ litros\}$: Llovió

$B' = \{X \in R | X < 2\ litros\}: llovió\ menos\ de\ 2\ litros/m^2$

$C' = \{X \in R | X > 3\ litros\}$: Llovió mas de $3\ litros/m^2$

e) Hallar los sucesos

$A \cap B = \{0\}$

$A \cup B = \{X \in R | 0 \leq X \leq 2\}$

$(A' \cap B) \cup (B' \cap C') = \{0 < X \leq 3\} \cup \{\ \} = \{0 < X \leq 3\}$

**Ejemplo N° 03:** En una caja se tienen 5 bolos de color blanco, 3 bolos de color azul y 1 bolo de color rojo.

(1) : Se extraen 2 bolos de golpe.

(2) : Antes de extraer el segundo bolo se devuelve a la caja el primero

**a) Hallar los espacios muestra en cada caso.**

$E_1 = \{BB, BA, BR, AB, AA, AR, RB, RA\}$

$E_2 = \{BB, BA, BR, AB, AA, AR, RB, RA, RR\}$

Siendo:

B: Blanco

A: Azul

R: Rojo

**b) Hallar los elementos de los siguientes sucesos en ambos casos.**

$A: Los\ 2\ bolos\ son\ de\ color\ blanco$

$A_1 = \{BB\}\ en\ ambos\ casos$

$B: Los\ 2\ bolos\ son\ del\ mismo\ color$

$B_1 = \{BB, AA\}\ en\ E_1$

$B_2 = \{BB, AA, RR\}\ en\ E_2$

$C: Por\ lo\ menos\ uno\ de\ los\ bolos\ es\ de\ color\ rojo$

$C_1 = \{BR, AR, RB, RA\}n\ E_1$

$C_2 = \{BR, AR, RB, RA, RR\}\ en\ E_2$

**c) Hallar los contrarios de los anteriores sucesos.**

$A' = \{BA, BR, AB, AA, AR, RB, RA\}$

$B' = \{BA, BR, AB, AR, RB, RA\}$

### 2.2.3.4 VARIABLES ALEATORIAS

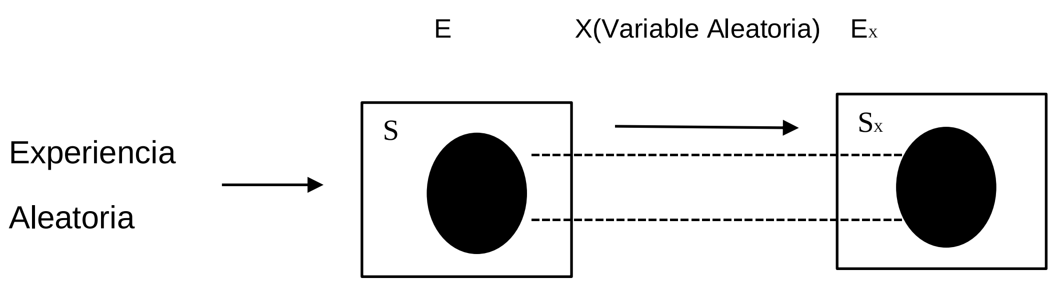
Una variable real X es aleatoria si está ligada o relacionada a una experiencia aleatoria.

El espacio muestra de una variable aleatoria X lo denotaremos por $E_x$ y lo llamaremos “espectro de X”.

Si, $E_x$ es numerable diremos que X es discreto.

Si, $E_x$ no es numerable diremos que X es continuo.

Todo suceso S en E tiene su correspondiente suceso equivalente $S_x$ en $E_x$ al relacionarse una variable con la experiencia aleatoria que originó E. Para una mejor idea de esto véase el siguiente diagrama:




La distinción de los tipos de sucesos aleatorios vistos en el punto 2.2.3.3 Son también válidos para sucesos $S_x$ ligados a una variable aleatoria $X$.

Una variable aleatoria $X$ con sus respectivas probabilidades $p(x)$ recibe el nombre de “distribución de probabilidades de $X$”.

Toda distribución de probabilidades tiene un valor $E(x)$ llamado “esperanza matemática” o “media de la distribución de $X$”.

Cuando el espectro $E(x)$ de una variable $X$ discreta tiene $k$ elementos, la media o esperanza $E(x)$ de la distribución de $X$ se define por:

$$E(x) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k)$$

**Ejemplo N° 04:** Se arrojan 2 dados comunes sobre una mesa y se registra los puntos observados.

**Hallar el espectro de la siguiente variable aleatoria ligada a la experiencia anterior y, luego determinar su distribución de probabilidad y su respectiva esperanza o media:**

$X = Suma\ de\ puntos\ presentes.$

Su espectro $E_x$ y su distribución de probabilidades se dan en el siguiente cuadro:

| Casos considerados para la suma $X$ de puntos presentes | $X$ | $p(x)$ |
|---|---|---|
| $(1;1)$ | 2 | 1/36 |
| $(1;2),(2;1)$ | 3 | 2/36 |
| $(1;3),(3;1),(2;2)$ | 4 | 3/36 |
| $(2;3),(3;2),(1;4),(4;1)$ | 5 | 4/36 |
| $(3;3),(4;2),(2;4),(5;1),(1;5)$ | 6 | 5/36 |
| $(3;4),(4;3),(6;1),(1;6),(5;2),(2;5)$ | 7 | 6/36 |
| $(4;4),(5;3),(3;5),(6;2),(2;6)$ | 8 | 5/36 |
| $(6;3),(3;6),(5;4),(4;5)$ | 9 | 4/36 |
| $(5;5),(6;4),(4;6)$ | 10 | 3/36 |
| $(5;6),(6;5)$ | 11 | 2/36 |
| $(6;6)$ | 12 | 1/36 |

Su esperanza o media $E_x$ es:

$$E(x) = 2\left(1/_{36}\right) + 3\left(2/_{36}\right) + 4\left(3/_{36}\right) + \cdots + 12\left(1/_{36}\right) = 7$$

### 2.2.3.5 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD – AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Sea E (o su equivalente $E_x$), el espacio muestra de una experiencia aleatoria cualquiera y; sea F una familia de subconjuntos de E(o su equivalente $E_x$), con la propiedad de ser un anillo o algebra-sigma; es decir:

i. $\emptyset\ y\ E(o\ \mathrm{E_x})$ están en F.

ii. $S\ y\ S'$ están en F.

iii. La unión e intersección de cualquier número de elementos de F están en F.

La probabilidad de un suceso aleatorio S de F es una función p que se asigna a S de F un número real p(S), bajo el amparo de los siguientes axiomas:

$A_1$: Si, S es un suceso aleatorio, entonces $0 \leq p(S) \leq 1$

$A_2$: $p(E) = 1$

$A_3$: Si, $S_1$, $S_2$, $S_3$,… son sucesos disjuntos dos a dos de F entonces $p(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \ldots) = p(S_1) + p(S_2) + p(S_3) + \ldots$

Las probabilidades también se pueden expresar en porcentajes.

### 2.2.3.6 ASIGNACIONES DE PROBABILIDAD

La definición de probabilidad dada anteriormente no dice como se asigna a S su respectiva probabilidad $P(S) = p$; razón por la cual veremos hasta 4 formas de asignar probabilidades pero antes diremos que dos experiencias aleatorias son independientes cuando ninguno de ellos influye sobre el otro alterando algún resultado.

**a) ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD FRECUENTISTA O ESTADÍSTICA:**

Es la asignación más utilizada en la Teoría de Probabilidad, supongamos que se realizan n experiencias aleatorias independientes del mismo tipo y en ellas se observa que un suceso aleatorio S ocurre k veces.

La asignación o probabilidad frecuentista se define por:

$$p(S) = \lim_{n\to\infty}(k|n)$$

De acuerdo con esta definición; p (S) se obtienen en el límite, pero en casos prácticos bastará solo una aproximación para un valor particular de n. Es obvio que esta aproximación será mejor cuanto más grande sea n.

**Ejemplo N° 05:** En cierta jornada de trabajo una máquina fabricó 500 pernos de los cuales 7 resultaron defectuosas. En otra jornada de trabajo fabricó 800 pernos resultando 11 pernos defectuosos.

**¿Cuál es la probabilidad de que la maquina fabrique un perno defectuoso?**

**Solución:** Con los datos es posible calcular hasta 3 probabilidades por aproximación:

$$p_1 \approx \frac{5}{500} = 1\%; \textit{en la primera jornada}$$

$$p_2 \approx \frac{11}{800} = 1.38\%; \textit{en la segunda jornada}$$

$$p_3 \approx \frac{5+11}{500+800} = 1.23\%; \textit{combinando ambas jornadas}$$

¿Cuál es la mejor probabilidad frecuentista?

¿Cuál es su significado?

La mejor probabilidad es la calculada con n =1300. Su significado es: “De cada 1300 pernos fabricados en promedio 16 son defectuosos”.

**b) ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD DE LAPLACE:**

Esta forma de asignar probabilidades es un caso especial de la asignación frecuentista.

Supongamos que tenemos un espacio muestra E de n elementos.

Supongamos también que en el límite (cuando n tiende a infinito) cada suceso elemental de E tiene por probabilidad $p = 1/n$; entonces cualquier otro suceso S de E, de c elementos tendrá por probabilidad: $p(S) = \frac{C}{n}$

En este caso especial se presenta en situaciones de simetría; por ejemplo, en los juegos azar, en la selección aleatoria de un objeto dentro de n objetos (sorteos aleatorios). La definición de Laplace nos dice que calcular p(S) se reduce a contar los elementos de suceso S y los elementos del espacio muestra E.

**Ejemplo N° 06:** De una baraja de 52 elementos (casinos) se escoge al azar una carta.

**¿Cuál es la probabilidad de que esta carta sea Espada?**

**Solución:** El espacio muestra tiene 52 elementos por lo que la probabilidad de seleccionar cualquiera de las cartas es $p = 1/52$; y como el suceso “sale Espada” tiene 13 elementos, entonces la probabilidad pedida es $p = 13/52 = 1/4$.

**¿Cuál es su significado?**

“De cada 4 cartas elegidas al azar en promedio 1 de ellas es espada”

**Ejemplo N° 07:** 5 personas a, b, c, d, e se sientan al azar en fila.

**¿Cuál es la probabilidad de que “a” se siente en los extremos de la fila?**

**Solución:** 5 personas se pueden sentar en la fila de 5! = 120 maneras "a" puede ocupar los extremos de 48 maneras diferentes (extremo izquierdo o extremo derecho). Por lo tanto la probabilidad pedida es $p = 48/120 = 2/5$

**¿Cuál es su significado?**

"Si las 5 personas se sientan al azar en fila 5 veces, entonces "a" se sentará en los extremos en promedio 2 veces"

**NOTA:** Para calcular probabilidades de Laplace es conveniente manejar las técnicas de conteo: Permutaciones y Combinaciones, etc.

**c) ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD GEOMÉTRICA:**

Esta asignación se usa para calcular probabilidades de sucesos relacionados con la elección al azar de puntos geométricos dentro de una región R.

Se tiene 2 regiones R y R´ dentro de un mismo espacio dimensional con la condición de que R´ es subconjunto de R. Si escogemos al azar un punto X al interior de R. ¿Cuál es la probabilidad de que este punto quede también al interior de R´? Esta probabilidad es:

$$p(X \in R') = \frac{m(R')}{m(R)}$$

En este caso la medida m puede ser una longitud si R Y R´ son segmentos; puede ser un área si R Y R´ son regiones del plano; pueden ser un volumen si R Y R´ son regiones tridimensionales.

**Ejemplo N° 08:** Se tiene 2 círculos concéntricos de radios 5 y 10 cms. Si escogemos al azar un punto X dentro del círculo mayor.

**¿Cuál es la probabilidad de que este mismo punto quede al interior del círculo menor?**

**Solución:**

$m(R) = \acute{A}rea\ del\ círculo\ mayor\ = 10^2\Pi$

$m(R') = \acute{A}rea\ del\ círculo\ menor\ = 5^2\Pi$

$p(X \in R') = {5^2\Pi}/{10^2\Pi} = 1/4$

Lo cual se interpreta: "De cada 4 puntos seleccionados al azar al interior del circulo mayor, en promedio un punto se ubicará al interior del circulo menor".

**d) ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD MEDIANTE UNA FUNCIÓN REAL:**

Ya sabemos que al definir una variable aleatoria X sobre un espacio E originamos otro espacio $E_X$ denominado "espectro". En esta situación es posible definir una función real $f(x)$ que asigne probabilidades a sucesos $S_X$ dentro del espectro $E_X$.

**Ejemplo N° 09:** Sea un suceso S cuya probabilidad de ocurrencia es p en un solo experimento aleatorio. Supongamos que repetimos el experimento hasta que aparezca S, entonces la probabilidad de que S aparezca en el intento número X está dada por:

$f(x) = (1-p)^{x-1}p.$

**¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar 2 dados legales aparezca una suma 7 recién en el 5to intento?**

**Solución:**

Si arrojamos 2 dados legales una primera vez, la probabilidad de que aparezca una suma 7 es $p = 6/36 = 1/6$.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$f(x = 5) = (1 - 1/6)^{5-1}(1/6) = 8\%$

### 2.2.3.7 REGLAS BÁSICAS PARA CALCULAR PROBABILIDADES

La Teoría de Probabilidades se fundamenta en un conjunto de teoremas y definiciones básicas que sirven como reglas para calcular probabilidades. Los más importantes son:

**Teorema N° 01:** La probabilidad del suceso imposible es cero.

**Teorema N° 02:** Dado un suceso S con su contrario S´, entonces se cumple:

$$p(S) + p(S') = 1$$

**Teorema N° 03:** Si S y R son sucesos cualesquiera es un espacio E, entonces:

$$p(R \cup S) = p(R) + p(S) - p(R \cap S)$$

**Teorema N° 04:** Si S y R son sucesos en un espacio E, tal que $S \subset R$, entonces:

$$p(S) \leq p(R) \ y \ p(S \cap R) = p(S)$$

**Definición N° 01:** La probabilidad de un suceso R condicionado por otro suceso S es:

$$p(R|S) = \frac{p(R \cap S)}{p(S)}; p(S) > 0$$

**Definición N° 02:** La probabilidad de la ocurrencia simultánea de los sucesos R y S.

$$p(R \cap S) = \begin{cases} p(S) \circ p(R|S) \\ \quad\quad o \\ p(R) \circ p(R|S) \end{cases}$$

Para 3 o más sucesos se deducen de esta misma definición.

**Definición N° 03:** Dos sucesos R y S son independientes si y sólo si $p(R \cap S) = p(R) \circ p(S)$

Para 3 o más sucesos se deducen de esta misma definición.

**<u>NOTA:</u>** Decir que 2 sucesos son independientes significa que ninguno influye sobre el otro para su ocurrencia o no ocurrencia.

**<u>Teorema N° 05:</u>** Sea $S_1, S_2, S_3, \dots S_n$ una partición de un espacio E y sea B un sucesos cualquiera en E, entonces la probabilidad de B está dado por:

$$p(B) = \sum p(S_1) \circ p(B|S_i)$$

Los sucesos $S_i$ se llaman "causas" y B se llama "suceso efecto". P (B) recibe el nombre de "probabilidad total".

**<u>Teorema N° 06:</u>** La probabilidad de que haya ocurrido la causa $S_i$ habiendo ocurrido el efecto B está dado por:

$$p(S_i|B) = \frac{p(S_i) \circ p(S_i|B)}{\sum p(S_i) \circ p(S_i|B)}$$

$p(S_i|B)$ recibe el nombre de probabilidad de Bayes.

**Ejemplo N° 10:** Se arrojan 3 monedas perfectas y legales sobre una mesa,

a) Calcular la probabilidad de observar 4 caras, entonces la probabilidad de observar 4 caras es cero, por el Teorema 01.

b) Calcular la probabilidad de observar a lo más 2 sellos.

**Solución:**

a) Habiendo sólo 3 monedas es imposible observar 4 caras.

b) Sea S: Observar a lo más 2 sellos.

S´: Observar exactamente 3 sellos.

$P(S') = 1/8$, entonces por el Teorema N° 02 tenemos: $p(S) = 1 - 1/8 = 7/8$

**Ejemplo N° 11:** Se extrae al azar una carta de una baraja de 52 cartas. Sean los sucesos:

**R:** La carta es menor que 5; S: La carta es trébol.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea menor que 5 y/o sea trébol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea trébol a condición de que es menor que 5?

**Solución:**

a) Usando el Teorema N° 03 tenemos:

$$\begin{aligned} p(R \cup S) &= p(R) + p(S) - p(R \cap S) \\ &= 16/52 + 13/52 - 4/52 = 25/52 \end{aligned}$$

b) Usando la Definición N° 01 tenemos:

$$p(S/R) = \frac{P(S \cap R)}{p(R)} = \frac{4/52}{16/52} = 1/4$$

**Ejemplo N° 12:** En una reunión hay 7 varones y 9 mujeres. Se escoge al azar 3 personas para una comisión. Hallar la probabilidad de que la comisión esté conformada por 3 varones.

**Solución:**

R: La primera persona escogida es varón.
S: La segunda persona escogida es varón.
T: La tercera persona escogida es varón.
$R \cap S \cap T$: Las 3 personas escogidas son varones.

Para calcular la probabilidad pedida usamos la Definición N° 02 porque hay condicionamiento de sucesos.

$$p(R \cap S \cap T) = p(R)\, p(S/R)\, p(T/R \cap S)$$
$$= 7/16 \cdot 6/15 \cdot 5/14 = 1/16$$

**Ejemplo N° 13:** En una caja hay 4 bolos de color blanco, 3 bolos de color rojo y 1 bolo de color azul. Se extraen al azar 3 bolos con la condición de que antes de extraer el siguiente bolo se debe devolver lo anterior extraído. **¿Cuál es la probabilidad de que 3 bolos sean de color rojo?**

**Solución** **:** El hecho de devolver a la caja el bolo extraído no produce condicionamiento alguno, por lo que aplicamos la Definición N° 03 para 3 sucesos:

R: El primer bolo extraído es rojo.

S: El segundo bolo extraído es rojo.

T: El tercer bolo extraído es rojo.

