UNIVERSIDAD NACIONAL JOSE FAUSTINO SANCHEZ CARRION

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA

Texto de Física I

“MECANICA DE UNA PARTICULA Y DEL SOLIDO RIGIDO”

M(o). César Agusto Montalbán Chininín.

Mg. Carlos Job Fiestas Urbina
Lic. Enrique Gilberto Fernández Burgos

HUACHO - 2018

CONTENIDO

CONTENIDO	Pág.
INTRODUCCION	VI
UNIDAD DIDACTICA I: MAGNITUDES FISICAS	1
1.1.- MAGNITUDES FISICAS FUNDAMENTALES Y DERIVADAS	1
1.1.1 ¿Qué es la Ciencia Física?	1
1.1.2 ¿Qué es una Magnitud física?	1
1.1.3 ¿Cómo se Miden las Magnitudes Físicas?	2
1.1.4 ¿Qué son Magnitudes Fundamentales y Derivadas?	2
1.1.5 UNIDADES DE MEDIDA DE MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUPLEMENTARIAS	3
1.2 SISTEMAS DE UNIDADES COHERENTES MAS USUALES	6
1.2.1 SISTEMAS DE UNIDADES COHERENTES MÁS USUALES	6
1.2.2 CONVERSION DE UNIDADES	8
1.2.3 ECUACIONES DIMENSIONALES	9
1.3 MAGNITUDES FISICAS ESCALARES Y VECTORES (I)	11
1.3.1 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES	13
1.3.2 SUMA Y RESTA GEOMETRICA DE VECTORES	15
1.3.3 DESCOMPOSICION Y COMPOSICION VECTORIAL	19
1.3.4 SUMA DE VECTORES	19
1.3.5 DIFERENCIA DE VECTORES	19
1.4 MAGNITUDES FISICAS ESCALARES Y VECTORES (II)	21
1.4.1 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR	21
1.4.2 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES	23
1.4.3 PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES	24
EJERCICIOS PROPUESTOS	28
PRACTICA DE LABORATORIO # 01: MEDICION INDIRECTA DE UNA DISTANCIA	31

	Pág.
UNIDAD DIDACTICA II: FUNDAMENTOS DE MECANICA	37
2.1 CINEMATICA LINEAL Y CIRCULAR	37
2.1.1 MAGNITUDES QUE DESCRIBEN EL MOVIMIENTO	37
2.1.2 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME	39
2.1.3 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO	40
2.1.4 MOVIMIENTO PARABOLICO SOBRE LA SUPERFICIE TERRESTRE	42
2.1.5 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME	46
2.1.6 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO	48
2.2 FUERZAS Y LEYES DE NEWTON	51
2.2.1 LEYES DE NEWTON	51
2.2.2 LA FUERZA DE LA GRAVEDAD	52
2.2.3 FUERZA QUE EJERCE UN RESORTE	55
2.2.4 FUERZA DE CONTACTO	55
2.2.5 FUERZAS DE FRICCION	56
2.2.6 FUERZAS DE COMPRESION Y TENSION	59
2.3 ESTATICA DE SOLIDOS RIGIDOS	59
2.3.1 EQUILIBRIO DE FUERZAS COLINEALES O CONCURRENTES	60
2.3.2 MOMENTO DE TORSION DE UNA FUERZA	63
2.3.3 EQUILIBRIO DE FUERZAS NO CONCURRENTES Y PARALELAS	65
2.4 DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO	71
2.4.1 DINAMICA LINEAL DEL SOLIDO RIGIDO	71
2.4.2 DINAMICA ROTACIONAL	74
EJERCICIOS PROPUESTOS	79
PRACTICA DE LABORATORIO # 02: MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO	88

	Pág.
UNIDAD DIDACTICA III : TRABAJO Y ENERGIA	97
3.1 TRABAJO Y ENERGIA (I)	97
3.1.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE	98
3.1.2 TRABAJO RALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE	98
3.1.3 TRABAJO REALIZADO POR UN RESORTE	99
3.1.4 TRABAJO REALIZADO POR UN TORQUE ACTUANDO SOBRE UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE FIJO	100
3.2 TRABAJO Y ENERGIA (II)	101
3.2.1 POTENCIA MECANICA	102
3.2.2 ENERGIA CINETICA	105
3.2.3 TEOREMA DEL TRABAJO - ENERGIA	106
3.3 CONSERVACION DE LA ENERGIA (I)	110
3.3.1 FUERZAS CONSERVATIVAS	110
3.3.2 ENERGIA POTENCIAL Y FUERZAS CONSERVATIVAS	111
3.3.3 CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA	113
3.4 CONSERVACION DE LA ENERGIA (II)	118
3.4.1 RELACION ENTRE FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGIA POTENCIAL	119
3.4.2 DIAGRAMAS DE ENERGIA Y EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA	120
3.4.3 SISTEMAS CONSERVATIVOS EN TRES DIMENSIONES	125
3.4.4 CONSERVACION DE LA ENERGIA	127
EJERCICIOS PROPUESTOS	127
PRACTICA DE LABORATORIO # 03: ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA Y RODAMIENTO EN RAMPAS	134

	Pág.
UNIDAD DIDACTICA IV: IMPETU Y CHOQUE DE PARTICULAS	144
4.1 IMPETU (I)	144
4.1.1 MOMENTO LINEAL DE UNA PARTICULA	144
4.1.2 IMPULSO Y MOMENTO LINEAL	145
4.2 IMPETU (II)	148
4.2.1 CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL PARA UN SISTEMA DE DOS PARTICULAS	148
4.2.2 CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL PARA UN SISTEMA DE DOS PARTICULAS	150
4.3 CHOQUE DE PARTICULAS (I)	152
4.3.1 CHOQUE DE PARTICULAS	152
4.3.2 CHOQUES ELASTICOS E INELASTICOS EN UNA DIMENSION	154
4.4 CHOQUE DE PARTICULAS (II)	159
4.4.1 CHOQUE DE PARTICULAS EN DOS DIMENSIONES	160
4.4.2 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	160
4.4.3 CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA	161
4.4.4 CENTRO DE MASA	165
4.4.5 MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS	168
EJERCICIOS PROPUESTOS	173
PRACTICA DE LABORATORIO # 04: CHOQUE DE DOS PARTICULA Y RODAMIENTO EN RAMPAS	180

INTRODUCCION

El texto universitario “MECANICA DE UNA PARTICULA Y DEL SOLIDO RIGIDO”, que presento en la ocasión de su primera edición, tiene como objetivo fundamental hacer un enfoque simple y claro de las leyes y principios de la mecánica, vinculados con los modelos de partícula y sólido rígido.

Asimismo, presentamos ejercicios resueltos con la finalidad de esclarecer los conceptos e ideas vertidos en el desarrollo de los temas presentados. Estos ejercicios describen por lo general fenómenos y hechos de la vida real descritos con los modelos desarrollados en la teoría expuesta.

Al finalizar cada capítulo se proponen un conjunto de ejercicios para afianzar el dominio del tema desarrollado. En la mayoría de los casos tienen como objetivo específico evaluar sistemas mecánicos y actividades humanas siguiendo un procedimiento reduccionista basado en una serie organizada de preguntas simples.

La primera unidad didáctica denominada magnitudes físicas, trata sobre los fundamentos y bases para definir las propiedades que permitirán establecer las leyes y principios de la ciencia física.

La segunda unidad didáctica denominada fundamentos de mecánica, trata sobre la aplicación de las leyes de Newton al movimiento lineal de una partícula y el movimiento rotacional del sólido rígido.

La tercera unidad didáctica denominada trabajo y energía, enfoca el movimiento de las partículas y el movimiento rotacional del sólido rígido empleando conceptos energéticos, que por su naturaleza escalar resultan más fáciles de manejar.

La cuarta unidad didáctica denominada ímpetu y choque de partículas, trata sobre la aplicación de los principios de conservación del momento lineal y de la energía mecánica en el choque de partículas en una dimensión y en un plano.

El contenido de cada unidad didáctica está dosificado para o8 sesiones de clases teóricas de 02 horas de duración cada una. Si se realizan dos sesiones de clases teóricas, de 02 horas cada una, por semana, el curso se desarrollará en un período de 17 a 18 semanas incluido el tiempo requerido para las evaluaciones.

También, al final de cada unidad didáctica se proponen ejercicios para que el estudiante practique la aplicación de las teorías vertidas a las situaciones descritas en los mismos. En cada unidad didáctica se propone una práctica de laboratorio, la cual podrá desarrollarse construyendo previamente algunos equipos con materiales simples y adquiriendo otros en los mercados. Estas prácticas pueden ser opcionales, dependiendo del nivel, intensidad y naturaleza del curso.

Este texto está orientado para los estudiantes de las carreras profesionales de ciencias e ingeniería.

LOS AUTORES

UNIDAD DIDACTICA I:
MAGNITUDES FISICAS
COMPETENCIA:

Opera correctamente magnitudes físicas escalares y vectoriales.

SESION DE APRENDIZAJE 1.1:
MAGNITUDES FÍSICAS FUNDAMENTALES Y DERIVADAS
COMPETENCIAS:

1. Reconoce las magnitudes físicas fundamentales y derivadas.
2. Identifica y define los procesos de medición directos e indirectos.
3. Empleando ecuaciones dimensionales, define las Unidades Fundamentales y derivadas de los cinco Sistemas de unidades coherentes más usuales: Internacional, C.G.S., Gravitacional o técnico, Inglés, e Inglés Técnico.

1.1.1) ¿Qué es la ciencia Física?

La ciencia Física es una motivación y un método. La motivación es encontrar la naturaleza fundamental de las cosas arrancándole sus secretos, empleando para tal fin el método científico: investigar sistemas y fenómenos naturales por medio de la experimentación y el análisis matemático.

Galileo fue quien desarrolló el moderno método de estudio de los sistemas naturales por medio de la medida experimental y el análisis matemático. Demostró que las leyes de la naturaleza (o al menos algunas de ellas) obedecen a ecuaciones matemáticas simples que relacionan propiedades medibles del fenómeno observado.

1.1.2) ¿Qué es una magnitud física?

Magnitud física es toda propiedad de la naturaleza, que permite describir un fenómeno físico, y que es susceptible de medición.

1.1.3) ¿Cómo se miden las magnitudes físicas?

A) Medida Directa: Es el procedimiento mediante el cual se compara la magnitud que se desea medir con otra de la misma especie denominada unidad de medida, y se establece cuantas veces el patrón esta contenido en la magnitud medida, el resultado de dicha comparación es la medida de la magnitud de interés la cual se expresa por un número seguido de la unidad correspondiente:

B).- Medida Indirecta: Es el procedimiento a través del cual se realizan medidas directas de diferentes magnitudes físicas, cuyos resultados se relacionan a través de una fórmula de definición para obtener la medida de la magnitud de interés. Las fórmulas empleadas corresponden a principios, leyes, teoremas, correlaciones empíricas, de la ciencias físicas y matemáticas.

1.1.4) ¿Qué son magnitudes derivadas y fundamentales?

Las **magnitudes fundamentales** son aquellas propiedades físicas que se definen únicamente por el método utilizado para su medición, no se definen en función de otras magnitudes o conceptos. Estas magnitudes son: longitud (L), masa (M), tiempo (T), temperatura absoluta θ), corriente eléctrica (I), cantidad de sustancia (S), intensidad luminosa (Y).

Las **magnitudes suplementarias**, son adimensionales y resultan de relacionar los arcos de circunferencia y superficies esféricas con el radio de la circunferencia y la esfera, respectivamente. Son: el radián y el estereorradián.

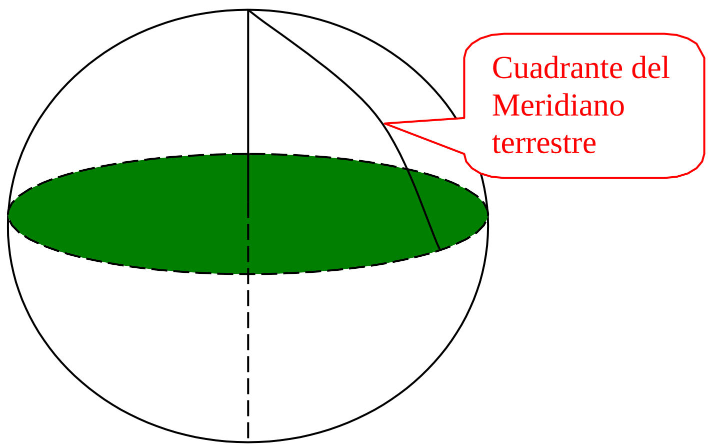
Las **magnitudes derivadas** como su nombre lo dice, se definen tomando como base a las magnitudes fundamentales, estas magnitudes son todas las demás. Son ejemplos de estas magnitudes las siguientes: área, volumen, densidad, presión, velocidad, aceleración, fuerza, potencia, trabajo, energía, etc.

Las unidades de medida de las magnitudes derivadas se definen en función de las unidades de magnitudes fundamentales.

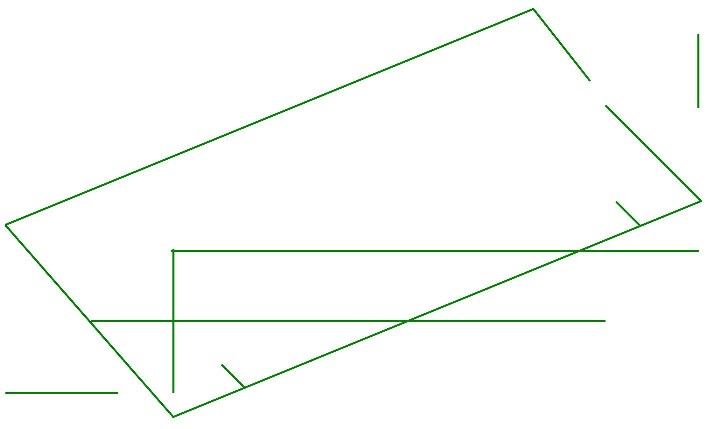
1.1.5) UNIDADES DE MEDIDA DE MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUPLEMENTARIAS:

Las unidades de las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de Unidades, están representadas en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sevres – Francia, mediante patrones que fueron definidos desde la época de la Revolución Francesa hasta nuestros días.