$R \cap S \cap T$: Los 3 bolos extraídos son rojos.

Para calcular la probabilidad pedida usamos la Definición N° 02 porque no hay condicionamiento de sucesos.

$$p(R \cap S \cap T) = p(R)\, p(S)\, p(T) = 3/8 \cdot 3/8 \cdot 3/8 = 27/512$$

**Ejemplo N° 14:** En una caja se tiene 5 monedas de oro y 3 monedas de plata. En otra caja hay 2 monedas de plata y 4 monedas de cobre. Se escoge al azar una de las cajas luego se extrae, también al azar 2 monedas, una tras otra. Hallar las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Las 2 monedas son de plata.

b) La caja escogida ha sido la segunda a condición de que se sabe que ambas monedas extraídas son de plata.

**Solución:**

a) Aplicamos el Teorema N° 05:

Sucesos "causa":

$S_1$: La caja escogida ha sido la primera.

$S_2$: La caja escogida ha sido la segunda.

Suceso "efecto"

B: Las 2 monedas son de plata

$$p(B) = p(S_1)\, p(B/S_1) + p(S_2)\, p(B/S_2)$$
$$= 1/2 \cdot 3/8 \cdot 1/2 \cdot 2/6 = 17/48$$

b) Aplicamos el Teorema N° 06:

$$p(S_2/B) = \frac{p(S_2)\, p(B/S_2)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{48}{102}$$

## 2.3 DEFINICIONES CONCEPTUALES

### 2.3.1 DIDÁCTICA

La Didáctica es la rama de la pedagogía que se encarga de buscar métodos y técnicas para mejorar la enseñanza –aprendizaje, definiendo las pautas para conseguir que los conocimientos lleguen de una forma más eficaz a los educandos.

La Didáctica permite abordar, analizar y diseñar esquemas y planes destinados a plasmar las bases de cada teoría pedagógica.

La Didáctica es la disciplina que sienta los principios de la educación y sirve a los docentes a la hora de seleccionar y desarrollar contenidos, persigue el propósito de ordenar y respaldar tanto los modelos de enseñanza como el plan de aprendizaje.

Se llama acto didáctico a la circunstancia de la enseñanza para cual se necesitan ciertos elementos: el docente (quien enseña) el discente (quien aprende) y el contexto de aprendizaje.

En la actualidad existen 3 modelos didácticos bien diferenciados: el normativo (concentrados en los contenidos), el incitativo (focalizado en el alumno) y el aproximativo (centrado en la construcción que el alumno haga con sus nuevos conocimientos).

### 2.3.2 COMPETENCIA

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21),” La Competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético”.

“Ser competente supone comprender la situación que se debe afrontar y evaluar las posibilidades que se tiene para resolverla. Esto significa identificarlos conocimientos y habilidades que uno posee o que están disponibles en el entorno, analizar las combinaciones más pertinentes a la situación y al propósito, para luego tomar decisiones; y ejecutar o poner en acción la combinación seleccionada”.

### 2.3.3 CAPACIDADES

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 21) “las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas”.

“Es importante considerar que la adquisición por separado de las capacidades de una competencia no supone el desarrollo de la competencia”.

Ser competencia es más que demostrar el logro de cada capacidad por separado: es usar las capacidades combinadamente y ante situaciones nuevas”.

### 2.3.4 ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016; p. 22), los estándares de aprendizaje “Son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la educación básica, de acuerdo a la secuencia que sigue la mayoría de estudiantes que progresan en una competencia determinada. Estas descripciones son holísticas porque hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas”.

Los estándares figuran en el Currículo Nacional y tienen 8 niveles según el nivel educativo, los ciclos y grados educativos.

### 2.3.5 DESEMPEÑOS

Son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). Son observables en una diversidad de situaciones o contextos. No tienen carácter exhaustivo, más bien ilustran algunas actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel.

## 2.4 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

### 2.4.1 HIPÓTESIS GENERAL

La estrategia didáctica que se propone en la presente investigación mejora notablemente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en la educación secundaria, en relación a la enseñanza-aprendizaje tradicional.

### 2.4.2 HIPÓTESIS ESPECIFICAS

H1: La estrategia didáctica que se propone es efectiva para calcular probabilidades por aproximación, haciendo uso del concepto de probabilidad estadística, realizando experimentos u observando experiencias aleatorias, registrando datos, calculando y graficando frecuencias relativas; para luego analizar e interpretar la convergencia de la curva resultante.

H2: La estrategia didáctica que se propone es efectiva para interpretar el significado y la utilidad de cada una de las reglas básicas para calcular probabilidades, para luego interpretar el significado del resultado.

H3: La estrategia didáctica que se propone es efectiva para identificar, plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en los que el azar juega un papel primordial, para luego tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

# CAPITULO III
# METODOLOGÍA

## 3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

### 3.1.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Es una investigación aplicada o empírica porque se busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se adquieren a través de un marco teórico, para lograr consecuencias prácticas (Méndez, 2013, p. 63)

### 3.1.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación tiene un diseño no experimental, pues no hay manipulación deliberada de variables. Además, es de tipo transversal correlacional –casual.

### 3.1.3 ENFOQUE UTILIZADO EN LA INVESTIGACIÓN

Se utiliza un enfoque cuantitativo, pues se trabaja con aspectos observables y medibles de la realidad educativa en una rama de las matemáticas: la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidad.

## 3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

La Población está constituida por todos los alumnos del 3ro de secundaria del distrito de Huaral. La muestra está constituida por 38 alumnos (2 aulas) matriculados en el año 2018 del 3ro de media del Colegio Parroquial María Reyna de Huaral. Es una muestra no aleatoria del tipo intencional.

## 3.3 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

| VARIABLES | DIMENSIONES | SUB DIMENSIONES | INDICADORES |
|---|---|---|---|
| **INDEPENDIENTE**<br><br>Estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en la educación secundaria. | - Estrategias para identificar y reconocer fenómenos probabilísticos.<br>- Estrategia para interpretar una probabilidad.<br>- Estrategias para asegurar probabilidades a sucesos.<br>- Estrategias para aplicar y comprender el significado de una regla para calcular probabilidades.<br>- Estrategia para plantear, resolver e interpretar problemas de probabilidad. | - Influencia del azar en la vida cotidiana.<br>- Definición de probabilidad como medida del grado de incertidumbre<br>- Descripción de condiciones para el uso adecuado de asignaciones y reglas para calcular probabilidades.<br>- Uso del lenguaje conjuntista para definir sucesos aleatorios.<br>- Importancia del concepto de probabilidad estadística, para estimar probabilidades. | **GENERACION DE ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA:**<br><br>- Diferenciar fenómenos determinísticos con los fenómenos probabilísticos.<br>- Identificar y aplicar la asignación de probabilidad conveniente para un suceso.<br>- Aprender el uso apropiado de una regla para calcular probabilidades y su correcto significado.<br>- Usar herramientas para generar espacios muéstrate y sucesos aleatorios.<br>- Plantear, resolver, interpretar y comunicar el resultado de un problema probabilístico. |
| **DEPENDIENTE**<br><br>Aprendizaje de la teoría de probabilidades con la aplicación de las estrategias didácticas que se propone, para la educación secundaria. | **COMPETENCIA:**<br><br>Plantea, resuelve e interpreta problemas matemáticos en el que el azar o la incertidumbre interviene (competencia n° 25 del Currículo Nacional de la Educación Básica). | **CAPACIDADES:**<br><br>- Analiza situaciones aleatorias y representa la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad.<br>- Comunica la compresión de los conceptos probabilísticos.<br>- Usa estrategia y procedimientos para realizar experiencias aleatorias.<br>- Sustenta conclusiones y toma decisiones en base a las probabilidades. | **ESTANDARES DE APRENDIZAJE:**<br><br>En lo que corresponde, son los 8 niveles referidos a los desempeños que se relacionan a la competencia n° 25 que aparecen en la pág. 79 del Currículo Nacional para la Educación Básica. |

## 3.4 ESTRATEGIA METODOLÓGICA

La estrategia a seguirse en el desarrollo de la presente investigación se hará a través de 4 fases:

Fase I: Recopilación de Información

a) Aplicación de un cuestionario a docentes de matemática que enseñan en la educación secundaria.
b) Revisión y análisis de textos de matemática utilizados en la educación secundaria para enseñanza de probabilidades.
c) Revisión del Currículo Nacional de la Educación Básica en lo que respecta a la competencia N° 25: “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”, capacidades y estándares de aprendizaje.

Fase II: Diseño de Estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en la educación secundaria:

a) Estrategia para diferenciar fenómenos determinísticos y probabilísticos.
b) Estrategia para interpretar y comparar probabilidades.
c) Estrategia para identificar y aplicar con propiedad las asignaciones de probabilidad para sucesos aleatorios.
d) Estrategia para aprender el uso apropiado de las reglas para calcular probabilidades y su correcto significado.
e) Estrategia para usar herramientas para generar espacios muéstrales y sucesos aleatorios.
f) Estrategias para plantear, resolver, interpretar y comunicar el resultado de un problema probabilístico.

Fase III: Aplicación de las estrategias didácticas propuestas en una realidad educativa: alumnos del 3er año de media (aula A y B) del colegio parroquial María Reyna de Huaral.

Fase IV: Evaluación de las competencias, capacidades y desempeños en la aplicación de las estrategias didácticas propuestas en la fase II.

## 3.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

### 3.5.1 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS A EMPLEAR EN LA RECOPILACIÓN DE DATOS

a) Cuestionario para docentes de matemática en la secundaria.

b) Fichas de revisión y análisis de textos de matemática usados en la educación secundaria.

c) Fichas de revisión y análisis del DCN y el Currículo Nacional en la que respecta a la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en la secundaria.

### 3.5.2 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS A EMPLEAR PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES (CAPACIDADES Y DESEMPEÑOS)

a) Prueba para evaluar capacidades y desempeños en la asignación de probabilidades.

b) Prueba para evaluar capacidades y desempeños en la aplicación de reglas básicas para calcular probabilidades.

## 3.6 TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN

### 3.6.1 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA CON SPSS. -

Elaboración de cuadros y cálculo de estadígrafos.

### 3.6.2 ESTADÍSTICA INFERENCIAL CON SPSS. -

Comparación de medias-prueba T para muestras independientes

# CAPITULO IV
# RESULTADOS

## 4.1 RESULTADOS DE LA RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN

### 4.1.1 RESULTADOS DE APLICACIÓN DE UN CUESTIONARIO A DOCENTES DE MATEMÁTICAS QUE ENSEÑAN EN SECUNDARIA.

En el anexo 01 se incluye un ejemplar de este cuestionario que fue aplicada a 13 profesores de Matemática de distintos colegios de Huaral en agosto 2018, pero sólo 10 entregaron.

El ítem 1 es de tipo abierto para que describa problemas o dificultades principales que según su experiencia está relacionado con la enseñanza - aprendizaje de la teoría de probabilidades en la secundaria. Las múltiples respuestas dadas por los 10 profesores se han uniformizado y consolidado en el siguiente cuadro:

PRINCIPALES DIFICULTADES HALLADAS POR LOS DOCENTES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS PROBABILIDADES.

| DIFICULTADES | FREC. | FREC. % |
|---|---|---|
| Los alumnos poco o nada entienden los conceptos de sucesos aleatorios y sus probabilidades | 4 | 40,00 |
| AL plantearse un problema probabilístico no saben qué fórmula probabilística usar para llegar a la solución | 2 | 20,00 |
| El contenido programático de probabilidades en la secundaria es ínfimo en comparación con otras materias | 2 | 20,00 |
| El MINEDU no programa capacitaciones en esta área (Estadística probabilidades) | 1 | 10,00 |
| Otros | 1 | 10,00 |
| TOTAL | 10 | 100,00 |

CUADRO N° 01

Como se observa en éste cuadro, 2 de los principales problemas (60%) se refiera a la poca compresión por parte de los alumnos de los conceptos “suceso aleatorio”, “probabilidad” y uso de reglas básicas para el cálculo de probabilidades.

Otra preocupación de los profesores es que el contenido programático para las probabilidades, en la secundaria, es ínfimo en comparación a otros temas o áreas como son la aritmética, el álgebra, la geometría, etc.

También reconocen que les falta preparación en temas de probabilidad y sugieren que el MINEDU debería de capacitarlos.

A partir de ítem 2 al ítem 10, el cuestionario contiene preguntas con 3 alternativas, sobre conceptos muy básicos que los docentes de matemática deberían de conocer y manejar para poder enseñar probabilidades en algún grado de la secundaria. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro.

| ITEM | CONCEPTO | N° DE ACIERTOS | N° DE DESACIERTOS |
|---|---|---|---|
| 2 | Fenómeno determinístico | 1 | 9 |
| 3 | Fenómeno probabilístico | 2 | 8 |
| 4 | Significado de una probabilidad | 1 | 9 |
| 5 | Probabilidad frecuentista | 0 | 10 |
| 6 | Valoración de una probabilidad frecuentista | 0 | 10 |
| 7 | Probabilidad condicional | 1 | 9 |
| 8 | Independencia de sucesos aleatorios | 3 | 7 |
| 9 | Probabilidad de la unión de sucesos | 2 | 8 |
| 10 | Probabilidad de un suceso contrario | 3 | 7 |

CUADRO N° 02

Según este pequeño sondeo realizado con 10 profesores, se deduce que no están muy bien preparados para enseñar probabilidades en la secundaria. Por ejemplo, se deduce que ninguno conoce y valora el concepto de probabilidad frecuentista ni el concepto de probabilidad condicional.

### 4.1.2 RESULTADOS DE LA REVISIÓN Y ANÁLISIS DE TEXTOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR UTILIZADOS PARA LA SECCIÓN DE PROBABILIDADES.

Con la finalidad de analizar qué tanto contenido tienen, los textos de matemática de la secundaria, dedicados a la probabilidad en relación a otros temas, así como analiza la calidad de sus contenidos, se tomó como muestra 3 textos de mayor uso en la secundaria. Los resultados se dan en el siguiente cuadro:

REVISÓN Y ANÁLISIS DE TEXTOS DE MATEMÁTICA ESCOLAR EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA – TEMA PROBABILIDADES

| TITULOS | AUTORES | CONTENIDOS | % |
|---|---|---|---|
| Leximatic-Matematica Por áreas (2° Grado) Teoría (400 Pág.) Actividades (95%) | Colección Intelectum-Evolution | • Experiencias aleatorias<br>• Espacio muestra-sucesos-tipos<br>• Definición de la probabilidad de Laplace<br>• Probabilidad condicional<br>• Sucesos independientes<br>• Problemas sencillos | 1,4 |
| Matemática III (3° Grado) Teoría (303 Pág.) Actividades (295 Pág.) | Colección Corefo | • Espacio muestra – sucesos – tipos<br>• Probabilidad de Laplace<br>• Prob. Condicional<br>• Sucesos independientes<br>• Problemas tipo | 1,2 |
| Matemática 4 (4° Grado) Capitulo16: Probabilidad | Coveñas, M. | • Análisis Combinatorio<br>• Espacio muestra – sucesos<br>• Suceso seguro – suceso imposible<br>• Suceso elemental – sucesos contrario<br>• Sucesos excluyentes<br>• Probabilidad de Laplace<br>• Probabilidades Compuestas<br>• Sucesos equiprobables<br>• Árbol de probabilidades<br>• Problemas tipo | 1,9 |

CUADRO N° 03

Haciendo un breve comentario a este cuadro, se puede decir que los 3 textos analizados casi se dedican a lo mismo. Sus definiciones y ejemplos que dan sobre experiencias aleatorias, sucesos aleatorios, tipos de sucesos son bastante simples.

Además, sólo definen la asignación de probabilidad de Laplace en detrimento de otras asignaciones mucho más importantes (frecuentista, geométrica, etc.).

Y, lo que más llama la atención es el poquísimo espacio dedicado al tema de las probabilidades, ninguno llega ni siquiera al 2% de sus páginas.

### 4.1.3 RESULTADOS DE LA REVISIÓN Y ANÁLISIS DEL CURRÍCULO NACIONAL DE EDUCACIÓN BÁSICA (CNEB).

En el CNEB los temas de probabilidad se encuentran comprendidos en la competencia N° 25: “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”. Esta competencia tiene 8 niveles o estándares de aprendizaje, desde el nivel 1 hasta el nivel 8 (Destacado).

Los estándares que corresponden a las probabilidades se inician desde el nivel 3 hasta el nivel 8, tal como se detalla en el siguiente cuadro:

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE PARA LA TEORÍA DE PROBABILIDADES – PERÚ

| NIVELES | ESTANDARES DE APRENDIZAJE |
|---|---|
| 3<br>1° y 2° de Primaria | Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta. |
| 4<br>3° y 4° de Primaria | Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable, justifica su respuesta. |
| 5<br>5° y 6° de Primaria | Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de une evento relacionada el número de casos favorables (Laplace). |
| 6<br>1° y 2° de Secundaria | Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestra; interpreta lo que es un suceso seguro, probable o imposible, se asocia entre los valores 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica. |

| | |
|---|---|
| 7<br>3°, 4° y 5° de Secundaria | Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades |
| 8<br>(Destacado) | • Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias relacionándolos con la estadística<br>• Interpreta la información sobre el comportamiento de los datos y la probabilidad condicional.<br>• Contrasta conclusiones sobre la relación entre variables. |

CUADRO N° 04

Observando este cuadro vale la pena comentar que la estandarización de los aprendizajes va de lo más sencillo a lo más complejo, pero llama mucho la atención que sólo re refieren a la asignación de probabilidad de Laplace (sucesos equiprobables) y, en ningún momento se refieren al concepto de variable aleatoria.

En cuanto a los niveles de aprendizaje para la secundaria se inician desde el nivel 6 (1° y 2° de secundaria) hasta el nivel 8 (Destacado).

## 4.2 DISEÑO DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Como resultado de la aplicación y análisis de un cuestionario a docentes de matemática que han tenido alguna experiencia en la enseñanza de la teoría de probabilidades, la revisión y análisis de textos de matemática del nivel secundaria, la revisión y análisis de investigaciones realizadas en torno a la problemática y la revisión y análisis de documentos de gestión educativa como son el DCN y el Currículo Nacional de EBR; se propone las siguientes estrategias didácticas para cada tema relacionado con la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en educación secundaria.