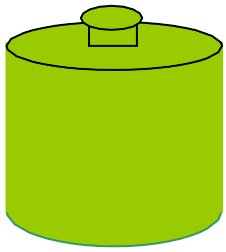
A) METRO PATRON: Es la unidad de medida de la magnitud de longitud, se definió originalmente como la diezmillonésima ava parte del cuadrante del meridiano terrestre.



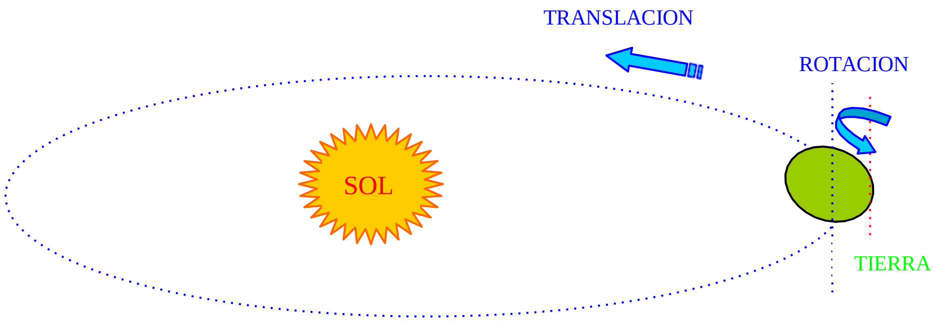
El metro patrón está representado en una barra de platino-iridio(10%).



B) EL KILOGRAMO PATRON: Es la unidad de medida de la magnitud de masa del Sistema Internacional de Unidades, se definió originalmente como la masa equivalente a la masa de un litro de agua destilada en condiciones normales de presión y temperatura. Está representado por un cilindro macizo de platino-iridio (10%).



C) EL SEGUNDO: Es la unidad de medida de la magnitud de tiempo del Sistema Internacional de Unidades. El día es el tiempo que tarda la Tierra en realizar una rotación alrededor de su eje. Si dividimos ese tiempo en ochenta y seis mil cuatrocientos partes iguales, cada una de esas partes equivale al segundo, como fue definido originalmente. La Tierra tarda 365,25 días en realizar una vuelta completa alrededor del Sol, en su movimiento de translación.



Las unidades antes mencionadas (Metro Kilogramo y segundo) se han redefinido sobre la base de las características de propiedades atómicas.

D) UNIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA: El Ampere (A), es la unidad de corriente eléctrica equivalente a una corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita, de sección rectangular despreciable y colocados a una distancia de un metro en el vacío, producirá entre ellos una fuerza igual a $2x10^{-7}$ (N/m).

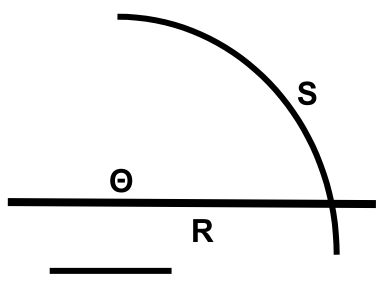
E) UNIDAD DE TEMPERATURA TERMODINAMICA: El Kelvin (K), es la unidad de temperatura termodinámica equivalente a la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

F) UNIDAD DE CANTIDAD DE SUSTANCIA: El Mol (mol), es la unidad de cantidad de sustancia equivalente a la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas unidades elementales como átomos en 0,012 (Kg) de Carbono-12.

G) UNIDAD DE INTENSIDAD LUMINOSA: La Candela (cd), es la unidad de intensidad luminosa equivalente a la intensidad luminosa, en dirección perpendicular, de una superficie de 1/600000 (m^2) de un cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino a la presión de 101325 (N/m^2).

H) EL RADIAN: La definición de radián se basa en el hecho que para un ángulo dado construido con vértice en el centro de una circunferencia, su medida es independiente del radio, y se comprueba que para un ángulo dado, la razón entre la longitud del arco subtendido dividido entre el radio de la circunferencia es una cantidad característica del ángulo, y directamente proporcional al mismo. Esta razón nos proporciona el valor del ángulo expresado en radianes.

$$\Theta = R\,S$$



TAREA 1.1: Investigue ¿Cómo se definen el metro, el kilogramo y el segundo sobre la base de propiedades atómicas?

SESION DE APRENDIZAJE 1.2: SISTEMAS DE UNIDAES COHERENTES MÁS USUALES

COMPETENCIAS:

1. Reconoce cinco sistemas de unidades fundamentales coherentes más usuales.
2. Expresa las magnitudes físicas en cualquiera de los sistemas de unidades coherentes más usuales.
3. Deduce la ecuación dimensional de cualquier magnitud física.
4. Utiliza la ecuación dimensional para definir la unidad de medida de cualquier magnitud física en cualquier sistema de unidades coherente.
5. Utiliza la ecuación dimensional para comprobar una fórmula dimensionalmente correcta.

1.2.1) SISTEMASDE UNIDADES COHERENTES MÁS USUALES:

Existen cinco sistemas de unidades coherentes, es decir aquellos sistemas de unidades vinculadas entre sí a través de las leyes y ecuaciones de la ciencia física, que se usan con mayor frecuencia en el ámbito científico y tecnológico. Son los que se presentan en la tabla que continúa.

SISTEMA	MAGNITUDES			
	LONGITUD	MASA	TIEMPO	FUERZA
SISTEMA INTERNACIONAL	METRO (m)	KILOGRAMO (Kg)	SEGUNDO (s)	NEWTON (N)
GIORGI	CENTÍMETRO (cm)	GRAMO (g)	SEGUNDO (s)	DINA (d)
GRAVITACIONAL O TÉCNICO	METRO (m)	UNIDAD TÉCNICA DE MASA (m)	SEGUNDO (s)	KILOGRAMO FUERZA (Kgf)
INGLES	PIE (p)	LIBRA MASA (Lbm)	SEGUNDO (s)	POUNDAL (Pdl)
INGLES TECNICO	PIE (p)	SLUG (Slg)	SEGUNDO (s)	LIBRA FUERZA (Lbf)

Entre las unidades especificadas, y otras no coherentes de uso frecuente, de cada especie, existen las siguientes equivalencias.

LONGITUD:

1 Centímetro (cm) = 0,01 (m).
1 Pié (p) = 0,3048 (m).
1 Yarda (Yd) = 0,9144 (m).
1 Kilómetro (Km) = 1000 (m).
1 Milla (mil) = 1609,3 (m).
1 Pulgada (pulg.) = 0,0254 (m).
1 Unidad Astronómica (UA) = 1,49e11 (m).
1 Año Luz (AL.) = 9,4602111e+15 (m).
1 Fermi (FM) = 1e-15 (m).

MASA:

1 Gramo (g) = 0,001 (Kg).
1 Unidad Técnica de Masa (UTM) = 9,81 (Kg).
1 Libra Masa (Lbm) = 0,45359 (Kg).
1 Slug (slg) = 14,594 (Kg).
1 Tonelada Métrica (TM) = 1000 (Kg).
1Unidad de Masa Atómica (uma) = 1,66e-27 (Kg).