### 4.2.1 ESTRATEGIAS PARA IDENTIFICAR Y DIFERENCIAR FENÓMENOS DETERMINÍSTICOS Y FENÓMENOS PROBABILÍSTICOS. -

Para que el escolar que se inicia en el tema de las probabilidades es sumamente importante que tome conciencia de la existencia de fenómenos determinísticos y fenómenos probabilísticos o aleatorios; en razón a que todo problema que tenga que ver con las probabilidades se ubica en el campo de los fenómenos probabilísticos o aleatorios. La mejor manera de identificarlos y diferenciarlos es que los determinísticos aceptan un solo y único resultado en tanto que los fenómenos probabilísticos aceptan 2 o más resultados por estar influenciados por el azar.

El escolar debe entender por azar como un conjunto de factores imprevisibles que se presentan en la naturaleza, en el campo de las ciencias y, que influyen sobre nuestras vidas.

Otra manera de identificarlos ante la presencia de un fenómeno, suceso o acontecimiento es preguntando:

¿Existe una seguridad que éste fenómeno puede ocurrir?

Si el fenómeno es determinístico la respuesta es un Sí o un No rotundo.

Pero si el fenómeno es probabilístico las respuestas posibles son: Tal vez ocurra, quizás ocurra, es probable que ocurra.

Ej. 1.- Soltar un objeto pesado desde una altura y preguntarse ¿Caerá el objeto? La respuesta es un Sí rotundo, porque sabemos que los objetos caen por efecto de la gravedad. ¿Subirá el objeto hasta una altura?

La respuesta es un No rotundo. El fenómeno o suceso de soltar un objeto pesado y observar lo que ocurra tiene un único resultado: Caer. No podríamos decir “Tal vez caiga” o “quizás suba”. Por lo tanto, este fenómeno es determinístico.

Ej. 2.- Salir a la calle y preguntar a la gente mayor que pasan, si en las próximas elecciones votarán por el candidato X a la alcaldía de la ciudad. Las respuestas posibles a esta pregunta pueden ser: “SI”, “NO”, “todavía no lo he pensado”, o quizás no quiera responder a la pregunta. Entonces en éste caso la respuesta no es única. Por lo tanto, el suceso de preguntar a un elector para registrar su respuesta es probabilístico.

Para completar la estrategia es conveniente plantear al escolar un listado de sucesos para que los identifiquen si son determinísticos o probabilísticos

He aquí un ejemplo de este listado:

| Suceso | Determinístico | Probabilístico o Aleatorio |
|---|---|---|
| Preguntar a un amigo por su edad | La respuesta es única | |
| Resolver la ecuación 2X+7=17 | La respuesta es única X=5 | |
| Participar en una rifa y sacarse el premio mayor | | Se puede ganar o no ganar el premio |
| Salir elegido en una comisión de 3 personas | | Puede ser elegido o no puede ser elegido |
| Suponer que una familia de recién casados tendrá 2 hijos | | Tal vez tengan 2 hijos o tal vez menos o tal vez más |
| Resultados posibles en goles de un partido de fútbol | | Pueden haber 0,1,2,3,4 o más goles |
| Contar el número de letras distintas que tiene la palabra: AMAZONAS | respuesta es única: 6 | |

CUADRO N° 05

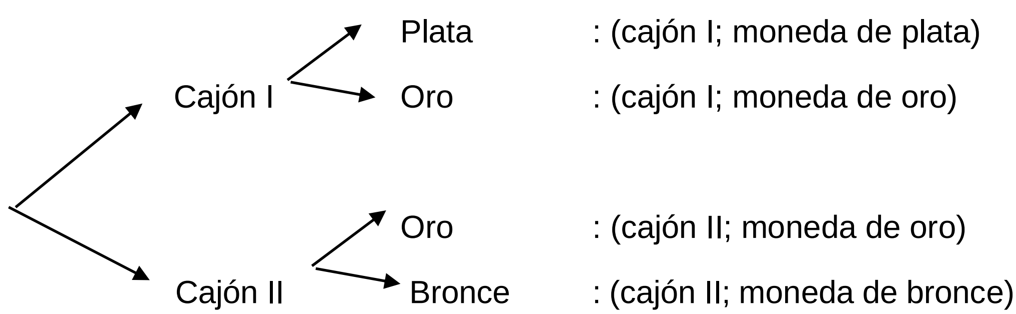
### 4.2.2 ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA GENERAR ESPACIOS MUESTRA Y SUCESOS ALEATORIOS

Como se sabe todo suceso S aleatorio ocurre o no ocurre dentro de un espacio muestra E, el mismo que viene a ser todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

Algunas veces es fácil hallar E, pero en infinidades de casos no es fácil hallarlos, razón por lo que tanto el docente como el escolar debe manejar algunas estrategias útiles, tales como:

**a) Al diagrama de árbol. -** Este permite identificar cada resultado de la experiencia aleatoria y la cantidad total de resultados, sobre todo cuando un suceso problema depende de una secuencia finita de sucesos.

Ej.- Se tiene una gaveta con 2 cajones I y II. En la caja I hay 3 monedas de plata y 1 de oro. En la caja II, hay 2 monedas de oro y 5 de bronce. Se escoge al azar uno de los cajones y se extrae una moneda. Hallar el espacio muestra E de esta experiencia aleatoria.




Luego, el espacio muestra es:

$$\mathrm{E} = \{(\mathrm{I}; \mathrm{plata}), (\mathrm{I}; \mathrm{oro}), (\mathrm{II}; \mathrm{oro}), (\mathrm{II}; \mathrm{bronce})\}$$

Observando este diagrama efectivamente es posible identificar cada uno de los resultados (son 4 resultados elementales) y el total de resultados (4).

Esta propiedad de los diagramas de árbol facilita también identificar y ubicar rápidamente algún suceso aleatorio relacionado a la experiencia. Por ejemplo, sean los siguientes sucesos:

A : Se extrajo una moneda de plata.

B : Se extrajo una moneda de bronce.

C´ : La moneda extraída no es de oro

¿Cuáles son los elementos de estos sucesos?

Observando el diagrama o el espacio E generado respondemos:

$A = \{(I; plata)\}$

$B = \{(II; bronce)\}$

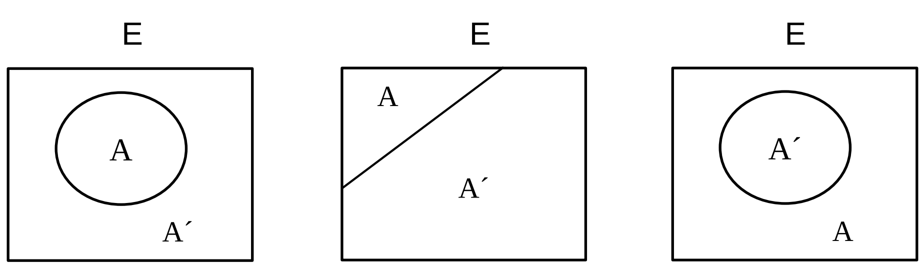
$C´ = \{(I; plata), (II; bronce)\}$

**b) Diagrama de Venn. – Permite visualizar las relaciones existentes entre los sucesos aleatorios dentro de un mismo espacio muestra.**

El espacio muestra se representa con un rectángulo y los sucesos aleatorios con círculos o figuras cerradas.

El espacio muestra $E$ de una experiencia aleatoria hace de conjunto referencial y al interior de este van los sucesos aleatorios A, B, C,... y sus distintas combinaciones que pueden darse. Veamos algunos ejemplos:

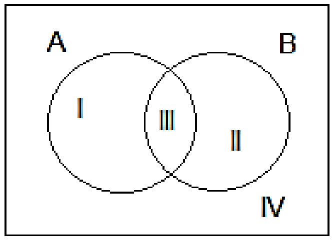
Ej. 1.- Representar un suceso A y su contrario A´




$A$: $Ocurre$

$A´$: $No\ ocurre\ A$

Ej. 2.- Representar 2 sucesos A, B y sus distintas relaciones




$I \ : \ A \cap B' : ocurre\ A\ pero\ no\ B$

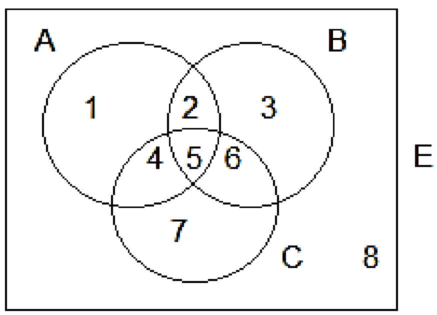
$II \ : A' \cap B : ocurre\ B\ pero\ no\ A$

$III : A \cap B : ocurren\ ambos\ A\ y\ B$

$IV \ : A' \cap B' : ni\ A\ ni\ B\ ocurren$

$(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B) = A \cup B : ocurre\ A\ \ y/o\ ocurre\ B$

Ej. 3.- Representar 3 sucesos A, B, C y sus distintas relaciones.




| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A \cap B' \cap C'$ | Ocurre A pero no B ni C |
| 2 | $A \cap B \cap C'$ | Ocurren A y B pero no C |
| 3 | $A' \cap B \cap C'$ | Ocurre B pero no A ni C |
| 4 | $A \cap B' \cap C$ | Ocurren A y C pero no B |
| 5 | $A \cap B \cap C$ | Ocurren los 3 sucesos A, B, C |
| 6 | $A' \cap B \cap C$ | Ocurren B y C pero no A |
| 7 | $A' \cap B' \cap C$ | Ocurre C pero no A ni B |
| 8 | $A' \cap B' \cap C'$ | Ni A ni B ni C ocurren<br>Ninguno de los 3 sucesos ocurre |

CUADRO N° 06

### 4.2.3 ESTRATEGIAS DIDÁCTICA PARA INTERPRETAR UNA PROBABILIDAD

Por definición la probabilidad de un suceso aleatorio S es un número denotado por $\mathrm{p}(S)$ y que tiene la condición $0 \leq p(S) \leq 1$. Además $\mathrm{p}(S)$ mide el grado de incertidumbre de la ocurrencia de S ¿Pero, qué significado tiene $\mathrm{p}(S)$?

En los textos de matemática escolar revisados calculan $\mathrm{p}(S)$ para sucesos sencillos pero no le dan ninguna interpretación. Para que el escolar valore y aprecie el significado de una probabilidad es necesario adoptar, algunas estrategias como las que se exponen a continuación.

a) En primer lugar, el escolar debe grabarse que nunca una probabilidad puede ser menos que cero ni mayor que 1.

b) Toda probabilidad expresa un grado de incertidumbre en la ocurrencia de un suceso. Cuanto menor es una probabilidad existe una mayor incertidumbre.

c) Si, una probabilidad se expresa en fracciones, tal como por ejemplo $p(A) = 3/4$; éste se interpreta diciendo: "El suceso A se presenta en promedio 3 veces en 4 experiencia aleatorias.

d) Si, una probabilidad se expresa en decimales, tal como por ejemplo $p(B) = 0{,}75$, éste se convierte en porcentaje multiplicándolo por 100, resultando$75\% = 75/100$, valor que se interpreta: "El suceso B se presenta 75 veces en promedio cuando se realizan 100 experiencia aleatorias".

   Cuando las probabilidades están muy cercanas al cero y al ser multiplicadas por 100 siguen expresadas en decimales, entonces es preferible multiplicarlo por otro número mayor procurando que el numerador de la fracción resultante sea un número entero. Por ejemplo, supongamos que $\mathrm{p(S)} = 0{,}0017$, entonces para interpretarlo lo multiplicamos por 10000 resultado $\mathrm{p(S)} = 17/10000$; el cual se interpreta: "De cada 10000 experiencias aleatorias el suceso S ocurre en promedio 17 veces".

e) Ante 2 o más sucesos con probabilidades conocida es bueno compararlos para sacar conclusiones, diciendo cuál suceso es más incierto o menos incierto. Además, también se puede decir cuántas veces es mayor uno que otro.

   Por ejemplo, supongamos que tenemos dos sucesos A, B cuyas probabilidades son $\mathrm{p(A)} = 0{,}80$ y $\mathrm{p(B)} = 0{,}10$, entonces por comparación podemos inferir lo siguiente:

   "El suceso B es más incierto que el suceso A"

   "El suceso A es menos incierto que el suceso B"

   Como $\mathrm{p(A)/p(B)} = 0{,}80/0;10 = 8$, entonces se puede decir: "A es 8 veces más probable que B"

### 4.2.4 ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA ASIGNAR PROBABILIDADES

Dice una definición de probabilidad: La probabilidad es una función en la que se asigna a cada suceso aleatorio S un número real p(S) con la propiedad $0 \le p(S) \le 1$.

Esta definición no dice cómo se asigna el número p(S) a S. Resulta que existen varias formas de asignar una probabilidad a un suceso S.

Es muy conveniente que el escolar de secundaria conozca algunas de las formas de asignar probabilidades, hecho que le dará una mejor visión y una mayor amplitud para aplicar las probabilidades a problemas de la vida real.

A continuación, veamos las estrategias didácticas para 4 tipos de asignación de probabilidades.

**a) Asignación frecuentista de probabilidad. -**

También conocido como asignación estadística de probabilidad. Es la asignación más importante por su carácter general y experimental; sin embargo, no la tratan en la educación secundaria. Según la definición dada en el literal a) de la sección 2.2.3.6 del presente trabajo, la probabilidad frecuentista de un suceso S es un número p(S) que resulta de la convergencia de la frecuencia relativa k/n del suceso S cuando el número n de experiencia o experimentos es ilimitado:

$$p(S) = \lim_{n\to\infty} \left( {}^{k}\!/_{n} \right)$$

$K$: *número de veces que ocurre $S$ es $n$ experimentos*

$n$: *número de experimentos en las que aparece $S$*

Esta forma de asignar probabilidades a un suceso consiste en realizar $n$ experimentos o experiencias en las que se puede observar a $S$ y luego contar el número $k$ de veces que se ha observado a $S$; para después calcular la frecuencia relativa $k/n$ de $S$. La asignación frecuentista nos dice que $k/n$ se aproximará cada vez más hacia la verdadera probabilidad $p(S)$ de $S$. Dicho en otras palabras: Cuanto más grande es $n$ mejor es la aproximación.

¿De qué manera el escolar puede apreciar las bondades de la asignación frecuentista?

Realizando $n$ experiencias o experimentos con las que se puede observar el suceso de interés $S$, calcular su frecuencia relativa y luego hacer un gráfico de $n$ versus $k/n$.

Este gráfico bien hecho ilustra excelentemente la convergencia de k/n hacia la probabilidad $p(S)$.

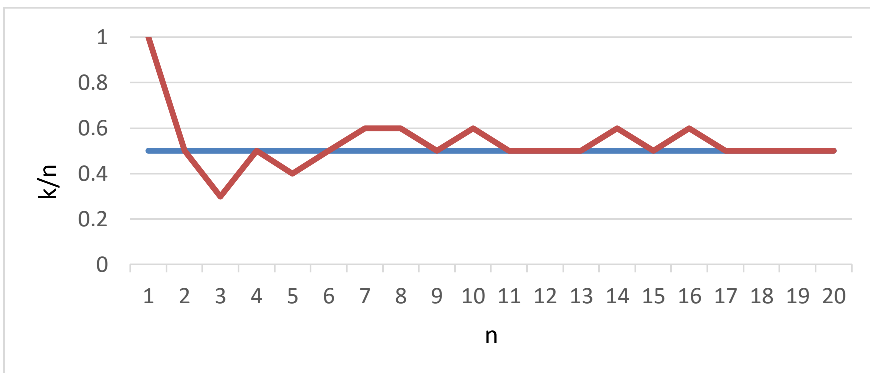
Ej. 1. Calcular usando la probabilidad frecuentista de que al arrojar una moneda de 50 centavos sobre una mesa esta resulte “cara (C)”.

Esta experiencia consistirá en lanzar la moneda sobre una mesa e ir registrando las ocurrencias: “Sale cara (C)” o “sale sello (S)” en cada lanzamiento. Arbitrariamente se lanzará la moneda 20 veces, pero recuérdese que si se lanzara más veces se obtendrá mejores resultados. Después se cuenta el número $k$ de veces que va saliendo “cara” hasta ese número de lanzamiento. Finalmente, se grafica colocando en el eje de abscisas los valores de $n$ y el eje de ordenadas la frecuencia $\frac{k}{n}$. Los puntos resultantes se unen con un trazo continuo. Si la moneda es perfecta (que su centro de masa es el centro del circulo) se observará que la línea quebrada converge a $p(salir\ cara) = 0{,}50$.

Tomemos la moneda y lancémosla 20 veces y veamos qué pasa

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ocurrencia$ | C | S | S | C | S | C | C | C | S | C | S | S | C | C | S | C | S | S | C | S |
| $k$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| $k/n$ | 1 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |

Luego se grafica $n$ versus $k/n$

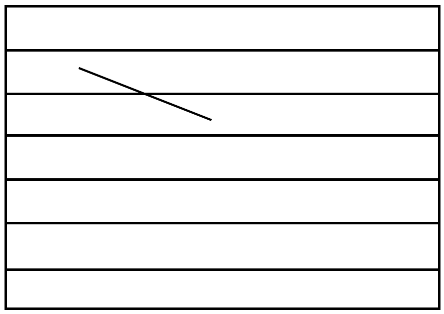



Se observa que la curva converge hacia $p(salir\ cara) = 0{,}50$

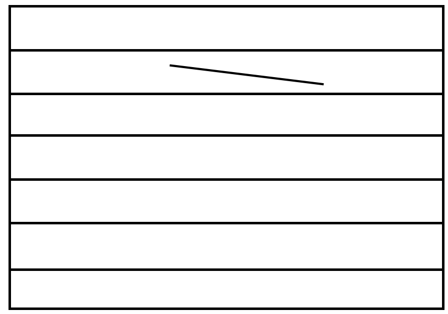
Hasta aquí es importante hacer notar al escolar que si repite la misma experiencia no tiene por qué resultar exactamente la misma curva, pero sí se repetirá la convergencia hacia $p = 0{,}50$.