TIEMPO:

1 Minuto (min.) = 60 (s).
1 Hora Solar Media (HSM) = 3600 (s).
1 Día Solar Medio (DSM) = 86400 (s).
1 Año (a) = 3,15576e+7 (s).

FUERZA:

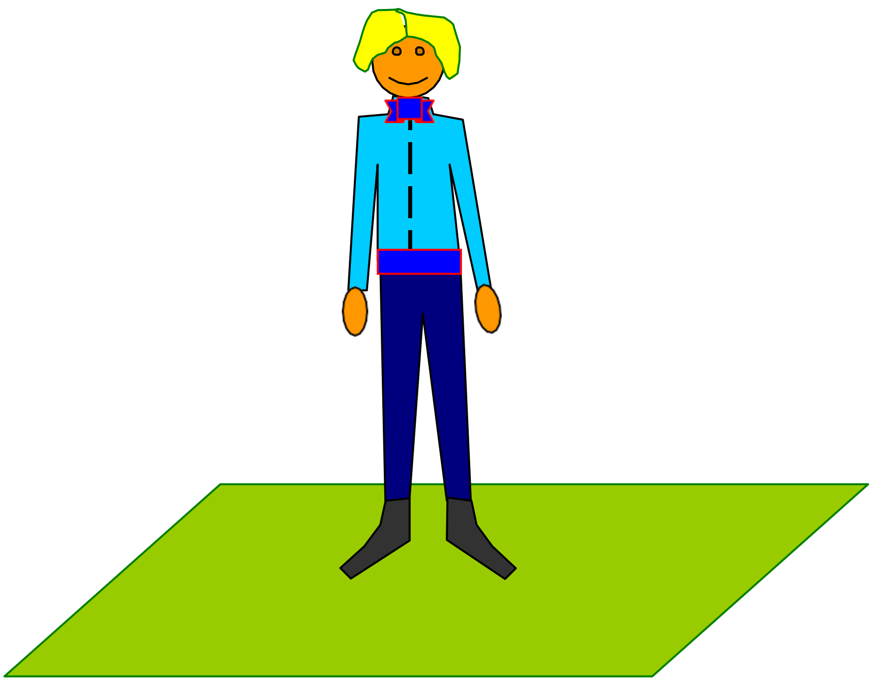
1 Dina (D) = 1e-5 (N).
1 Kilogramo Fuerza (Kgf) = 9,81 (N).
1 Poundal (Pdl) = 0,13826 (N).
1 Libra Fuerza (Lbf) = 4,4482 (N).

1.2.2) CONVERSIÓN DE UNIDADES:

Al tratar temas de ciencia y tecnología, debemos escoger el sistema de unidades de medida que se empleará para reportar los datos. Esto trae como consecuencia que la información que utilicemos, procedente de diferentes reportes científicos y tecnológicos, que no esté expresada en las unidades del sistema elegido por nosotros, tenga que ser convertida equivalentemente.
Se denomina **unidad de partida** a la unidad original que se desea convertir.
Se denomina **unidad de llegada** a la unidad en que se desea expresar la magnitud tratada.
Se denomina **fracción unitaria** a la razón entre cantidades equivalentes de una misma magnitud, cuyo numerador y denominador están expresados en las unidades de partida y las unidades de llegada.
Para convertir una magnitud de interés dada, se multiplica la unidad de partida por una fracción unitaria, elevadas ambas a la misma potencia, de modo tal que la unidad de partida se cancele con la misma unidad ubicada en la fracción unitaria.

Ejercicio: Un joven estudiante posee las siguientes características antropométricas:

Talla: 1,70 (m), Peso: 70 (Kg), Superficie corporal: 1,68 (m^2). Exprese estas magnitudes utilizando unidades del sistema inglés.



$$\text{Talla} = 1{,}70(\text{m})\left(\frac{1\text{p}}{0{,}3048\text{m}}\right) = 5{,}577(\text{p})$$

$$\text{Peso} = 70(\text{Kg})\left(\frac{1\text{lbm}}{0{,}45359\text{Kg}}\right) = 154{,}324(\text{lbm})$$

$$\text{SuperficieCorporal} = 1{,}68(\text{m}^2)\left(\frac{1\text{p}}{0{,}3048\text{m}}\right)^2 = 18{,}083(\text{p}^2)$$

1.2.3) ECUACIONES DIMENSIONALES:

Son expresiones matemáticas libres de coeficientes, que establecen la equivalencia dimensional entre las magnitudes derivadas y las fundamentales, las magnitudes fundamentales intervienen elevadas a potencias enteras; se obtienen a partir de las ecuaciones de definición, leyes, principios donde intervienen de las magnitudes derivadas sin hacer intervenir los coeficientes numéricos de las mismas. En estas ecuaciones la longitud se representa por (L), la masa por (M), el tiempo por (T).

Las ecuaciones dimensionales nos permiten: comprobar la concordancia dimensional de expresiones y ecuaciones que representan leyes físicas para verificar su validez, expresar las unidades de las magnitudes derivadas en función de las unidades de las magnitudes fundamentales, de sistemas coherentes de unidades.

Ejercicio: Obtenga las ecuaciones dimensionales de las siguientes magnitudes físicas a partir de las ecuaciones de definición indicadas.

a) V = e/t, V: velocidad, e: espacio, t: tiempo.

$$V = L/T$$

$$V = L.T^{-1}$$

b) Ec = $mV^2/2$, Ec: energía cinética, m: masa, V: velocidad.

$$Ec = M.\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

$$Ec = M.L^2.T^{-2}$$

c) Haciendo uso de las ecuaciones dimensionales exprese las unidades de la velocidad y la energía cinética en función de las unidades de las magnitudes fundamentales, para cada uno de los sistemas coherentes de unidades más usuales.

En el primer miembro de la ecuación dimensional en el lugar donde aparece representada la magnitud derivada colocar el símbolo correspondiente a la unidad de la magnitud derivada del sistema de interés, y en el segundo miembro de la ecuación dimensional, reemplazar los símbolos de las magnitudes fundamentales por los símbolos de las unidades correspondientes en el sistema de unidades elegido.

SISTEMA	**MAGNITUDES**	
	VELOCIDAD	**ENERGIA CINETICA**
SISTEMA INTERNACIONAL	($m.s^{-1}$)	JOULE = ($Kg.m^2.s^{-2}$)
GIORGI	($cm.s^{-1}$)	ERGIO = ($g.cm^2.s^{-2}$)
GRAVITACIONAL O TÉCNICO	($m.s^{-1}$)	KILOGRAMETRO = ($UTM..m^2.s^{-2}$)
INGLES	($p.s^{-1}$)	($Lbm.p^2.s^{-2}$)
INGLES TÉCNICO	($p.s^{-1}$)	($Slg..p^2.s^{-2}$)

TAREA 1.2: Investigue y sugiera un método para medir, a) el radio de la Tierra, b) la distancia desde la Tierra al sol, c) el radio del Sol.

SESION DE APRENDIZAJE 1.3: MAGNITUDES FÍSICAS ESCALARES Y VECTORES (I)

COMPETENCIAS:

1. Define una magnitud física, escalar y vectorial.
2. Interpreta geometricamente la suma y resta de magnitudes vectoriales.
3. Aplica el álgebra y la trigonometría en la suma y resta de dos vectores.
4. Compone y descompone vectores en sus componentes cartesianas rectangulares.
5. Suma y resta dos vectores descompuestos.

1.3.1) MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES:

Las magnitudes físicas también pueden clasificarse en magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

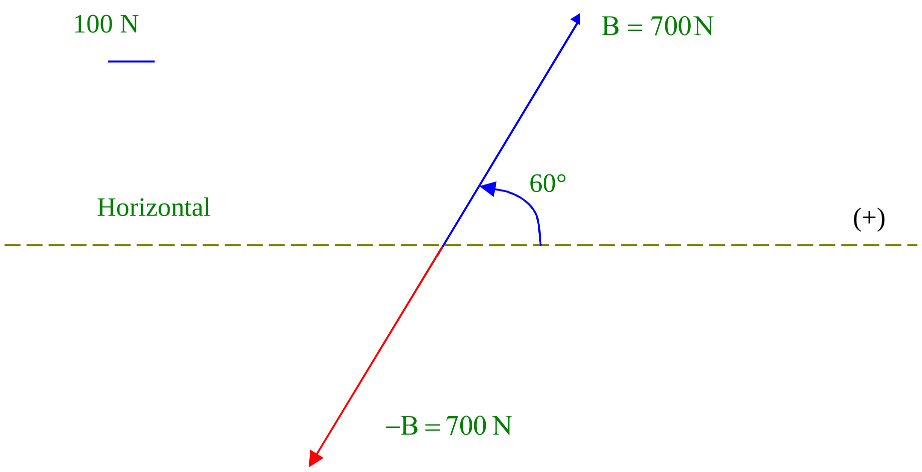
A) MAGNITUDES ESCALARES: Son aquellas magnitudes físicas que se especifican completamente indicando su módulo y la unidad de medida correspondiente. Son magnitudes escalares la masa, el volumen, la densidad, la presión, la energía, el trabajo, la temperatura, etc.

B) MAGNITUDES VECTORIALES: Son aquellas magnitudes físicas que se especifican completamente indicando el módulo y la unidad correspondiente, la dirección, el sentido y el punto de aplicación.

Las magnitudes vectoriales se representan literalmente mediante letras en negritas o con una flecha horizontal sobre ellas, la letra sin negritas o sin la flecha horizontal representa al módulo del vector. Su representación geométrica se realiza mediante el uso de flechas, dado que éstas poseen todas las propiedades de los vectores. Los vectores cuyo módulo es cero no tienen dirección ni sentido y se representan por un punto. El negativo de un vector es otro vector que posee el mismo origen, módulo y dirección pero sentido opuesto al original.

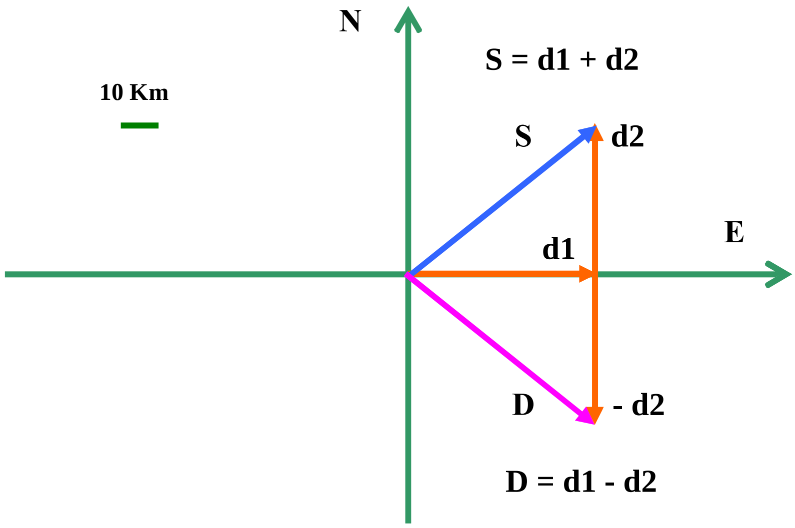
Son ejemplos de magnitudes vectoriales la fuerza, la velocidad, la aceleración, el momento de torsión, la intensidad de campo eléctrico, la intensidad de campo magnético, etc.

Ejercicio: Represente literal y gráficamente un vector fuerza cuyo módulo es de 400 (N), orientado en la dirección que forma un ángulo de 60° (antihorario), con el sentido positivo de la dirección horizontal (hacia la derecha). Represente también el negativo del vector fuerza. Indique en el gráfico la escala longitudinal con que se han representado los módulos de los vectores fuerza y la dirección horizontal de referencia.



En la presente sección trataremos con vectores coplanares. (se encuentran localizados en el mismo plano), Las operaciones algebraicas vectoriales más usuales y que serán utilizadas en el presente texto son: composición y descomposición vectorial, suma, diferencia, producto de una magnitud escalar por un vector, producto escalar de vectores, producto vectorial de vectores.

1.3.2) SUMA Y RESTA GEOMETRICA DE VECTORES: Los vectores desplazamiento son distancias orientadas. Si una persona debe realizar un desplazamiento d1 = 10 (Km) en la dirección Este y luego un desplazamiento d2 = 8 (Km) en la dirección Norte, el desplazamiento suma, **S** = **d1** + **d2**, se obtiene geométricamente dibujando una flecha de longitud proporcional a 10 (Km) apuntando hacia dirección Este que representa al vector **d1** y luego a continuación ubicar otra flecha de longitud proporcional a 8 (KM) apuntando en la dirección Norte que representa al vector **d2**, el vector suma **S**, es la flecha orientada desde el origen del vector **d1** hacia el extremo positivo del vector **d2**.



Si deseamos obtener geométricamente el vector diferencia **D** = **d1** – **d2**, al vector desplazamiento **d1** le sumaremos el negativo del vector **d2**, lo cual se obtiene dibujando una flecha proporcional a 10 (Km) apuntando a la dirección Este que representa al vector **d1**, a continuación dibujamos una flecha de longitud proporcional a 8 (Km) apuntando a la dirección sur que representa al del vector **- d2**, el vector diferencia **D** es la flecha orientada desde el origen del vector **d1** hacia el extremo positivo del vector **– d2**.
Cuando se conocen los módulos d1 y d2, de los vectores **d1** y **d2**, y el ángulo α formado por las direcciones positivas de ambos vectores. El módulo del vector suma (**S**), y el ángulo θ que éste forma con el primer sumando (**d1**), se obtienen mediante las relaciones siguientes.