Ej. 2.- Sobre un plano rayado con rectas paralelas a distancias de 5 cm. se lanza una aguja de 3.65 cm. Calcular la probabilidad de que la aguja interseque a una recta cualquiera.

Para realizar esta experiencia el escolar debe preparar una cartulina rayándola con rectas paralelas a distancias de 5 cms y conseguirse una aguja de longitud 3,65cm. (Son las agujas más comunes). Para evitarse sesgos se debe depositar la aguja en un vaso de plástico, para después agitarlo y lanzarlo sobre la cartulina rayada. Luego se observa si la aguja interseca o no a una recta cualquiera de la cartulina rayada. Si la interseca se registra “SI”, caso contrario se registra “NO”.



“Si” lo interseca



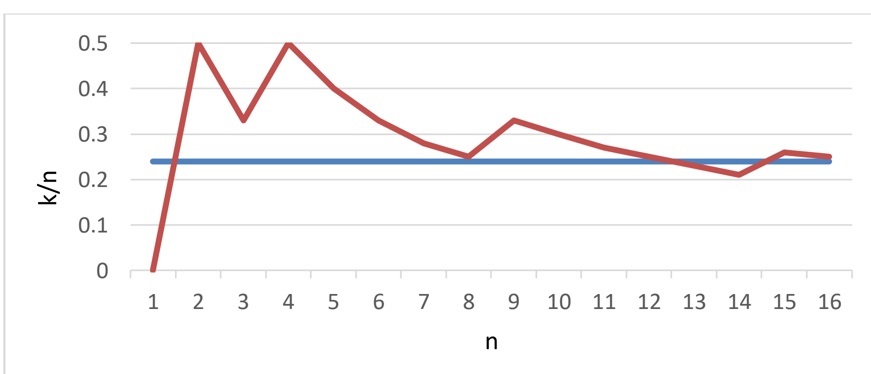
“No” lo interseca

Luego se determina la frecuencia absoluta $k$ de los “SI”, para después calcular la frecuencia relativa $k/n$ de los “SI” en cada lanzamiento. Finalmente se hace el gráfico de $n$ versus $k/n$.

A continuación se presenta los resultados obtenidos de esta experiencia lanzando la aguja $n = 16\ veces$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $interseca$ | NO | SI | NO | SI | NO | NO | NO | SI | NO | NO | NO | NO | NO | NO | SI | NO |
| $k$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| $k/n$ | 0,00 | 0,50 | 0,33 | 0,50 | 0,40 | 0,33 | 0,28 | 0,25 | 0,33 | 0,30 | 0,27 | 0,25 | 0,23 | 0,21 | 0,26 | 0,25 |

El grafico de $n$ versus $k/n$ es de siguiente.



Vemos que la curva converge hacia $4/25 = 0{,}25$; es decir la probabilidad de que la aguja corte a una recta cualquiera es aproximadamente $0{,}25 = 25\%$.

Según este resultado podemos decir que, si se lanza 100 veces la guja sobre la cartulina rayada, entonces en promedio 25 veces la aguja intersecará a una recta cualquiera.

En realidad, si se continua la experiencia lanzando la aguja indefinidamente $\mathrm{k}/\mathrm{n}$ convergerá hacia el valor ${}^{3.65}/{}_{5\pi} = 0{,}232326$, valor que fue calculado analíticamente por el naturalista francés Buffón en el siglo XVIII; es decir, dividiendo la longitud de la aguja (3,65 cm) por 5 veces (distancia entre las rectas) el número $\pi(3{,}141592654)$. Vemos que el valor calculado de $k/n = 0{,}25$ está muy próximo a la verdadera probabilidad 0,232366 calculado por Buffón.

A estas alturas es conveniente plantear al escolar algunas variantes a la experiencia de Buffón. ¿Por ejemplo, que pasaría si se distancian más de 5 cms el rayado de la cartulina con la misma aguja? ¿Aumentará la probabilidad o disminuirá?

Finalmente, se debe recalcar al docente de la importancia en la educación secundaria la aplicación de la asignación frecuentista o estadística de probabilidad, pues su forma de aplicarla, realizando experiencias, registrando datos, calculando frecuencia y graficando, va iniciando al escolar hacia una actitud investigativa, con tendencia hacia la inducción y la realización de inferencias.

Para afianzar más la práctica del cálculo de una probabilidad frecuentista se recomienda que los escolares (con guía del docente) preparen un ánfora conteniendo 50 bolos del mismo tamaño, con los colores y cantidades siguientes:

$$25\ bolos\ de\ color\ rojo$$

$$15\ bolos\ de\ color\ verde$$

$$7\ bolos\ de\ color\ amarillo$$

$$3\ bolos\ de\ color\ blanco$$

Con éste material didáctico el escolar debe extraer bolos (digamos unos 20 bolos), registrando el color de cada bolo extraído en cada ocasión, calcular la frecuencia relativa de cada color y graficarla. El escolar debe verificar que las curvas convergen (se aproximan) hacia las siguientes probabilidades:

$$P\ (Extraer\ bolo\ rojo)\ =\ 25/50\ =\ 0{,}50$$

$$P\ (Extraer\ bolo\ verde)\ =\ 15/50\ =\ 0{,}30$$

$$P\ (Extraer\ bolo\ amarillo)\ =\ 7/50\ =\ 0{,}14$$

$$P\ (Extraer\ bolo\ blanco)\ =\ 3/50\ =\ 0{,}06$$

Esta misma ánfora puede ser útil también para iniciar al escolar en el muestreo aleatorio simple (MAS), extrayendo de golpe 30 bolos, agrupar los bolos por colores, y luego calcular sus frecuencias relativas de cada color; estas frecuencias relativas también son próximas a las probabilidades mostradas anteriormente.

También se puede simular que los bolos son personas y los colores son distintas características de estas personas. Los sucesos aleatorios a definirse pueden referirse a estas características.

**b) La asignación probabilidad de Laplace. -**

La asignación de Laplace nos dice que para hallar la probabilidad de un suceso $\mathrm{S}$ de $\mathrm{K}$ elementos en un espacio muestra $\mathrm{E}$ de $n$ elementos, cuyos sucesos elementales (que tienen un solo elemento) convergen hacia $1/\mathrm{n}$, se debe usar la fórmula $p(S) = k/n$.

Esta es la única asignación que se presenta en los textos de matemática escolar para la secundaria en detrimento de la asignación frecuentista vista anteriormente, que es más general.

Para aplicar la probabilidad de Laplace, previamente se tiene que tener conocimiento que los sucesos elementales del espacio E son equiprobables. Es decir que cada suceso elemental $\{e\}$ tiene por probabilidad $1/n$. si no se tiene este conocimiento necesariamente se tiene que usar la asignación frecuentista. Sin embargo, se sabe por experiencia que en los problemas donde se presentan simetrías (dados perfectos, monedas perfectas, selecciones al azar) se puede usar la asignación de Laplace sin necesidad de recurrir a la asignación frecuentista.

¿Qué estrategia es recomendable para usar la asignación de Laplace?

Calcular una probabilidad de Laplace se reduce a contar el número $K$ de los elementos del suceso problema $S$ y el número n de elementos de su espacio muestra $E$.

Para este conteo se puede usar las técnicas de conteo vistos en la sección 2.2.2 del presente trabajo.

También se puede usar la técnica del árbol, pero conociendo de antemano que todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad (equiprobabilidad).

Ej.: Se tiene 3 libros, uno de Matemática (M), otro de Estadística (E) y un tercero de Historia (H). Estos libros son colocados al azar, en cualquier orden, sobre un estante.

¿Cuál es la probabilidad de que el libro de matemática quede al medio de los otros libros?

**Solución:** En éste problema, al colocarse los libros al azar sobre el estante, se puede usar la asignación de Laplace. Entonces hasta saber de cuantas maneras se puede colocar los 3 libros sobre el estante. Esto es cuántos elementos tiene su espacio muestra E.

Para esto se puede usar la técnica de la permutación sin repetición: $3! = 6$. Hay 6 maneras distintas de colocar los 3 libros sobre el estante.

Ahora, se debe averiguar de cuántas maneras pueden ocurrir el suceso S: “El libro de matemática se ubica en el medio de los otros libros”. Este suceso ocurre de 2 maneras:

$$\text{H M E} \qquad \text{ó} \qquad \text{E M H} \qquad \text{con M en el medio.}$$

Por lo tanto, la $p(S) = 2/6 = 1/3$; probabilidad que se interpreta: si se coloca los 3 libros al azar sobre un estante, entonces sólo 1 vez en promedio el libro de matemático quedará al medio de los otros libros.

**c) Asignación de probabilidad geométrica. -**

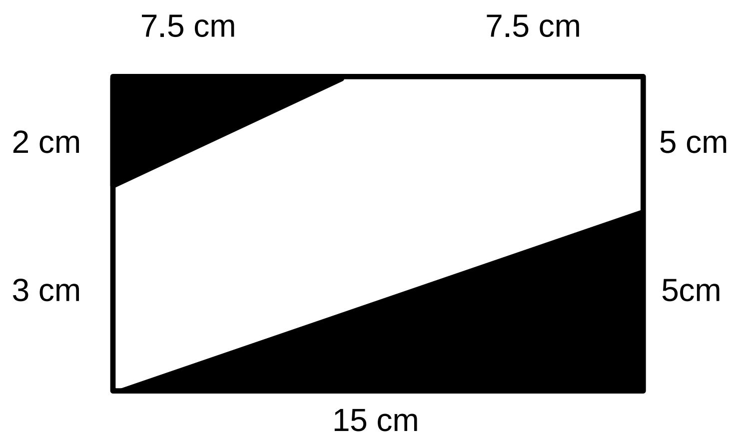
Esta asignación se usa para calcular probabilidades de sucesos $S$ relacionados a la elección al azar de puntos geométricos en una región $R^*$ en relación a otra región $R$ que contiene a $R^*$, ya sea en una recta o un plano o el espacio tridimensional.

Sea $X$ un punto geométrico de $R$, entonces el suceso de interés es $S$: $X\ pertenece\ a\ R^*$. Si se usara la asignación frecuentista entonces las frecuencias relativas convergen al cociente $m(R^*)/m(R)$.

Si, $R^*$ y $R$ son segmentos entonces sus medidas $m$ son longitudes. Si son porciones del plano entonces sus medidas $m$ son áreas y, si son porciones del espacio tridimensional sus medidas $m$ son volúmenes. Por lo tanto, para calcular la probabilidad del suceso $S$: $X$ pertenece a $R^*$, basta calcular el cociente $m(R^*)/m(R)$.

Ej.: Se tiene un rectángulo de lados 15cm y 10cm.

Se selecciona al azar un punto $X$ al interior de este rectángulo. ¿Cuál la probabilidad de que el punto $X$ se ubique en la región sombreada de la siguiente figura?




**Solución:** Las regiones del plano que participan en este problema son:

R: Conjunto de puntos interiores del rectángulo; su área es:

$$15 \times 10 \ = \ 150 \ \mathrm{cm}^2$$

R*: Conjunto de puntos de la región sombreada, constituido por 2 regiones triangulares cuyas áreas son:

$$A_1 \ = \ {}^{(2 \times 7.5)}\!/_{2} = \ 7{,}5 \ cm^2 \quad y \quad A_2 \ = \ {}^{(15 \times 5}\!/_{2} = \ 37{,}5 \ cms$$

Entonces el área de $R^*$es $\mathrm{A1} \ + \ \mathrm{A2} \ = \ 45\mathrm{cm}$.

Por lo tanto, la probabilidad del suceso $S$: "El punto escogido se ubica en la región sombreada" es $\mathrm{p}(S) = 45/150 = 0{,}3 = 30\%$; cuyo significado es: Si se selecciona al azar 100 puntos al interior del rectángulo de dimensiones $10 \times 15$, entonces 30 puntos en promedio se ubicarán en la región sombreada.

**d) Asignación de probabilidad mediante una función real. -**

Esta forma de asignar probabilidades es cuando existe la presencia de una variable aleatoria $X$, que viene a ser una variable cuantitativa, cuyos valores están asociados a los sucesos aleatorios dentro de una experiencia aleatoria. Por ejemplo, si se arroja sobre una superficie 3 monedas, entonces una variable asociada a esta experiencia puede ser X: "Número de caras que aparecen al lanzar las 3 monedas".

En este caso, los valores que tiene $X$ y los sucesos que están asociados a estos valores se presentan en el siguiente cuadro:

| **Sucesos** | **X** |
|---|---|
| sss | 0 |
| css scs ssc | 1 |
| Ccs csc scc | 2 |
| ccc | 3 |

CUADRO N° 07

La estrategia a seguirse para calcular las probabilidades para los valores de $x$ es simplemente calcular las probabilidades de cada uno de los sucesos que están asociados o relacionados con los valores de la variable $x$. La experiencia de este ejemplo tiene 8 resultados posibles. Cada resultado en particular ocurre con la misma probabilidad de $1/8$ siempre que la moneda sea perfecta, por ser sucesos elementales equiprobables se puede usar la asignación de Laplace para asignar a cada suceso que aparece en el cuadro su respectiva probabilidad. Así por ejemplo, el suceso “X toma el valor 1”, ocurre de 3 maneras: CSS, SCS, SSC; entonces el suceso “X toma el valor 1” Tendrá por probabilidades a $3/8$. Finalmente, los valores de la variable X: “Número de caras que aparecen al lanzar 3 monedas” conjuntamente con sus probabilidades es el que aparece en el siguiente cuadro:

| X | p(x) |
|---|---|
| 0 | 1/8 |
| 1 | 3/8 |
| 2 | 3/8 |
| 3 | 1/8 |
| Total | 1 |

CUADRO N° 08

A toda variable aleatoria X asociada con sus respectivas probabilidades $p(x)$ recibe el nombre de “distribución de probabilidades de la variable X”. $p(x)$ recibe el nombre de “función de probabilidades”.

Es muy ilustrativo y provechoso interpretar una distribución de probabilidades. Así, según éste ejemplo se puede deducir que:

El suceso “no aparece ninguna cara (cero caras)” tiene la misma probabilidad que el suceso “aparece 3 caras (cero sellos)”, esto es 1/8. De la misma manera, los sucesos “sale 1 cara” y “sale 2 caras” tienen la misma probabilidad 3/8. Además, el suceso “sale 1 cara” es 3 veces más probable que el suceso “sale 3 caras”.

Dentro de la teoría de probabilidades, el tema de las distribuciones de probabilidad es muy abundante y se tratan a un nivel universitario o especializado. Sin embargo, es bueno introducir en las secundarias distribuciones de probabilidad sencillas, como el que se ha visto, con la finalidad de ir familiarizándolos con el tema más temprano que tarde. Dependerá de la habilidad del docente crear situaciones sencillas en las que aparezcan variables ligadas a experiencias aleatorias.

### 4.2.5 ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA RECONOCER Y APLICAR LAS REGLAS BÁSICAS PROBABILIDAD

Ahora se propondrá un conjunto de estrategias para saber cuándo y cómo aplicar las distintas reglas básicas para calcular probabilidades. Estas reglas son los teoremas o definiciones que aparecen en la sección 2.2.3.7.

**a) Estrategia para reconocer y aplicar la regla de la probabilidad del suceso imposible.**

Esta regla nos dice que la probabilidad de un suceso imposible es cero.

Llamamos suceso imposible a aquel suceso que no posee elemento alguno; en otras palabras, un suceso imposible es un conjunto vacío.

La mejor estrategia a seguirse para aplicar esta regla es identificar el absurdo o contrasentido que lo define.

Son ejemplos de sucesos imposibles:

A: Sacar un 7 al arrojar un dado común.

B: Ganar una rifa sin comprar boleto alguno.

C: Observar 5 caras al lanzar 4 monedas.

D: Elegir al azar una mujer en un grupo de varones.

En todos estos casos las probabilidades de A, B, C, D es cero, por ser conjuntos vacíos.

En el caso de las probabilidades cero se debe recalcar al escolar lo siguiente:

Si se sabe que un suceso es imposible entonces automáticamente su probabilidad es cero; pero, si lo único que se sabe es que la probabilidad de un suceso es cero entonces no puede asegurarse que sea un suceso imposible.

**b) Estrategia para reconocer y aplicar la regla de la probabilidad condicionada**

Esta regla nos dice que cuando un suceso B está condicionado por la ocurrencia de otro suceso A (no vacío), lo cual se denota por B/A, entonces su probabilidad es:

$$p(B/A) = p(A \cap B)/p(A)$$

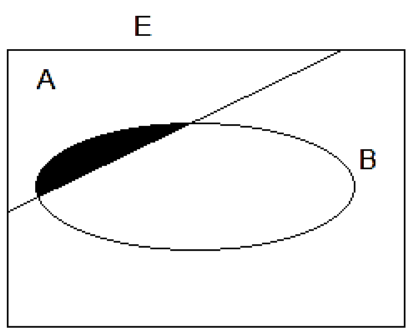
¿Pero qué significa que B está condicionado por A?

¿Cómo reconocer que un suceso cualquiera (no vacío) condiciona a otro?

Para aplicar con propiedad esta regla es necesario responder previamente a estas 2 interrogantes que nos permitirá reconocer y resolver adecuadamente los problemas en las que hay presencia de sucesos condicionados y sucesos condicionantes. En la expresión $p(B/A)$, B es el suceso condicionado y A es el suceso condicionante.

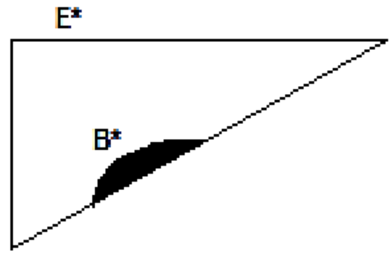
Supongamos que se sabe o se tiene la información de que una parte de un espacio E ha ocurrido, llamemos a esta parte como el suceso condicionante A. Ahora supongamos que se quiere calcular la probabilidad del suceso condicionado B, sabiendo que el condicionante A ha ocurrido. ¿Qué efecto produce sobre B el tener conocimiento que A ha ocurrido?

Para tener una idea clara al respecto observemos cómo ayuda el siguiente diagrama en el que aparecen la parte A qué ocurrió y el suceso problema B.




Obsérvese que también se ha sombreado la intersección de $A$ con $B$, esto es $A \cap B$. ¿Cómo interpretar toda esta situación?

El saber previo de que A ocurrió hace que el espacio de incertidumbre $E$ se reduzca a un nuevo espacio $E^* = A$ y, dentro de este nuevo espacio $E^* = A$ sólo puede ocurrir una parte $B^*$ de $B$, esto es $B^* = A \cap B$, que viene a ser la parte sombreada en el diagrama; de modo que el problema de que $B$ ocurra habiendo ocurrido $A$, se reduce a lo siguiente:




$$con\ E^* = A\ y, B^* = A \cap B$$

Esto quiere decir que la ocurrencia previa de $A$ afecta o condiciona a la ocurrencia de $A$; pues $E$ se redujo a $E^* = A$ y $B$ se redujo a $B^* = A \cap B$.

Entonces, si la ocurrencia previa de $A$ afecta o condiciona a la ocurrencia de $B$, también puede afectar o modificar a la probabilidad de $B$.

Un último razonamiento dentro del espacio inicial $E$ donde $A$ y $B$ ocurren es: ¿Cuántas veces es más probable que ocurra $B^*$ que ocurra $E^*$?

La respuesta es: $p(B^*)/p(E^*)$

Ahora si reemplazamos $B^* = A \cap B$ y $E^* = A$, entonces la expresión anterior toma la forma:

$$p(B/A) = p(A \cap B)/p(A)$$

De ahora en adelante el hecho de que un suceso $B$ este afectado o condicionado por otro suceso $A$ no vacío, el cual se denota por $B\ /\ A$, simplemente será entender de que el espacio inicial $E$ se reduce (se hace más pequeño) al suceso $A$ y, el suceso por ocurrir $B$ se reduce al suceso $A \cap B$; de modo que $p(B/A) = p(A \cap B)/p(A)$ .

De esta manera, ahora ya sabemos cómo afecta a la probabilidad de $B$ la ocurrencia previa de un suceso $A$ no nulo dentro de un espacio $E$.

Ej. 1.- En una caja hay 4 bolos de color blanco y 3 bolos de color negro. Los bolos blancos están numerados con los dígitos 1, 2, 3, y 4; y los de color negro están enumerados con los dígitos 5, 6 y 7. Se extrae al azar un bolo y resultó ser de color negro. ¿Cuál es la probabilidad de que éste bolo tenga un digito impar?

**Solución:**

Analizando el problema se reconoce que hay un condicionamiento. El suceso B: “Tiene digito impar” está condicionado al suceso A: “El bolo extraído es de color negro”.

Por lo tanto, el problema consiste en calcular una probabilidad condicionada.

Sean los sucesos:

$A$: El l bolo extraído es de color negro

$p(A) = 3/7$; por Laplace

$B$: El bolo extraído tiene dígito impar

$p(B) = 4/7$; por Laplace (hay 4 dígitos impares)

$A \cap B$: El bolo extraído es de color negro y tiene un dígito impar

$p(A \cap B) = 2/7$; por Laplace (en los bolos negros hay 2 dígitos impares)

$B/A$: El bolo extraído tiene dígito impar a condición de que éste bolo sea de color negro.

$$p(B/A) = {}^{p(A \cap B)}\!\big/_{p(A)} = {}^{(2/7)}\!\big/_{(3/7)} = 2/3$$

Resultado que se interpreta: si se realiza 3 veces la experiencia de extraer un bolo y registrar su dígito, sucede que en promedio 2 veces ocurrirá que el bolo tiene dígito impar, a condición de que éste bolo sea de color negro.

Ej. 2.- Supóngase que en el ejemplo anterior se sabe que el bolo extraído tiene un dígito mayor que 3. ¿Cuál es la probabilidad de que éste bolo sea de color blanco?

**Solución:**

Es obvio que el suceso B: “El bolo es de color blanco” estará condicionado por el suceso A: “El dígito del bolo es mayor que 3” sean los sucesos:

$A$: El bolo extraído tiene un dígito mayor que 3

$p(A) = 4/7$; por Laplace

$B$: El bolo extraído es de color blanco

$p(B) = 4/7$; por Laplace (hay 4 bolos blancos de un total de 7)

$A \cap B$: El bolo extraído tiene un dígito mayor que 3 y es de color blanco

$p(A \cap B) = 1/7$; por Laplace (hay 1 solo dígito mayor que 3 dentro de los bolos blancos)

$B/A$: El bolo extraído es de color blanco a condición de que tenga un dígito mayor que 3

$$p(B/A) = {}^{(1/7)}\!\big/_{(4/7)} = 1/4$$

Resultado que se interpreta: Si se repite 4 veces la experiencia de extraer un bolo de la caja, entonces en promedio sólo una vez ocurrirá que el bolo es de color blanco teniéndose la información de que el bolo extraído tiene un dígito superior a 3.

**c) Estrategia para reconocer y aplicar la regla de la multiplicación de probabilidades.**

La regla de la multiplicación de probabilidades se aplica cuando se quiere calcular la probabilidad de la ocurrencia del suceso intersección$A \cap B$ (ocurre A y ocurre B). Esta regla se deduce, por simple despeje, de la regla de la probabilidad condicional. Se despeja $p(A \cap B)$ de la expresión de $p(B/A) = {}^{p(A \cap B)}\!\big/_{p(A)}$

Si, $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot\ p(B/A)$

Una regla más general es:

$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1 \cap A_2) \dots p(A_k/A_1 \cap A_2 \dots A_{k-1})$

Para calcular la probabilidad de la ocurrencia simultánea (No necesariamente en el tiempo) de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ sucesos se puede usar como ayuda el siguiente diagrama en línea en el que se van colocando las probabilidades $p$ que les corresponde al suceso siguiente:

$$\overset{P_1}{\to} A_1 \overset{P_2}{\to} {}^{A_2}/_{A_1} \overset{P_3}{\to} {}^{A_3}/_{A_1 \cap A_2} \underset{\dots}{\overset{p_k}{\to}} \left({}^{p_k}/_{A_1 \cap A_2 \dots A_{k-1}}\right)$$

O, mejor dicho:

$p(A_1 \cap\ A_2 \cap \dots \cap A_k\ ) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_k$

Un recurso didáctico muy apropiado para calcular probabilidades de sucesos intersección es el “árbol de probabilidades”. Este recurso es un diagrama de árbol donde en cada rama se van colocando las probabilidades de los sucesos que van apareciendo como consecuencia de una secuencia de experiencias aleatorias.

Cada ramal de este árbol, del principio al final, representa una secuencia de sucesos $A_1;\ A_2/A_1\,; \dots; A_k/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}$ de modo que el producto de las probabilidades colocadas en cada sección de un ramal cualquiera representa la probabilidad de un suceso intersección.

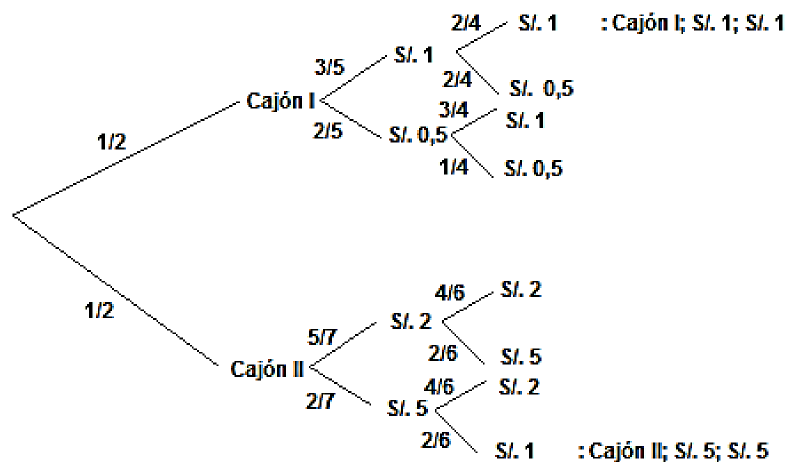
Ej.- Un escritorio tiene 2 cajones. En el cajón I hay 3 monedas de 1 sol y 2 monedas de 50 céntimos. En el cajón II hay 5 monedas de 2 soles y 2 monedas de 5 soles. Se selecciona al azar un cajón y se extrae de golpe 2 monedas también al azar (a ojo cerrado). Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

$A$: Las 2 monedas extraídas son de 1 sol.

$B$: Las 2 monedas extraídas son de 5 soles.

**Solución:**

Como hay una secuencia de experiencias aleatorias (escoger al azar un cajón y luego extraer al azar 2 monedas) se puede diseñar el árbol de probabilidades correspondiente, colocando las probabilidades (de Laplace) en cada sección de sus ramales:




Observando este diagrama vemos que el suceso A: “Las 2 monedas extraídas son de 1 sol” aparece en la parte superior. El suceso B: “Las 2 monedas extraídas son de 5 soles” aparece en la parte inferior del árbol.

Para calcular las probabilidades de los sucesos A, B, basta multiplicar las probabilidades colocadas en los ramales que precisamente originan estos sucesos:

$$p(A) = \frac{1}{2} \cdot {}^{3}/_{5} \cdot {}^{2}/_{4} = {}^{3}/_{20}$$

Este resultado quiere decir que, si se realiza la experiencia 20 veces, en promedio 3 veces ocurrirá que las 2 monedas extraídas son de 1 sol.

$$p(B) = {}^{1}/_{2} \cdot {}^{2}/_{7} \cdot {}^{2}/_{6} = {}^{2}/_{42}$$

Resultado que nos dice que, si se realiza la experiencia 42 veces, en promedio 2 veces ocurrirá que ambas monedas son de S/. 5.

**d) Estrategia para reconocer y aplicar la regla de la probabilidad de sucesos Independientes. –**

Dicen los textos de probabilidad que 2 sucesos A, B son independientes cuando uno de ellos no afecta a la probabilidad del otro. Hecho que se expresa en términos de probabilidad:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

¿Pero qué significado tiene que la ocurrencia de uno de ellos no afecta a la probabilidad del otro?

Para interpretar la independencia de sucesos es necesario regresar al concepto de probabilidad condicionada, en el que hay un suceso condicionante (no vacío) y un suceso condicionado B.

Si comparamos la probabilidad $p(B)$ con la probabilidad $p(B/A)$ puede ocurrir sólo una de 3 posibles consecuencias:

i) $p\left({}^{B}/_{A}\right) < p(B)$

ii) $p\left({}^{B}/_{A}\right) > p(B)$

iii) $p\left({}^{B}/_{A}\right) = p(B)$

Prestando atención a la tercera consecuencia $p(B/A) = p(B)$ esta no dice que el suceso condicionante A no afecta a la probabilidad del suceso condicionado B. En otras palabras, la información de que A ha ocurrido no influye sobre la probabilidad de B. Cuando se presenta la tercera consecuencia $p(B/A) = p(B)$ ocurre también que $p(A/B) = p(A)$. Cuando se presente cualquiera de estas 2 situaciones diremos que A y B son independientes.

Además, si esta tercera propiedad lo reemplazamos en

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left({}^{B}/_{A}\right)$ resulta $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Ahora, la aplicación inmediata de esta regla es posible únicamente cuando se tiene conocimiento previo de que A y B son independientes. Pero hay situaciones prácticas en el que por sentido común se sabe que A y B son independientes, lo que induce a su aplicación inmediata.

Ej. 1.- El nacimiento de un hijo varón es ½. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con 2 hijos, ambos sean varones?

**Solución:**

Sean los sucesos:

$A$: El primer hijo es varón (suceso condicionante)

$B$: El segundo hijo es varón (suceso condicionado)

$A \cap B$: Ambos hijos son varones

Para calcular $p(A \cap B)$ se debe usar la regla de la probabilidad de sucesos independientes, porque se sabe por sentido común que el sexo del segundo hijo no depende del sexo del primer hijo; luego se tiene:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = {}^{1}\!/_{4}$$

Resultado que se interpreta: De cada cuatro familias con 2 hijos en promedio sólo una familia tiene 2 hijos varones.

Ej: 2.- Se extrae al azar 1 carta de una baraja de 52 cartas (casino). Sean los siguientes sucesos ligados a esta experiencia:

$A$: La carta extraída es “Espada” (son 13 cartas)

$B$: La carta extraída es “AS” (son 4 cartas)

¿Son independientes estos sucesos?

Para responder se tiene 2 caminos, uno demostrando que $p\left({}^{B}\!/_{A}\right) = p(B)$ y otro demostrando que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ optando por el primer camino tenemos (usando Laplace):

$p(A) = {}^{13}\!/_{52} = {}^{1}\!/_{4}$

$p(B) = {}^{4}\!/_{52} = {}^{1}\!/_{13}$

$p(A \cap B) = {}^{1}\!/_{52}$

$p\left({}^{B}\!/_{A}\right) = {}^{p(A \cap B)}\!\Big/_{p(A)} = {}^{(1/52)}\!\Big/_{(13/52)} = {}^{1}\!/_{3} = p(B)$

Por lo visto si son independientes ya que $p\left({}^{B}\!/_{A}\right) = p(B)$

Ahora, optando por el segundo camino tenemos:

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

${}^{1}\!/_{52} = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52}$

${}^{1}\!/_{52} = \frac{1}{52}$

Por lo visto, se confirma una vez más que $A, B$ son independientes.

Ej. 3. Ciertos artículos se fabrican 2 turnos y se clasifican bajo 2 calidades (defectuosas y no defectuosas).

En cierta semana se fabricaron 500 artículos, que fueron clasificados del siguiente modo:

| CALIDAD | TURNOS | | |
|---|---|---|---|
| | MAÑANA | TARDE | |
| Defectuoso | 15 | 35 | 50 |
| No defectuoso | 285 | 165 | 450 |
| | 300 | 200 | |

CUADRO N° 09

¿Esta distribución de los artículos fabricados induce a pensar que la calidad es independiente al turno de fabricación?

Sean los siguientes sucesos:

$A$: El artículo ha sido fabricado en el turno de mañana

$p(A) = 300/500$

$B$: El artículo fabricado es de calidad defectuosa

$p(B) = 50/500$

$A \cap B$: El artículo ha sido fabricado en el turno de mañana y es defectuoso

$p(A \cap B) = 15/500$

Para comprobar la independencia basta probar que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$; hecho que no cumple:

$$P\ (A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

$$\frac{15}{500} \neq \left(\frac{300}{500}\right).\left(\frac{50}{500}\right)$$

$$0{,}03 \ \neq 0{,}06$$

En conclusión, se puede afirmar que la calidad del producto no es independiente al turno de fabricación. En otras palabras, la calidad del producto depende del turno de fabricación.

**e) Estrategia para reconocer y aplicar la regla de la probabilidad de la unión de sucesos. –**

Esta regla nos dice que la probabilidad de la unión de 2 sucesos A, B esta dad por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

¿Cuándo y cómo usar esta regla?

Una estrategia para reconocer o identificar cuándo usar esta regla es cuando en los enunciados de los problemas de probabilidad se plantea sucesos del tipo:

“A ocurre o B ocurre”; “ocurre cualesquiera de los 2 sucesos” como recurso didáctico se usa el árbol de probabilidades en caso necesario.

Además, la regla para calcular $p(A \cup B)$ puede tener sus variantes según la relación existente entre los sucesos A y B, tal como se indica a continuación:

i) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, si se sabe que A y B son mutuamente excluyentes; es decir $A \cap B$ es vacío.

ii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(B) \cdot p\left(A/_B\right)$, si se sabe que B condiciona a A.

iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p\left(B/_A\right)$, cuando A condiciona a B.

iv) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$, si se sabe que A y B son independientes.

Por otro lado, una extensión de la regla anterior para 3 sucesos es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) + p(A \cap B \cap C) - [p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C)]$$

Ej. 1.- Se sabe que los sucesos A, B son independientes; $p(A) = 3/_{20}$ y, que la probabilidad de B es el triple de la probabilidad de A. ¿cuál es la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los 2 sucesos?

**Solución:**

Se debe calcular $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ de acuerdo a las condiciones del problema, se prosigue

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$$

$$= 3/_{20} + 3\left(3/_{20}\right) - 3/_{20} \cdot 3\left(3/_{20}\right)$$

$$= 213/_{400}$$

Resultando que se interpreta: Si se realizan 400 experiencias aleatorias donde A y B ocurren, entonces en promedio 213 veces ocurre por lo menos 1 de ellos.

Ej. 2.- La probabilidad de que nazca un hijo varón es $1/_2$ y que nazca mujer es $1/_2$. ¿Cuál es la probabilidad de que en un nacimiento cualquiera el hijo sea varón o mujer?

**Solución:**

Sean los sucesos:

$A$: Nace un varón, con $p(A) = {}^{1}/_{2}$

$B$: Nace una mujer, con $p(B) = {}^{1}/_{2}$

$A \cap B$: Nace un varón y una mujer; con $p(A \cap B) = 0$, ya que es imposible que simultáneamente el nacido sea varón y a la vez sea mujer.

El problema es de la forma: "Ocurre A u ocurre B", entonces se debe calcular $p(A \cup B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} - 0$$

$$= 1$$

Resultado que se interpreta: Es seguro que el bebé recién nacido o es varón o es mujer.

Ej. 3.- Se tiene una caja con 9 bolos de color verde (V), 5 bolos de color rojo (R) y 2 bolos de color marrón (M). Se extrae al azar de la caja un bolo y se registra su color para luego devolver a la caja el bolo extraído. Se extrae un segundo bolo y también se registra su color. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas extracciones hayan resultado bolos del mismo color?

**Solución:**

Sean los sucesos:

$A$: Los bolos son de color verde (V).