$$S = \sqrt{d1^2 + d2^2 + 2\ d1\ d2\ \cos\ \alpha}$$

$$\Theta = \operatorname{acos}\left(\frac{d1 + d2\cos\alpha}{S}\right)$$

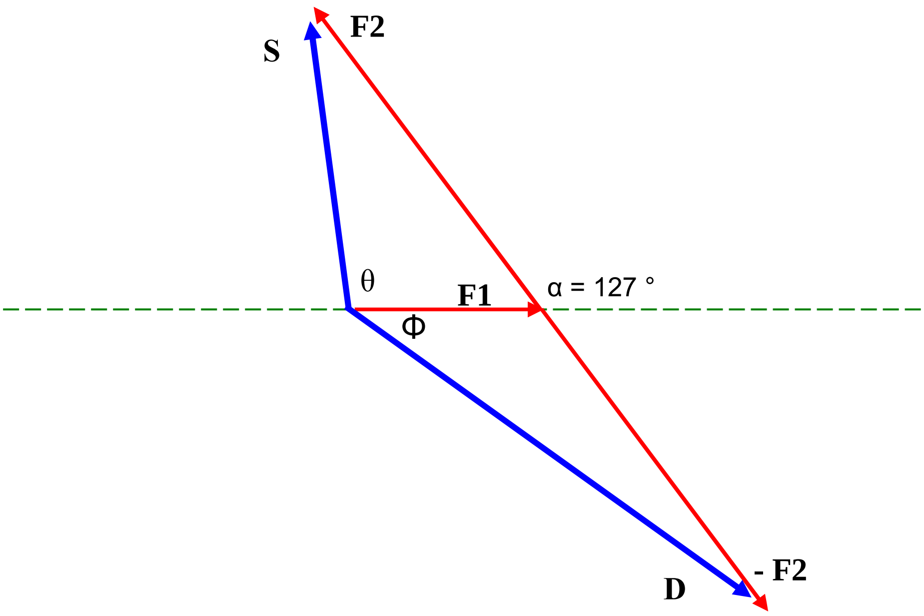
El módulo del vector diferencia (**D**), y el ángulo Φ que éste forma con el vector minuendo (**d1**), se obtienen mediante las relaciones siguientes.

$$D = \sqrt{d1^2 + d2^2 - 2\ d1\ d2\ \cos\ \alpha}$$

$$\Phi = \operatorname{acos}\left(\frac{d1 - d2\ \cos\alpha}{D}\right)$$

EJERCICIO: Dos vectores fuerza cuyos módulos son F1 = 100 (N) y F2 = 200 (N), forman un ángulo α = 127 ° con sus direcciones positivas.

a) Confeccione un diagrama donde se represente geométricamente, la suma **S** = **F1** + **F2**, y la diferencia **D** = **F1** – **F2**.



b) Obtenga el módulo del vector suma (**S**), y el ángulo Θ que éste forma con el primer sumando (**F1**).

$$S = \sqrt{F1^2 + F2^2 + 2\,F1\,F2\cos\alpha} = \sqrt{(100\,N)^2 + (200\,N)^2 + 2(100\,N)(200\,N)\cos(127°)}$$

$$S = 161{,}0\ (N)$$

$$\Theta = \operatorname{acos}\left(\frac{F1 + F2\cos\alpha}{S}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{100\,N + 200\,N\cos 127°}{161{,}0\,N}\right) = 97°15'\,58''$$

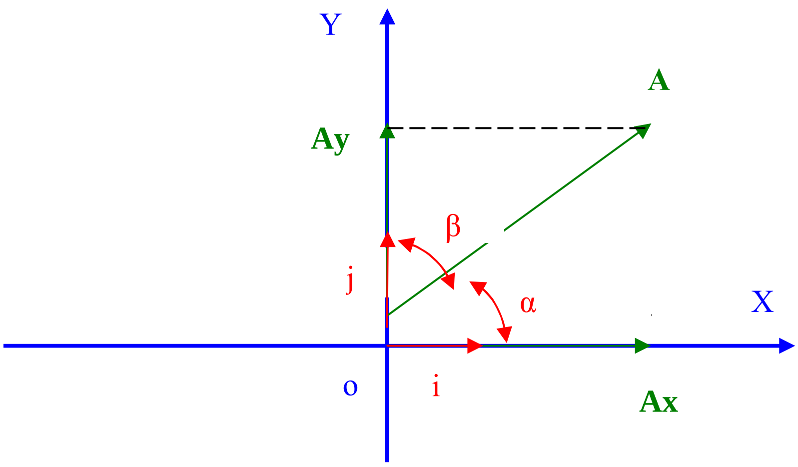
c) Obtenga el módulo del vector diferencia (**D**), y el ángulo Φ que éste forma con el vector minuendo (**F1**).

$$D = \sqrt{F1^2 + F2^2 - 2\,F1\,F2\cos\alpha} = \sqrt{(100N)^2 + (200\,N)^2 - 2(100\,N)(200\,N)\cos(127°)}$$

$$D = 272{,}2\ (N)$$

$$\Phi = \operatorname{acos}\left(\frac{F1 - F2\cos\alpha}{D}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{100\,N - 200\,N\cos 127°}{272{,}2\,N}\right) = 35°\,56'\,48''$$

1.3.3) DESCOMPOSICIÓN Y COMPOSICIÓN VECTORIAL: Los vectores serán representados en el plano cartesiano manteniendo su punto de aplicación coincidente con el origen del sistema de coordenadas "o", como se indica en el esquema adjunto



En este esquema, el vector "**A**" forma un ángulo "α" con el semieje positivo X^+, un ángulo "β" con el semieje positivo Y^+, estos ángulos se denominan ángulos directores del vector. Un vector unitario orientado en el sentido positivo del eje "X" se representa por "**i**", el correspondiente vector unitario orientado en el sentido positivo del semieje "Y" se representa por "**j**"

La descomposición de un vector "**A**", conociendo el módulo del vector y los ángulos directores "α" y "β", es una operación vectorial que consiste en hallar dos vectores "**Ax** = Ax **i**" y "**Ay** = Ay **j**", orientados en las direcciones de los ejes "X" e "Y", respectivamente, denominados componentes cartesianas o rectangulares del vector, cuya resultante es igual al vector "**A**". Considerando la geometría del esquema anterior, resultan las siguientes expresiones para los módulos de las componentes cartesianas del vector **A.**

$$Ax = A\cos\alpha$$

$$Ay = A\cos\beta$$

Los ángulos directores cumplen la relación

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$$

Teniendo en consideración que todo vector orientado en la dirección "X" se expresa como el producto de su módulo por el vector unitario "**i**", y que todo vector orientado en la dirección "Y" se expresa como el producto de su módulo por el vector unitario "**j**", el vector "**A**" descompuesto queda expresado del modo siguiente.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$$

$$\mathbf{A} = Ax\,\mathbf{i} + Ay\,\mathbf{j}$$

La composición vectorial es la operación vectorial inversa a la descomposición, que parte del conocimiento de las componentes cartesianas del vector para obtener el módulo del vector y los ángulos directores "α" y "β" que forma el vector con los semiejes positivos X^+ y Y^+, respectivamente.

Considerando la geometría del esquema anterior, obtenemos la siguientes expresiones para realizar la composición del vector "**A**".

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{Ax^2 + Ay^2}$$

$$\cos\beta = \frac{Ay}{Ax^2 + Ay^2}$$

Ejercicio: Un vector fuerza "**F**", cuyo módulo es F = 70 (N), forma un ángulo antihorario α = 120°con el semieje positivo X^+.

a) calcule el ángulo director β.

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \cos^2(120°)} = 0{,}866025$$

$$\beta = \cos^{-1}(0{,}866025) = 60°$$

b) determine el valor de las componentes cartesianas del vector "**F**", y exprese el vector "**F**" en función de ellas.