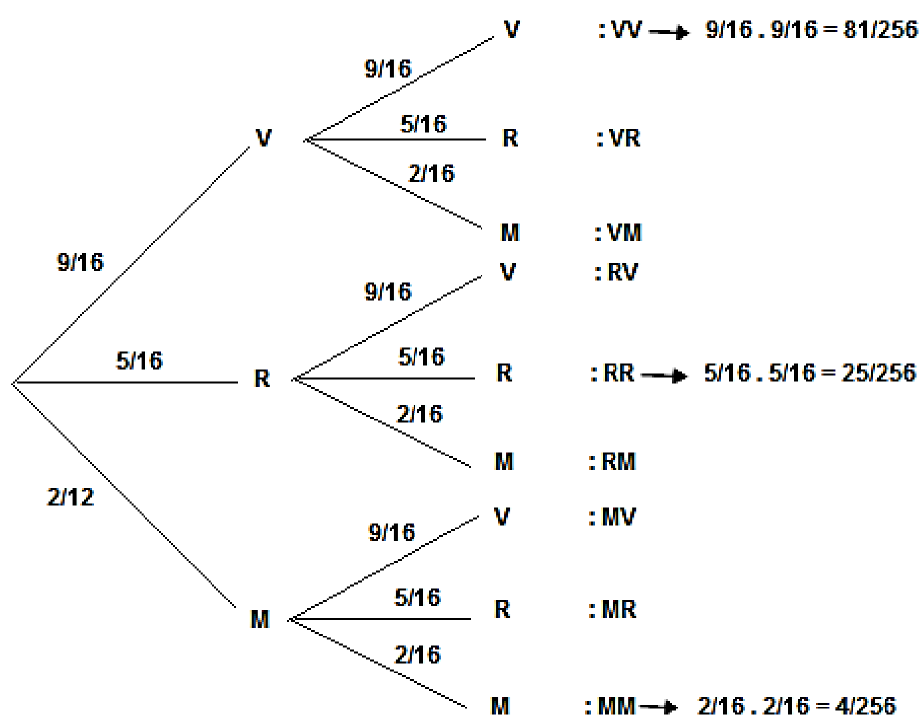
$B$: Los bolos son de color rojo (R).

$C$: Los bolos son de color marrón (M).

$A \cup B \cup C$: Los bolos son del mismo color.

$p(A \cup B \cup C) = ?$

Para calcular esta probabilidad es mejor orientarse usando el recurso del árbol de probabilidades, teniendo presente que el hecho de devolver a la caja el primer bolo extraído genera independencia de sucesos:




Como es imposible que ocurran simultáneamente los sucesos A, B, C, entonces estos son mutuamente excluyentes; entonces se usa regla de la unión de 3 sucesos excluyentes:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

$$= {}^{81}/_{256} + {}^{25}/_{256} + {}^{2}/_{256}$$

$$= {}^{108}/_{256}$$

Resultado que se interpreta: Si se ejecuta 256 veces la experiencia de extraer 2 bolos, entonces en promedio 108 veces ambos bolos serán del mismo color.

**f) Estrategia para reconocer y aplicar la probabilidad del suceso contrario. –**

¿Cómo reconocer que 2 sucesos A, B son contrarios?

Los sucesos A, B son contrarios cuando:

i) $A \cup B = E$ (espacio muestra)

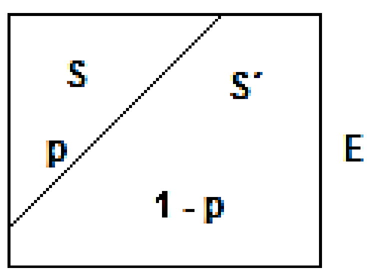
ii) $A \cap B = \emptyset$ (La ocurrencia simultánea es imposible)

Cuando estas 2 condiciones se cumplen se dice que A es contrario de B o que B es contrario de A. Si A ocurre B no ocurre o si B ocurre A no ocurre.

Por comodidad si se tiene un suceso S representaremos a su contrario por S´.

La regla de la probabilidad del suceso contrario es:

$p(S') = 1 - p(S)$ ó $p(S) = 1 - p(S')$




¿En qué circunstancias se usa esta regla?

Supongamos que se quiere calcular la probabilidad de un suceso S, pero que su cálculo resulta extenso o complicado y, mediante un breve análisis se comprueba que calcular la probabilidad de su contrario S´ es menos laborioso y complicado. Entonces se ataca el problema por el lado contrario, es decir se calcula $p(S')$ y luego se calcula $p(S)$ por una simple resta.

Ej. 1.- Un suceso S tiene por probabilidad 3/7. Hallar la probabilidad de su contrario S´.

**Solución:** Aplicando la regla tenemos

$$p(S´) = 1 - p(S)$$
$$= 1 - {}^{3}/_{7}$$
$$= {}^{4}/_{7}$$

Resultado que se interpreta: Si se realizan 7 experiencias independientes donde S ocurre, entonces en promedio 4 veces no ocurre S (ocurre S´).

Ej. 2.- Un salón tiene 2 focos $F_1, F_2$ que se prenden de noche; sus probabilidades de que se quemen una noche cualquiera es $p = 0{,}05$. ¿Cuál es la probabilidad de que una noche cualquiera el salón tenga luz?

**Solución:**

Sean los sucesos:

$A$: El foco $F_1$ está encendido esa noche

$A'$: El foco $F_1$ se quema esa noche

$p(A') = 0{,}05$

$B$: El foco $F_2$ está encendido esa noche

$B'$: El foco $F_2$ no está encendido esa noche

$p(B') = 0{,}05$

$S$: Esa noche el salón tiene luz

Pero resulta que el salón tendrá luz cuando por lo menos uno de los focos esta encendido; es decir $S = A \cup B$.

El contrario del suceso S es S´: Esa noche el salón no tiene luz. S´ ocurre cuando ninguno de los focos esta encendido que es lo mismo que ambos focos están quemados; es decir $S' = A' \cap B'$.

¿Qué es más difícil calcular? ¿$p(S) = p(A \cup B)$ o $p(S') = (A' \cap B')$ Es más fácil lo segundo porque es un simple producto: $p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B')$ porque $A'$ y $B'$ son independientes.

Entonces se tiene,

$$p(S') = p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B')$$
$$= (0{,}05) \cdot (0{,}05)$$
$$= 0{,}0025$$

Luego, entonces se aplica la probabilidad del suceso contrario:

$$p(S) = 1 - p(S')$$
$$= 1 - 0{,}0025$$
$$= 0{,}9975$$
$$= {}^{9975}/_{10000}$$

Resultado que se interpreta: Si se tuviera 10000 salones con 2 focos, bajo las mismas condiciones, entonces en un promedio de 9975 salones tendrán luz o, equivalente sólo en 25 salones no habrá luz.

### 4.2.6 ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Para enfrentar con éxito la solución del cálculo de una probabilidad para un suceso aleatorio S se recomienda la siguiente secuencia:

1. Reconocer que el problema debe estar planteado en un contexto de fenómenos probabilísticos o reconocer que el suceso S es de carácter aleatorio o que S está influenciado por el azar.
2. Identificar el suceso problema S y los sucesos auxiliares (si los hubiera). En caso de necesidad se debe acudir a los recursos didácticos como es el diagrama de árbol o el diagrama de Venn, para identificar el espacio muestra E, el suceso problema S y los sucesos auxiliares.
3. Establecer la relación existente entre el suceso problema y los sucesos auxiliares. Verificar si los sucesos son mutuamente excluyentes, independientes, etc.

4. Adoptar la asignación de probabilidades que corresponde al problema. Recuérdese que hay 4 tipos de asignaciones: La frecuentista, la de Laplace, la geométrica y la de mediante una función de probabilidades.
5. Identificar las reglas de probabilidad a usarse en el problema. De ser el caso apoyarse también con el árbol de probabilidades o el diagrama de Venn con probabilidades.
6. Interpretar el resultado final.

Ej. 1.- Una caja contiene 9 bolos en total, de los cuales 5 son de color blanco (B), 3 de color rojo (R) y 1 de color negro (N). Después de agitarse la caja se extrae al azar 2 bolas de golpe, uno tras otro. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $M$: Ambos bolos son de color negro

b) $N$: Los 2 bolos son del mismo color

c) $L$: Los 2 bolos son de diferente color

d) $S$: El primer bolo extraído es de color blanco

e) ¿Qué es más probable que el primer bolo extraído sea de color blanco o que el segundo bolo extraído sea de color blanco?

**Solución:** La experiencia realizada cae dentro de los fenómenos probabilísticos.

a) El suceso $M$: Ambos bolos son de color negro, es un suceso aleatorio imposible o vacío; porque en la caja hay un solo bolo de color negro, entonces no es posible sacar 2 bolos negros uno tras otro; salvo que el bolo negro extraído sea devuelto a la caja, pero este no es el caso. Por lo que tanto, el cálculo de $p(A) = 0$; cuya interpretación es: Bajo las condiciones del problema es imposible extraer 2 bolos negros uno tras otro.

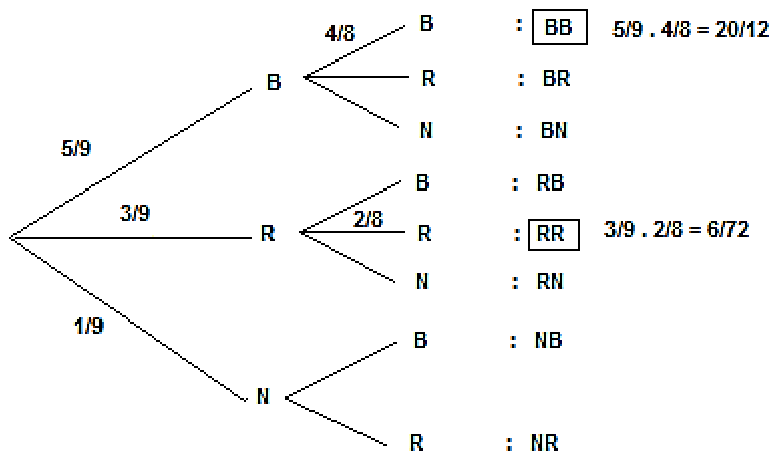
b) Para resolver éste problema mejor seguimos la secuencia recomendada.

1. El problema está planteado en el ámbito de los fenómenos probabilísticos por el hecho de que la extracción de los bolos es al azar.
2. Los sucesos auxiliares son:

   $A$: Los 2 bolos son de color blanco (BB)

   $B$: Los 2 bolos son de color rojo (RR)

El suceso problema es N: Ambos bolos son del mismo color. Para identificarlos usamos el diagrama de árbol.




3. La relación existente entre el suceso problema $N$ y los sucesos auxiliares $A, B$ es $N = A \cup B$; con $A, B$ mutuamente excluyentes.
4. Como la extracción es al azar podemos asignar las probabilidades de Laplace, colocándose en los ramales que llevan a BB y a RR, considerando que la probabilidad del color del segundo bolo extraído está condicionada por el color del primer bolo extraído. Estas probabilidades ya se colocaron en el diagrama anterior.
5. La regla a usarse es $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, por ser A y B excluyentes $(A \cap B = \emptyset)$. $p(A)$ y $p(B)$ se han calculado multiplicando las probabilidades de los ramales que llevan a BB y RR; estas probabilidades ya aparecen en el diagrama de árbol del 2° paso; por lo tanto tenemos:

$$
\begin{aligned}
p(A \cup B) &= p(A) + p(B) \\
&= 20/72 + 6/72 \\
&= 26/72
\end{aligned}
$$

6. La interpretación del resultado 26/72 es: Si se realiza la experiencia de extraer 2 bolos consecutivos de la caja, al azar, entonces en promedio 26 veces ambos bolos serán del mismo color.

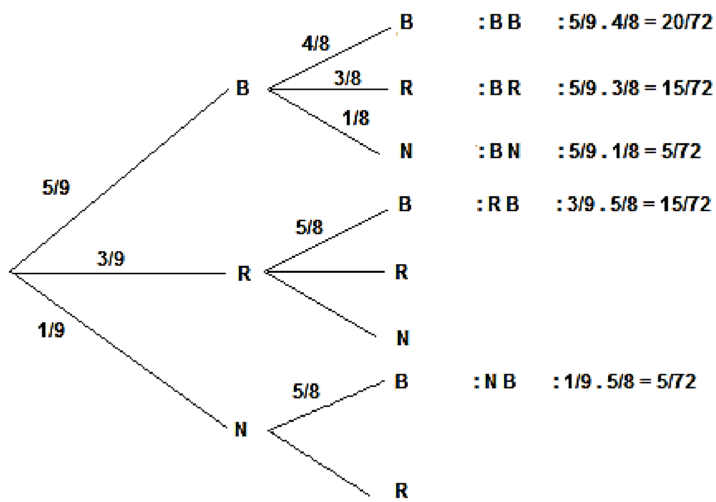
c) El suceso L: “Los 2 bolos son de diferente color” es el contrario del suceso N: “Los 2 bolos son del mismo color”. Como ya se sabe que $p(N) = {}^{26}/_{72}$, entonces $p(L)$ , se obtiene usando la regla de probabilidad del suceso contrario.

$$
\begin{aligned}
p(L) &= 1 - p(N) \\
&= 1 - {}^{26}/_{72} \\
&= {}^{46}/_{72}
\end{aligned}
$$

Resultado que se interpreta: Si se realiza la experiencia de extraer 2 bolos al azar, de forma consecutiva, 72 veces, entonces en promedio 46 veces ambos bolos serán de diferente color.

d) Observando el árbol de probabilidades, el suceso S: “El primer bolo extraído es de color blanco” puede suceder de 3 maneras: $BB, BR, BN$.

Esto quiere decir que $S = \{BB, BR, BN\}$. Para calcular la probabilidad de S basta sumar los productos de las probabilidades de los ramales que llevan a $\mathrm{BB}, \mathrm{BR}$ y $\mathrm{BN}$.




El resultado es $p(S) = {}^{20}/_{72} + {}^{15}/_{72} + {}^{5}/_{72} = {}^{40}/_{72}$

Resultado que significa, que, al realizar 72 veces la experiencia de extraer 2 bolos consecutivos, entonces en promedio 40 veces resulta que el primer bolo extraído es de color blanco.

e) Ya se sabe que el suceso S: El primer bolo extraído es de color blanco tiene por probabilidad a 40/72.

Ahora se debe calcular la probabilidad del suceso “El segundo bolo extraído es color blanco”. Sea T este suceso. Para calcular $p(T)$, de igual manera observando el árbol de probabilidades. T puede ocurrir de 3 maneras: $BB,\ RB$ y $NB$. Sumando las probabilidades que llevan a T tenemos:

$p(T) = {}^{20}/_{72} + {}^{15}/_{72} + {}^{5}/_{72} = {}^{40}/_{72}$

Comparando $p(S)$ con $p(T)$ resulta que son iguales; esto significa que S y T son equiprobables. Ninguno es más o menos probable que el otro.

### 4.2.7 ESTRATEGIAS PROBABILISTICAS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIÓN DE INCERTIDUMBRE

Una utilidad práctica que tiene la teoría de probabilidades es que permite u orienta a tomar una decisión “más favorable” en situaciones de incertidumbre. El concepto de “más favorable” es relativo, unas veces está relacionado a una probabilidad mínima y otras veces a una probabilidad máxima; para una mejor idea veremos varios ejemplos.

Ej. 1.- Dos personas juegan a los dados (se supone dados legales) arrojando sobre una mesa 2 dados. Una de ellos apuesta a que la suma de los puntos observados será 5 y una segunda apuesta a que la suma será 7. ¿A qué suceso apostarías?

Sean los sucesos:

$A =$ La suma de los puntos es 5

$A = \{(1;4),(4;1),(3;2),(2;3)\}$

$B =$ La suma de los puntos es 7

$B = \{(2;5),(5;2),(6;1),(1;6)(4;3),(3;4)\}$

El espacio muestra que se genera al arrojar 2 dados es $6 \times 6 = 36$ resultados de la forma $(x;y)$; cada suceso elemental tiene por probabilidad ${}^{1}/_{36}$; entonces aplicando la asignación de probabilidad de Laplace tenemos:

$p(A) = {}^{4}/_{36}$ y $p(B) = {}^{6}/_{36}$

En conclusión, la decisión más favorable es apostar a que la suma observada es 7. En este caso, para tomar la mejor decisión se optó por la probabilidad más alta.

Ej. 2.- Se tiene 3 máquinas $M_1, M_2, M_3$ para envasar conservas de manera automática. Cierto empresario está interesado en adquirir una de las máquinas para su fábrica de conservas, pero no sabe por cuál decidirse ya que sus precios son casi iguales. Para tomar una decisión se ponen de acuerdo con el vendedor y hacen envasar 200 conservas a cada máquina, para luego contar el número de latas mal selladas por cada máquina, hallándose 8, 2 y 14 latas mal selladas respectivamente. Entonces las probabilidades frecuentistas para los sucesos:

$A$: La máquina $M_1$ produce conservas mal selladas.

$B$: La máquina $M_2$ produce conservas mal selladas.

$C$: La máquina $M_3$ produce conservas mal selladas.

Son:

$p(A) = {}^{8}/_{200}$ ; $p(B) = {}^{2}/_{200}$ y $p(C) = {}^{14}/_{200}$

Comprando las 3 probabilidades la mejor probabilidad es $p(B) = {}^{2}/_{200} = 1\%$. En consecuencia, el empresario debería adquirir la máquina $M_2$, porque produce la menor cantidad de conservas mal selladas.

Ej. 3.- Cierto apostador a los caballos se ha llevado el trabajo de registrar la estadística de las carreras de 6 caballos que correrán el próximo domingo, tal como se detalla en el siguiente cuadro:

| Caballo | N° de carreras | N° de veces que ganó | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|
| A | 18 | 2 | ${}^{2}/_{18} = 0{,}1111$ |
| B | 12 | 3 | ${}^{3}/_{12} = 0{,}2500$ |
| C | 21 | 7 | ${}^{7}/_{21} = 0{,}3333$ |
| D | 9 | 1 | ${}^{1}/_{9} = 0{,}1111$ |
| E | 15 | 5 | ${}^{5}/_{15} = 0{,}3333$ |
| F | 10 | 3 | ${}^{2}/_{8} = 0{,}3000$ |

CUADRO N° 10

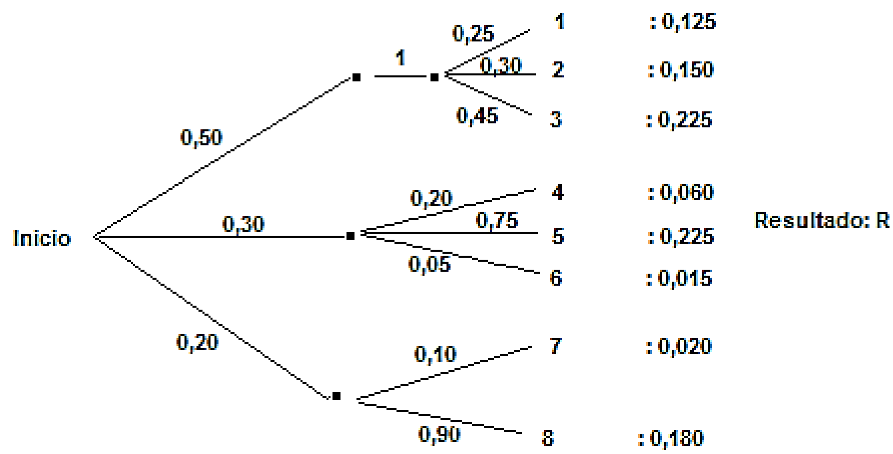
Si el apostador se orienta por las probabilidades frecuentistas, a cuál de los caballos debería apostar?

En este caso deberá optar por la probabilidad más alta.

Observando el cuadro son de los caballos C y E que tienen las mejores probabilidades $(0{,}3333)$. Pero resulta que el caballo C tiene más carreras corridas (6 carreras más que el caballo E); es decir el caballo C tiene “más experiencia”; por lo tanto, deberá apostar por el caballo C.

Ej. 4.- Cierto experimento para obtener un resultado final R de interés tiene varias rutas posibles para llegar al resultado R.

Cada ruta, a su vez, tiene pasos previos que pueden ocurrir de manera aleatoria con probabilidades ya conocida tal como se indica en el siguiente árbol de probabilidades.




¿Cuál es la mejor ruta a seguir para llegar al resultado R?

Para este caso, las probabilidades más altas corresponden a las rutas 3 y 5 con probabilidades 0,225; entonces hay 2 rutas que pueden considerarse como las mejores; pero supongamos que las rutas tienen un costo monetario y, supongamos que el costo de la ruta 3 es más barato que la ruta 5; entonces la ruta 3 sería la mejor.

## 4.3 APLICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PROPUESTAS A UNA REALIDAD EDUCATIVA

Tomando como referencia la macro competencia N° 25: “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” y los estándares de aprendizaje diseñados para el nivel 7 (3°,4° y 5° de secundaria) que aparecen en el currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), hubo la necesidad de diseñar una competencia más específica, un conjunto de capacidades y un conjunto de desempeños para |a temática de la teoría de probabilidades, los mismos que aparecen en el cuadro N°11.

Cabe resaltar, que para los propósitos del presente trabajo, se ha enriquecido los estándares de aprendizaje, las capacidades y desempeños con la inclusión de los temas: asignación frecuentista de probabilidades (método Montecarlo), distribución de probabilidades de una variable aleatoria X y el cálculo de la esperanza matemática, temas que no se encuentran comprendidos en los textos escolares de matemática ni en el Currículo Nacional de Educación Básica; razón por la cual los docentes de matemática no incluyen estos temas dentro de su programación anual.

Para una aplicación de las estrategias didácticas que se proponen en la sección 4.2 se consideró 2 aulas A y B del colegio parroquial María Reyna de Huaral.

El Aula A con 18 alumnos se constituyó en el “Grupo de control” y el aula B con 20 alumnos se constituyó en el “Grupo experimental”. Para ambos grupos se consideró únicamente los temas que aparecen en los estándares de aprendizaje del cuadro N°11.

COMPETENCIASS, CAPACIDADES Y DESEMPEÑOS PARA LA TEMATICA DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES EN EL III CICLO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA / MACROCOMPETENCIA: "RESULEVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE"

CUADRO N° 11

| COMPETENCIA ESPECIFICA | CAPACIDADES | DESEMPEÑOS |
|---|---|---|
| Reconoce y valora la influencia de la casualidad o azar en la ocurrencia de experiencias o experimentos cuyos resultados son observables y determina el conjunto (espacio muestral) de todos sus resultados posibles, seleccionando uno o más resultados particulares (sucesos o eventos ) para calcular sus probabilidades como una medida del grado de incertidumbre de sus ocurrencias o apariciones; para luego evaluar su magnitud en términos porcentuales y hacer comparaciones y | • Reconoce fenómenos, hechos, eventos o sucesos influenciados por el azar.<br>• Asigna probabilidades a sucesos aleatorios.<br>• Interpreta el significado de una probabilidad.<br>• Selecciona y usa reglas apropiadas para calcular las probabilidades de sucesos compuestos (intersección y unión de sucesos).<br>• Calcula la probabilidad de sucesos condicionados y lo interpreta.<br>• Calcula y comprende el significado de una probabilidad no condicionada (sucesos independientes). | • Dada una lista de fenómenos o sucesos reconoce aquellos que están influenciados por el azar.<br>• Realiza experiencias aleatorias, uno por uno, para registrar la ocurrencia de un suceso $S$ y calcula su frecuencia relativa k/n en cada paso; para luego diseñar un gráfico de n ver sus $k/n$ y obtener conclusiones acerca de la probabilidad de $S$ (Método Montecarlo).<br>• Calcula e interpreta probabilidades de sucesos haciendo uso de la asignación de Laplace, verificando previamente que es aplicable.<br>• Dada una experiencia aleatoria con espacio $E$ y 2 sucesos $A, B$: |

| | | |
|---|---|---|
| predicciones con la finalidad de tomar la decisión, más favorable que esté relacionado con estos resultados particulares llamados sucesos aleatorios. | • Compara probabilidades para tomar decisiones.<br>• Realiza predicciones usando probabilidades.<br>• Genera distribuciones de probabilidad para una variable X y calcula la esperanza matemática. | a) Calcula e interpreta las probabilidades de los sucesos: $A; B; A'; B'; A \cap B; A \cup B; A/B\ y\ B/A$<br>b) Compara estas probabilidades y saca conclusiones.<br>c) Formula predicciones a que $A$ y $B$ son dependientes o independientes y, luego verifica su predicción.<br>d) Se asocian a $A$ y $B$ acciones determinadas, para que en función de $P(A)$ y $P(B)$ tome la decisión de adoptar la mejor o peor decisión.<br>e) En $E$ se le propone una variable aleatoria $X$, determina los valores de $X$ y calcula las probabilidades que le corresponde a cada valor, lo presenta en un cuadro y luego calcula la esperanza matemática de la distribución generada. |

corresponde al nivel 7 (3°,4° y 5° de secundaria) y los temas tradicionales que aparecen de los textos de matemática escolar; esto para fines comparativos. Precisamente para estos fines comparativos no hubiera sido razonable incluir el tema como son la "asignación frecuentista de probabilidades". Sin embargo, ya sin fines comparativos, se ensayó la enseñanza de este tema en el grupo experimental de manera excepcional. Los resultados de este ensayo se dan en la siguiente sección 4.4.

Naturalmente, que en el grupo de control se aplicó la enseñanza tradicional de temas clásicos de probabilidad y, en el grupo experimental se aplicó la enseñanza de los mismos temas, pero usando las estrategias didácticas diseñadas y propuestas en la sección 4.2.

En ambos grupos se usaron un aproximado de 10 horas de clases para la enseñanza de los temas que aparecen en los desempeños de cuadro N°11; con las excepciones antes señaladas. Adicionalmente, se usó un tiempo aproximado de 2 horas para la enseñanza de la asignación frecuentista de probabilidades incluida su evaluación.

## 4.4 EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES A LA LUZ DE LAS COMPETENCIAS, CAPACIDADES Y DESEMPEÑOS ESTABLECIDOS PARA LA APLICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PROPUESTAS

### 4.4.1 APLICACIÓN DE UNA PRUEBA DE DESEMPEÑO ESTANDART

Para la evaluación de los aprendizajes, tanto en el grupo de control como en el grupo experimental se aplicó una prueba de desempeño estandart (anexo 2), con 4 reactivos o ítems, en escala vigesimal. El reactivo 1 vale 2 puntos, el reactivo 2 vale 4 puntos, el reactivo 3 vale 12 puntos y el reactivo 4 vale 2 puntos (20 en total).

Los calificativos obtenidos por cada grupo se presentan en el siguiente cuadro.

CALIFICATIVOS OBTENIDOS EN LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE DESEMPEÑO (GRUPO DE CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL)

| SUJETO | GRUPO CONTROL | GRUPO EXPERIMENTAL |
|---|---|---|
| 1 | 08 | 14 |
| 2 | 12 | 16 |
| 3 | 10 | 15 |
| 4 | 11 | 15 |
| 5 | 05 | 10 |
| 6 | 12 | 15 |
| 7 | 12 | 15 |
| 8 | 09 | 17 |
| 9 | 06 | 14 |
| 10 | 07 | 14 |
| 11 | 10 | 09 |
| 12 | 10 | 14 |
| 13 | 10 | 15 |
| 14 | 13 | 14 |
| 15 | 11 | 17 |
| 16 | 08 | 14 |
| 17 | 13 | 10 |
| 18 | 07 | 15 |
| 19 | - | 15 |
| 20 | - | 14 |
| $\bar{X}$ | 9,7 | 14,1 |
| $S^2$ | 5,8 | 4,5 |

CUADRO N°12

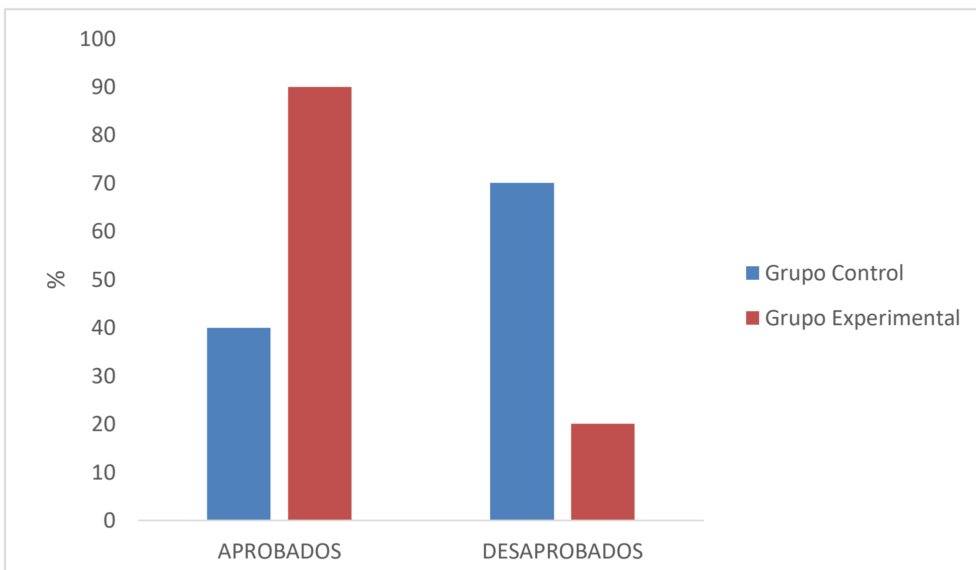
### 4.4.2 PORCENTAJE DE APROBADOS Y DESAPROBADOS

Tomando en cuenta los datos del cuadro anterior se han calculado los porcentajes de los aprobados y desaprobados para cada grupo, en el siguiente cuadro N°13.

PORCENTAJE DE APRBADOS Y DESAPROBADOS POR GRUPOS

| SITUACIÓN | GRUPO CONTROL (18) | GRUPO EXPERIM. (20) |
|---|---|---|
| APROBADOS | 39% | 85% |
| DESAPROBADOS | 61% | 15% |
| TOTAL | 100% | 100% |

CUADRO N°13




Según el cuadro N°13 y su grafico correspondiente, se observa que el porcentaje de aprobados en el grupo experimental supera en más del doble de porcentaje al grupo de control. En cambio, en el grupo de control el porcentaje de desaprobados cuadruplica al porcentaje de desaprobados en el grupo experimental.

### 4.4.3 COMPARACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS PUNTAJES PROMEDIO POR GRUPOS

De acuerdo al cuadro N°12 se observa que el calificativo promedio en el grupo experimental supera en 4.4 puntos vigesimales al calificativo promedio del grupo de control.

Para comprobar estadísticamente que esta diferencia observada no es puramente casual, sino que se debe a que realmente lo aprendizajes en el grupo experimental fueron mucho mejores que en el grupo de control, se realizó en contraste de hipótesis haciendo uso de la prueba T para muestras independientes, formulando las siguientes hipótesis:

Ho: El calificativo promedio es por igual para ambos grupos.

H1: El calificativo promedio del grupo experimental es superior al del grupo de control.

Nivel de significancia : 5%

Grados de libertad : 36

Lectura de T al 5% : 1,69

Punto crítico C : 1,24

Diferencia de medias : 4,4

Decisión: Como la diferencia de medias 4,4 supera al punto crítico C=1,24, entonces se rechaza la hipótesis Ho y se acepta la hipótesis H1.

Potencia de la prueba: 99,9%

Conclusión: Hay evidencias estadísticas, con una altísima potencia (99,9%), que en el grupo experimental los aprendizajes fueron mucho mejores que en el grupo de control, por efectos de la aplicación de las estrategias didácticas propuestas.

## 4.5 EVALAUCIÓN DEL APRENDIZAJE DE LA ESTRATEGÍA A SEGUIRSE PARA EL CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD FRECUENTISTA.

La enseñanza del cálculo de la probabilidad frecuentista, paso a paso experimentando a modo de ensayo solo se realizó en el grupo experiemental y no en el grupo de control debido a que éste tipo de probabilidad (asignación frecuentista) no está considerado en el Currículo Nacional de la Educación Básica; es decir los profesores de matemática no lo incluyen en su programación anual. Sin embargo, es de resaltar su importancia porque es la manera de actuar cuando no se conoce a priori que el suceso elemental de un espacio muestra finito de n elementos son equiprobables.

La evaluación del aprendizaje de la asignación frecuentista de probabilidades se realizó con la ejecución de la experiencia explicada en el Anexo 03 por parte de los alumnos del grupo experimental. Como resultado se obtuvo que 14 alumnos lo realizaron muy bien, pues se comprobó que sus curvas resultantes convergían hacia la probabilidad $p = 0{,}55$, que es lo correcto.

También se observó que 3 alumnos fallaron o no lo hicieron bien el experimento y 3 no lograron presentarlo.

En suma, se observó que los alumnos mostraron mucho entusiasmo y demostraron interés en ejecutar la experiencia explicada en el Anexo 03.

# CAPITULO V
# DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 5.1 DISCUSIÓN

### 5.1.1 DISCUSIÓN ACERCA DE LOS RESULTADOS

A la luz de los resultados expuestos en el capítulo IV se puede afirmar que se ha cumplido con todos los pasos necesarios para culminar con relativo éxito los propósitos que se perseguía a través de los objetivos e hipótesis planteados para el presente trabajo; proponiendo un conjunto de estrategias didácticas para la enseñanza – aprendizaje de la teoría de probabilidades en el nivel secundario y, su consiguiente experimentación y validación en una realidad educativa como es la I.E. María Reyna de Huaral (2018).

Así pues, se ha comprobado la eficacia de las estrategias didácticas propuestas para:

- Reconocer e identificar fenómenos, hechos, acontecimientos, sucesos, eventos influenciados por el azar, como un paso previo para identificar correctamente el suceso aleatorio cuya probabilidad se quiere calcular.
- Valorar a la probabilidad como una medida de la incertidumbre de la ocurrencia de un suceso aleatorio.
- Reconocer y valorar la importancia del concepto de probabilidad frecuentista, cuyo cálculo requiere de pasos propios del quehacer de la investigación científica, como es preparar las condiciones para realizar un experimento, ejecutar el experimento y, observar y registrar sus resultados, hacer cuadros, diseñar gráficos y sacar conclusiones.

- Seleccionar la regla más adecuada para calcular una probabilidad de acuerdo a la terminología y lenguaje conjuntista usado en el planteamiento del problema.
- Interpretar una probabilidad calculada para un suceso S, en términos de la proporción que ocupa dentro de su espacio muestra E, de tal modo que esta probabilidad sea entendida como una medida del grado de incertidumbre en la ocurrencia de S.
- Comparar las probabilidades halladas con la finalidad de realizar predicciones y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.
- Calcular e interpretar las probabilidades calculadas para sucesos compuestos como son la probabilidad condicional, la probabilidad para sucesos independientes, la probabilidad de la unión de sucesos y la probabilidad para la intersección de sucesos.
- Plantear, resolver, interpretar y comunicar problemas matemáticos en los que el azar juega un papel casual y determinante.

### 5.1.2 DISCUSIÓN ACERCA DE PROBLEMAS CONEXOS

Pero, a la vez, el presente trabajo también ha servido para comprender que en el Perú la enseñanza y aprendizaje de la teoría de probabilidades, a nivel escolar, esta descuidada, por diversas razones que se ha podido deducir:

- Los profesores de matemática no están debidamente preparados para enseñar el tema de las probabilidades.
- Los textos escolares de matemática dedican un ínfimo espacio, no más del 2% de sus páginas, al tema de las probabilidades.
- El MINEDU no ha establecido los contenidos suficientes ni los estándares de aprendizaje que corresponde a cada grado de estudios en la secundaria.
- No se cuenta en el Perú con trabajos de investigación relacionados

a la didáctica de la enseñanza de la probabilidad.