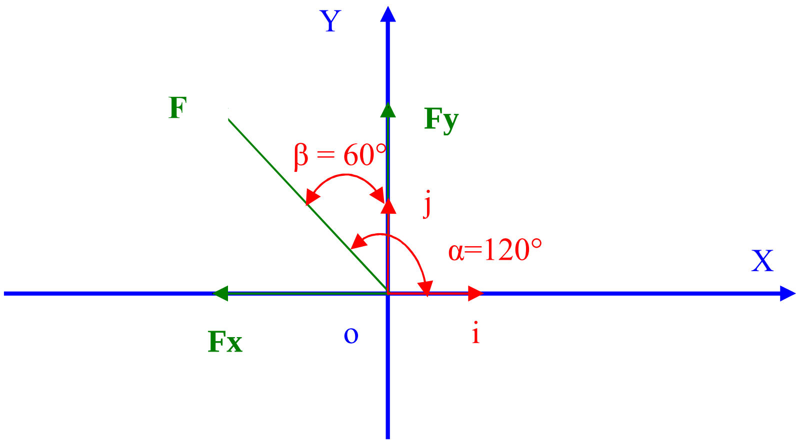
$$Fx = F.\cos\alpha = 70(N)\cos(120°) = 70(N)(-0{,}5) = -35(N)$$

$$Fy = F.\cos\beta = 70(N)\cos(60°) = 70(N)0{,}8660 = 60{,}62(N)$$

el vector **F** expresado en función de sus componentes cartesianas es

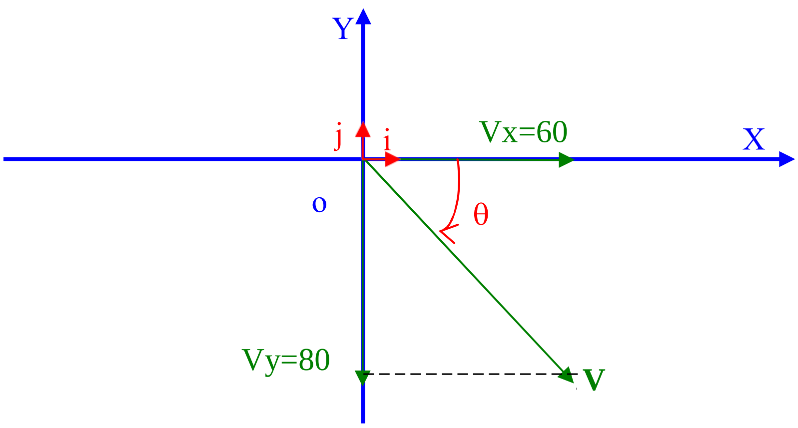
$$\mathbf{F} = -35\mathbf{i} + 60{,}62\,\mathbf{j}\ (N)$$

c) Represente el vector “**F**” en el plano cartesiano.



Ejercicio: Un vector velocidad “**V**” descompuesto, se expresa por **V** = 60**i** – 80**j** (Km/h).

a) Grafique el vector velocidad “**V**”, en el plano cartesiano.



b) Obtenga el módulo del vector velocidad.

$$V = \sqrt{60^2 + 80^2}\ \text{(Km/h)} = 100\text{(Km/h)}$$

c) obtenga el valor del ángulo "θ", que forma el vector velocidad con el semieje positivo X^{+}.

$$tg(\theta) = \frac{Vy}{Vx} = \frac{-80(Km/h)}{60(Km/h)} = -1{,}333333$$

$$sen\ (\theta) = \frac{Vy}{V} = \frac{-80(Km/h)}{100(Km/h)} = -0{,}8$$

$$cos\ (\theta) = \frac{Vx}{V} = \frac{60(Km/h)}{100(Km/h)} = -0{,}6$$

El ángulo que satisface los valores de las funciones trigonométricas antes calculadas corresponde a θ = - 53°.

1.3.4) SUMA DE VECTORES: Dados dos o más vectores, expresados en componentes cartesianas,

$$\mathbf{A1} = A1x\mathbf{i} + A1y\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A2} = A2x\mathbf{i} + A2y\mathbf{j}$$
$$..............................$$
$$\mathbf{An} = Anx\mathbf{i} + Any\ \mathbf{j}$$

Las componentes X e Y del vector suma "**S**", son iguales a la suma de las componentes correspondientes de los vectores sumando, tal que.

$$Sx = Ax1 + Ax2 + ... + Axn$$

$$Sy = Ay1 + Ay2 + ... + Ayn$$

$$\mathbf{S} = Sx\mathbf{i} + Sy\ \mathbf{j}$$

1.3.5) DIFERENCIA DE VECTORES: Dados dos vectores "**A**" y "**B**", expresados en función de sus componentes cartesianas.

$$\mathbf{A} = Ax\mathbf{i} + Ay\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = Bx\mathbf{i} + By\mathbf{j}$$

Las componentes X e Y del vector diferencia **D** = **A** - **B**, son iguales a la diferencia de las componentes correspondientes del minuendo menos aquellas del sustraendo, tal que.

$$Dx = Ax - Bx$$

$$Dy = Ay - By$$

$$\mathbf{D} = Dx\mathbf{i} + Dy\,\mathbf{j}$$

Ejercicio: Dados los vectores **A** = 10**i** + 15**j**, **B** = -15**i** + 10**j**.

a) Obtenga el vector suma **S** = **A** + **B**.

$$Sx = Ax + Bx = 10 + (-15) = -5$$

$$Sy = Ay + By = 15 + 10 = 25$$

$$\mathbf{S} = Sx\mathbf{i} + Sy\,\mathbf{j} = -5\mathbf{i} + 25\,\mathbf{j}$$

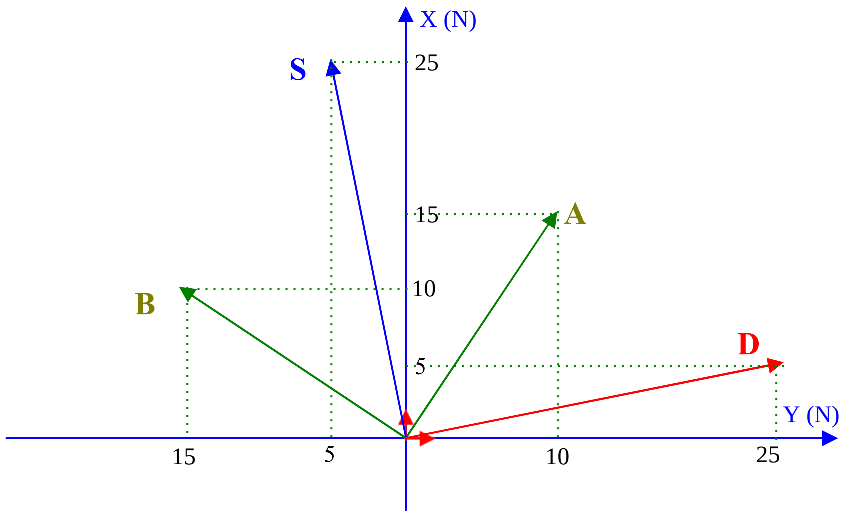
b) Obtenga el vector diferencia **D** = **A** – **B**.

$$Dx = Ax - Bx = 10 - (-15) = 25$$

$$Dy = Ay - By = 15 - 10 = 5$$

$$\mathbf{D} = Dx\mathbf{i} + Dy\,\mathbf{j} = 25\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$$

los vectores **A**, **B**, **S** y **D**.