En suma, el esfuerzo realizado en este trabajo está plenamente justificado y compensado por los resultados hallados y, porque de alguna manera se está contribuyendo en algo a la solución de una problemática educativa como es la enseñanza – aprendizaje de una rama importante de la matemática que cada día toma más importancia en el campo de las ciencias: La teoría de probabilidades

## 5.2 CONCLUSIONES

Las conclusiones más relevantes a las que se puede arribar en el presente trabajo son:

- Se ha cumplido con los objetivos trazados; pues el objetivo central fue comprobar la efectividad de las estrategias didácticas que se proponen en la sección 4.2. Efectivamente, al aplicarse a una realidad concreta de enseñanza de los temas de probabilidad que corresponden al 3er grado de secundaria, siguiendo las estrategias de aprendizaje que se proponen se obtuvo resultados muy satisfactorios en el grupo experimental de alumnos en comparación con el grupo de control.
- Se ha verificado las hipótesis planteadas. En efecto se ha verificado la validez de las hipótesis planteadas en éste trabajo; pues, se ha comprobado que las estrategias mejoran notablemente el aprendizaje de los temas fijados de probabilidad para el 3er año de secundaria. Esta conclusión se apoya en un contraste de hipótesis entre los calificativos promedio logrado en el grupo experimental con el calificativo promedio logrado en el grupo de control, resultó que la diferencia de promedios es estadísticamente significativa con una alta potencia, a favor del grupo experimental.
- Es factible la enseñanza de la asignación de probabilidades frecuentistas desde el 1er grado de educación secundaria debido a su sencillez y fácil compresión, pero de enorme valor por su contribución formativa.

- La educación matemática, en cuanto a la enseñanza de las probabilidades, está muy descuidada en nuestro país.

## 5.3 RECOMENDACIONES

Se recomienda a la Facultad de Educación de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión:

- Organizar cursos de capacitación para profesores de matemática en temas de Estadística y probabilidades, tanto en conocimientos como en recursos didácticos.
- Incluir en su plan curricular de la carrera de Educación Matemática un curso netamente para la teoría de probabilidades, así como recursos didácticos para su enseñanza y aprendizaje.
- Publicar en su página virtual, a modo de artículo, los resultados del presente trabajo, para su difusión y toma de conciencia de la importancia que tiene la teoría matemática de la probabilidad por su contribución formativa y utilitaria.

# FUENTES DE INFORMACIÓN

## 1. FUENTES BIBLIOGRÁFICAS


Castelnuevo, E. (2009). Didáctica de la Matemática Moderna. Edi. Trillas. México.

Chevallard, Y. (1997). Evolución de la problemática didáctica. Barcelona. España.

Gmurman, V.E. (1985). Problemas de Probabilidad y Estadística Matemática. Edit. Mir. Moscú.

Hernández, R. (2014). Metodología de la investigación. Ed. Mc Graw Hill (6ta.edición). México.

Kreyszig, E. (2005). Introducción a la Estadística Matemática-Principios y Métodos. Ed. Limusa - México.

Lipschutz, S. (2008). Probabilidad. Edic. Mc Graw Hill. Mexico.

Meyer, P. (1991). Probabilidad y aplicaciones estadísticas. Ed. Feisa. Bogotá. Colombia.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima. Perú.

Ministerio de Educación del Perú (2016). Diseño Curricular Nacional de EBR. Lima. Perú.

Mivanda, A.- Fortes, C. (2007). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Ed. Aljibe. España

Nolasco, U. (2018). IBM-SPSS 24. Edic. El artista informático. Lima. Perú.

Obregón, I. (1985). Teoría de Probabilidad. Ed. Limusa S.A. – México.

Organización de los Estados Americanos (1975). Probabilidad e inferencia estadística. Monografía N° 11. Washintong.

Paredes, M. (2017). Matemática por áreas. Colección Intelectum-Evolución. Lima. Perú.

Valderrama, S. (2014). Pasos para elaborar proyectos de investigación científica. Ed. San Marcos. Lima. Perú.

## 2. ARTÍCULOS CIENTÍFICOS

Barraguez, J.- Guisasola, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. Universidad del país Vasco. Escuela universitaria politécnica de San Sebastián. España.

Batanero, C.- Ortiz, J.- Serrano, L. (2015). Investigación en didáctica de la probabilidad. Salvador. Brasil.

Cardona, J.- Arias, J. (2008). Didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional. Artículo. Universidad Tecnológica de Pereira. Brasil.

Echeverry, A.- Hernández, J. (2016). Estrategia Didáctica para el estudio de las teorías de las probabilidades basada en literatura científica. Tesis para optar el Título de Licenciado den Matemática y Física. Facultad de Educación. Universidad de Antioquía.

Jiménez, L.- Jiménez, J. (2014). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria ¿Para qué y por qué?

Pajares, A.- Tomeo, V. (2009). Enseñanza de la estadística y la probabilidad en secundaria: experimentos y materiales, Universidad Complutense de Madrid. España.

Programa de Maestría en Matemática Educativa. Universidad de Costa Rica.

## 3. FUENTES ELECTRÓNICAS

Definición de Didáctica, qué es, significado y concepto.
Extraído de https://definición.de/didáctica/30-05-18

Concepto de Didáctica.
Extraído de Wikipedia-La enciclopedia libre 30-05-18

Pilares del proceso de aprendizaje
Extraído de http://waico.clamme.org.mx/alme.htm 04-06-18

# ANEXOS

## ANEXO 01

## ENCUESTA PARA DOCENTES DE MATEMÁTICA DE SECUNDARIA

## (HUARAL – 2018)

Estimado Colega: El propósito de la presente Encuesta es recoger algunas informaciones relevantes en torno al proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades en las I.E. de Huaral. ¡Muchas gracias por su colaboración!

1. **Escriba en los espacios en blanco 3 principales problemas o dificultades hallados por Ud. cuando tuvo la oportunidad de enseñar probabilidades**

   a) ______________________________________________

   b) ______________________________________________

   c) ______________________________________________

   En lo que sigue marque con un aspa la respuesta que Ud. Considere más conveniente

2. **¿Cuál es la definición más aproximada del concepto de "fenómeno determinístico?**

   ( ) Son fenómenos que se pueden determinar con exactitud y precisión.

   ( ) Son fenómenos cuyos resultados se pueden predecir con seguridad absoluta.

   ( ) Son fenómenos que tienen un único resultado

3. **¿Cuál es la definición más aproximada del concepto de "fenómeno probabilístico"?**

   ( ) Son aquellos fenómenos que no son determinísticos

   ( ) Son aquellos fenómenos cuya incertidumbre se puede medir con probabilidades

   ( ) Son aquellos fenómenos cuyos resultados dependen del azar

4. **Se sabe que la probabilidad de un suceso aleatorio $S$ es $\mathrm{p}(S) = 0,27$, ¿Cuál es la interpretación más adecuada de éste valor?**

( ) La probabilidad de $S$ es 27%

( ) En 100 casos, $S$ se presenta 27 veces

( ) Si se realizan 100 experiencias independientes en los que $S$ ocurre, entonces $S$ ocurre en promedio 27 veces.

5. **¿En qué consiste la asignación estadística de probabilidad?**

( ) Es asignarle a un suceso aleatorio $S$ su frecuencia relativa k/n en experiencias aleatorias observadas, cuando $S$ ocurre k veces

( ) Es calcular estadísticamente la probabilidad de un suceso aleatorio $S$

( ) Es asignarle al suceso aleatorio $S$ un valor aproximado $p$ hacia donde converse la frecuencia relativa $k/_n$ de $S$, donde $k$ es el número de veces que ocurre $k$ en $n$ experiencias aleatorias independientes.

6. **Un candidato la alcaldía de la ciudad contrata 2 empresas encuestadoras $A, B$ para que determinen la probabilidad $p$ (nivel de aceptación) de que un candidato cualquiera vote por él en las próximas elecciones. La empresa $A$ encuesta a 500 electores y determina que $p$ es 25%. La empresa $B$ encuesta a 1000 electores y determina que $p$ es 28%. ¿Cuál es la probabilidad más realista?**

( ) Es $p = 28\%$

( ) Es $p = 25\%$

( ) No se puede saber

7. **¿Qué significado tiene un suceso aleatorio $A$ (no vacío) condiciona la ocurrencia de un suceso aleatorio $B$ dentro de un espacio muestral $E$?**

( ) Que el suceso $B$ está condicionado por el suceso $A$

( ) Tener la información de que si $A$ ocurrió éste puede hacer variar la ocurrencia de $B$

( ) Que el espacio $E$ se reduce a $A$ y $B$ se reduce a $A \cap B$

8. **¿Cuál es el significado más preciso de la expresión $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$?**

( ) Que los sucesos $A$ y $B$ son independientes.

( ) Que $A$ no influye sobre $B$ ni $B$ influye sobre $A$.

( ) Que la ocurrencia de $A$ no condiciona la ocurrencia de $B$, y viceversa.

9. **¿En qué circunstancia se usa la regla $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$?**

( ) Cuando se quiere calcular la probabilidad de que por lo menos ocurra 1 de los 2 sucesos $A, B$.

( ) Cuando se quiere calcular la ocurrencia de $A$ y $B$.

( ) Cuando se quiere calcular la probabilidad de la unión de 2 sucesos $A, B$ excluyentes.

10. **¿En qué circunstancias es recomendable usar la regla de la probabilidad del contrario $\boldsymbol{S'}$ de un suceso aleatorio $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{p(S) = \{p(S')\}}$?**

( ) Cuando el cálculo de $p(S)$ es más fácil que el cálculo de $p(S')$

( ) Cuando el cálculo de $p(S')$ es más fácil que el cálculo de $p(S)$

( ) Cuando $p(S) = p(S')$

## ANEXO 02

## PRUEBA DE DESEMPEÑO

**(Tiempo máximo: 1,5 horas)**

**MARCA CON UN ASPA LA RESPUESTA QUE CONSIDERES CORRECTA**

1. **Señala lo que consideres como suceso determinístico o suceso aleatorio o probabilístico.**

| SUCESO | DETERMINÍSTICO | ALEATORIO |
|---|---|---|
| Contar la cantidad de hermanos que tienes | | |
| Salir a la puerta de tu casa y anotar el sexo de la persona que pasa | | |
| Que salgas elegido para conformar una comisión | | |
| Escoger el menor de los dígitos entre los dígitos 7; 3; 4; 2; 9 | | |

2. **Juan participa en una rifa de 200 números comprando 10 números. La rifa premia una Tablet.**

**2.1 ¿Cuál es la probabilidad de que Juan se saque la Tablet?**

(a) 0,50 (b) 0,05 (c) 0,02 (d) 0,01

**2.2 ¿Cuál es la interpretación de esta probabilidad?**

(a) La probabilidad de que Juan se saque la Tablet es 0,05.

(b) La probabilidad de que Juan se saque la Tablet es 5%.

(c) Si, Juan participa 100 veces en la misma rifa, entonces se sacará 5 Tablet.

(d) Si, Juan participa en 100 rifas del mismo tipo, comprando 10 rifas cada vez, entonces en promedio puede sacarse 5 Tablets.

**2.3 ¿Cuántas rifas deberá comprar Juan si quiere que su probabilidad de sacarse la Tablet sea 0,15?**

(a) 30 (b) 15 (c) 12 (d) 35

**2.4 Carlos también participó en la rifa comprando 20 números. ¿Cuántas veces es más probable que Carlos se saque la Tablet que Juan se la saque?**

(a) 2 (b) 4 (c) 2,5 (d) 1,5

3. **En la caja I hay 3 bolos blancos etiquetados con los dígitos 1, 2 y 3 (B - 1; B - 2; B - 3). En la caja II hay 2 bolos rojos etiquetados con los dígitos 4 y 5 (R - 4; R – 5). Se realiza la siguiente experiencia: Se escoge al azar una de las cajas, luego se extrae al azar un bolo y se registra su color y su dígito.**

**3.1 Hallar el espacio muestral de esta experiencia, usando el diagrama del árbol.**

(a) $E = \{(I; B-1), (I; B-2), (I; B-3), (II; R-4), (II; R-5)\}$

(b) $E = \{(I; R-1), (I; R-2), (I; R-3), (II; B-4), (II; B-5)\}$

(c) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(d) $E = \{B; R\}$

**3.2 Diseña el árbol de probabilidades y halla la probabilidad del suceso $\boldsymbol{A}$: "El bolo extraído es de color blanco"**

(a) 1/3 (b) 2/3 (c) 3/6 (d) 1/5

**3.3 Sea el suceso B: "El bolo extraído tiene dígito par"; hallar su probabilidad y expresarla en porcentaje.**

(a) 17,7% (b) 37,7% (c) 40,7% (d) 41,7%

**3.4 ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra B sabiendo que se tiene la información de que A ocurrió?**

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 1/4 (d) 1/5

**3.5 Si comparas $\boldsymbol{p(B)}$ con $\boldsymbol{p\left({}^{B}/_{A}\right)}$, puedes afirmar que A y B son independientes?**

(a) Si (b) No (c) Tal vez (d) No se puede saber

**3.6 ¿Cuál es la probabilidad de que el bolo extraído sea de color blanco y tenga dígito par?**

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 1/6 (d) 1/5

**3.7 ¿Cuál es la probabilidad de que el bolo extraído sea de color blanco o que tenga el dígito par?**

(a) 1/3 (b) 2/3 (c) 4/4 (d) 3/4

**3.8 ¿Cuál es la probabilidad de que el bolo extraído ni sea de color blanco ni tenga el dígito par?**

(a) 3/4 (b) 1/4 (c) 1/3 (d) 2/3

**3.9 ¿Cuál es la probabilidad de que el bolo extraído sea de color rojo y tenga por dígito a 3?**

(a) 1/2 (b) 1 (c) 0 (d) 1/3

**3.10 ¿Cuál es la probabilidad de que el bolo extraído tenga un dígito menor que 6?**

(b) 1 (b) 0 (c) 1/2 (d) 1/3

**3.11 Hallar la distribución de probabilidades de la variable X: "Digito del bolo extraído" (Ver el árbol de probabilidades)**

(a)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/4 | 1/4 |

(b)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X)$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/6 | 1/6 |

(c)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X)$ | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 | 1/5 |

(d)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X)$ | 1/6 | 1/4 | 1/6 | 1/4 | 1/6 |

4. **Cierto proceso de fabricación de un artículo electrónico tiene una probabilidad de 5% de producir un artículo defectuoso. Por cada artículo no defectuoso el fabricante gana S/. 32 y, por cada artículo defectuoso producido pierde S/. 8 (ganancia negativa).**

**4.1 ¿Cuál es la distribución de probabilidades de la variable ganancia $X$?**

(a)

| $X$ | $p(X)$ |
|---|---|
| Defectuoso | 0,05 |
| No defectuoso | 0,95 |

(b)

| $X$ | $p(X)$ |
|---|---|
| S/. 32 | 0,95 |
| S/. - 8 | 0,05 |

(c)

| $X$ | $p(X)$ |
|---|---|
| S/. 32 | 0,05 |
| S/. - 8 | 0,95 |

| $X$ | $p(X)$ |
|---|---|
| S/. - 32 | 0,05 |
| S/. 8 | 0,95 |

**4.2 ¿Cuál es la ganancia esperada por producto (Esperanza matemática)?**

(a) S/.25 (b) S/.30 (c) S/.22 (d) S/.20

## ANEXO 03

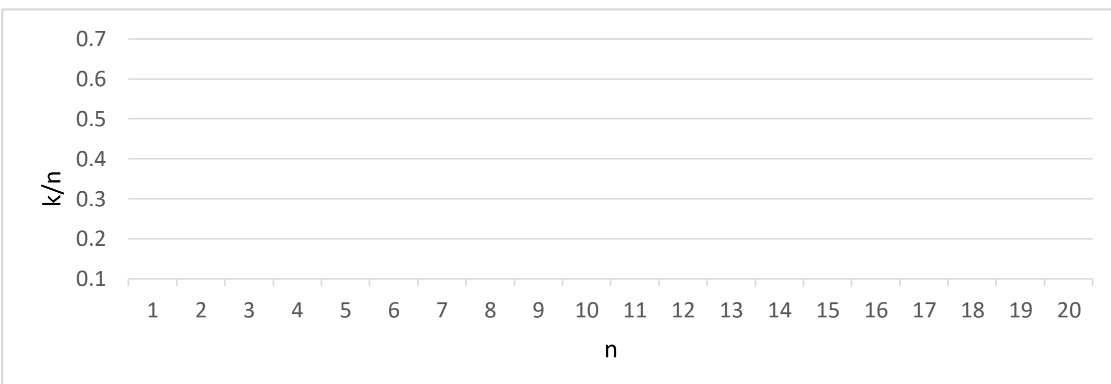
### CALCULO DE UNA PROBABILIDAD USANDO LA ASIGNACIÓN FRECUENTISTA O ESTADÍSTICA (MÉTODO MONTECARLO)

Raya una cartulina grande horizontalmente con rectas paralelas a distancias 7,5cm; luego ráyalo nuevamente pero ahora verticalmente también a distancias de 7,5cm. de lado. Coloca la cartulina sobre una mesa y luego realiza la siguiente experiencia.

Deposita una moneda de 1 sol en un vasito de plástico, agítalo y lanza la moneda sobre la cartulina rayada; si la moneda corta (se cruza) a una recta cualquiera registra un "SI"; si no la corta registradas un "NO". Realiza 20 veces esta experiencia y en cada lanzamiento cuentas el número $k$ de veces que haz registrado un "SI" hasta ese momento. Después calcula, la frecuencia relativa $k/_n$ que corresponde hasta ese lanzamiento. Finalmente diseña un gráfico del número de lanzamientos (n) versus la frecuencia relativa $k/_n$. Los cálculos los vas registrando en el siguiente cuadro ($k/_n$ lo expresas con 2 decimales):

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $¿Lo\ corta?$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $k$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $k/n$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Después, elabora un gráfico de "$n$" versus "$k/_n$"




Finalmente, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Hacia qué valor se va acercando (converge) tu gráfico?

b) Entonces, ¿Cuál es la probabilidad frecuentista del suceso aleatorio S: "La moneda corta a una recta cualquiera, cuando realizas 20 experiencias?

c) ¿Consideras que si continúas realizando más y más experiencias la curva resultante se estabilizara mejor alrededos de un valor?

## MIEMBROS DEL JURADO EVALUADOR

…………………………………………………………….

Mg. JOSE LUIS MORENO VEGA

PRESIDENTE

…………………………………………………………………….

Dr. ERNESTO ANDRES MAGUIÑA ARNAO

SECRETARIO

……………………………………………..…………….

Mg. ABRAHAN CESAR NERY AYALA

VOCAL

……………………………….…………………………………..

Mg. NILO TELLO PANDAL.

ASESOR