TAREA 1.3: Responda las siguientes preguntas:

P:01) Tres astronautas salen de Cabo Cañaveral, fueron a la Luna y regresaron acuatizando en el Océano Pacífico. Un almirante los despidió en el Cabo y después zarpó al Océano Pacífico en un portaaviones, en el que los recogió. Considerando sus respectivos viajes, ¿Quién tuvo el vector desplazamiento más grande, los astronautas o el almirante?

P:02) ¿Pueden combinarse dos vectores de magnitudes diferentes para dar una resultante nula? ¿Pueden hacerlo tres vectores?

P:03) ¿Puede un vector tener módulo cero si una de sus componentes no es nula?

P:04) Si tres vectores se suman dando una resultante nula; demuestre que los vectores se encuentran en el mismo plano.

P:05) ¿Tiene unidades un vector unitario?

P:06) Mencione varias cantidades escalares. ¿Depende el valor de un escalar del sistema de coordenadas seleccionado?.

SESION DE APRENDIZAJE 1.4: MAGNITUDES FÍSICAS: ESCALARES Y VECTORES (II)

COMPETENCIAS:

1) Realiza la operación del producto de una magnitud escalar por un vector.
2) Realiza el producto escalar de dos vectores.
3) Realiza el producto vectorial de dos vectores.

1.4.1) PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR: Cuando se tiene un vector expresado en función de sus componentes cartesianas; por ejemplo

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j}$$

el producto de este vector **A** por una magnitud escalar K, da como resultado otro vector **C** que tiene las misma dirección y sentido que el vector **A** y su módulo es K veces el módulo del vector **A**. Las componentes cartesianas del vector producto (**C**), se obtienen multiplicando las componentes cartesianas del vector **A** por el escalar K.

$$\mathbf{C} = K\ \mathbf{A}$$

$$Cx = K\ Ax$$

$$Cy = K\ Ay$$

$$\mathbf{C} = Cx\mathbf{i} + Cy\ \mathbf{j}$$

Ejercicio: dado un vector fuerza **F** = 80 **I** + 60 **j** (N).

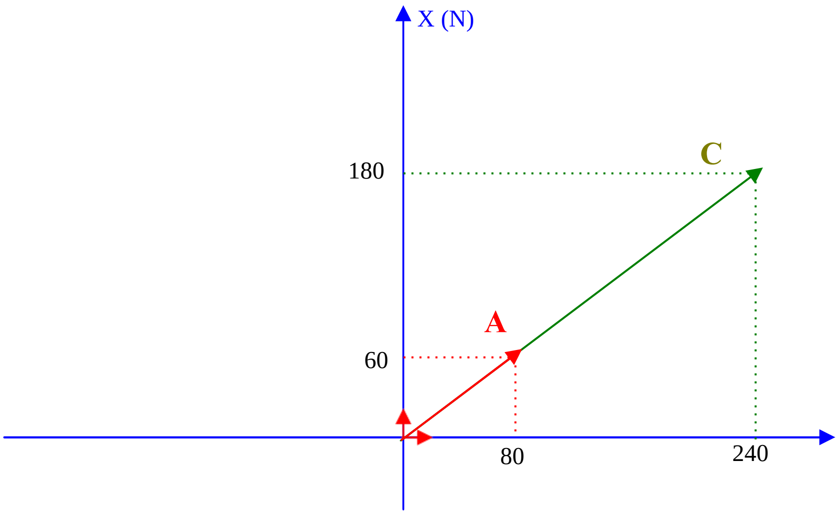
a) Multiplique este vector por la constante adimensional K = 3, y denomine **F1** al nuevo vector.

$$Cx = K\ Ax = 3x80(N)=240(N)$$

$$Cy = K\ Ay = 3x60(N) = 180\ (N)$$

$$\mathbf{C} = 240\ \mathbf{i} + 180\ \ \mathbf{j}\ \ (N)$$

b) Grafique los vectores **A** y **C** en un sistema de coordenadas cartesiano.



1.4.2) PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES: Dados dos vectores **A** y **B**, cuyas direcciones positivas forman un ángulo α, el producto escalar de ambos vectores representado por **A**O**B**, se define como el producto de los módulos de ambos vectores y el coseno del ángulo α.

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = A.B.\cos\alpha$$

De esta definición se concluye que el producto escalar de dos vectores perpendiculares entre si (α=90°) es igual cero, y alcanza su máximo valor cuando los vectores son paralelos (α=0°).
Cuando los vectores que intervienen en el producto escalar están expresados en sus componentes cartesianas.

$$\mathbf{A} = Ax\,\mathbf{i} + Ay\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{B} = Bx\,\mathbf{i} + By\,\mathbf{j}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = Ax\,Bx + Ay\,By$$

Ejercicio: Dados los vectores **A** y **B**, cuyos módulos son A = 100 (N) y B = 20 (m). Determine el producto escalar de los vectores cuando el ángulo que forman sus direcciones positivas es:

a) α=0°.

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B} = A.B\cos(\alpha) = 100(N)20(m)\cos(0°) = 100(N)20(m)1 = 2000\ (N.m)$$

b) α=60°.

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B} = A.B\cos(\alpha) = 100(N)20(m)\cos(60°) = 100(N)20(m)0{,}5 = 1000\ (N.m)$$

c) α=90°.

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B} = A.B.\cos(\alpha) = 100(N)20(m)\cos(90°) = 100(N)20(m)0 = 0\ (N.m)$$

d) α=120°.

$$\mathbf{A}o\mathbf{B} = A.B.\cos(\alpha) = 100(N)20(m)\cos(120°) = 100(N)20(m)(-0,5) = -1000(N.m)$$

e) α=180°.

$$\mathbf{A}o\mathbf{B} = A.B\cos(\alpha) = 100(N)20(m)\cos(180°) = 100(N)20(m)(-1) = -2000(N.m)$$

Ejercicio: Dados un vector desplazamiento **d** = 1000 **i** + 2000 **j** (m) y un vector fuerza **F** = 50 **i** + 5 **j** (N).

a) Calcule el trabajo mecánico (W) realizado por la fuerza, si este se define por la expresión: W = **d** o **F.**

$$\mathbf{d} = 1000\,\mathbf{i} + 2000\,\mathbf{j}\ (m)$$
$$\mathbf{F} = 50\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}\ (N)$$

- -

$$W = \mathbf{d}\,o\,\mathbf{F} = 50000\ (mN) + 10000\ (m\,N) = 60000\ (m\,N)$$
$$W = 60000\ (J)$$

b) Calcule el módulo de los vectores **d** y **F**.

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(1000m)^2 + (2000m)^2} = 2236\ (m)$$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(50N)^2 + (5N)^2} = 50,25\ (N)$$

c) Calcule el ángulo α formado por los vectores **d** y **F**.

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{\mathbf{d}o\mathbf{F}}{d\ F}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{60000\ m\,N}{2236\ m\ 50,25\,N}\right) = 57,72°$$

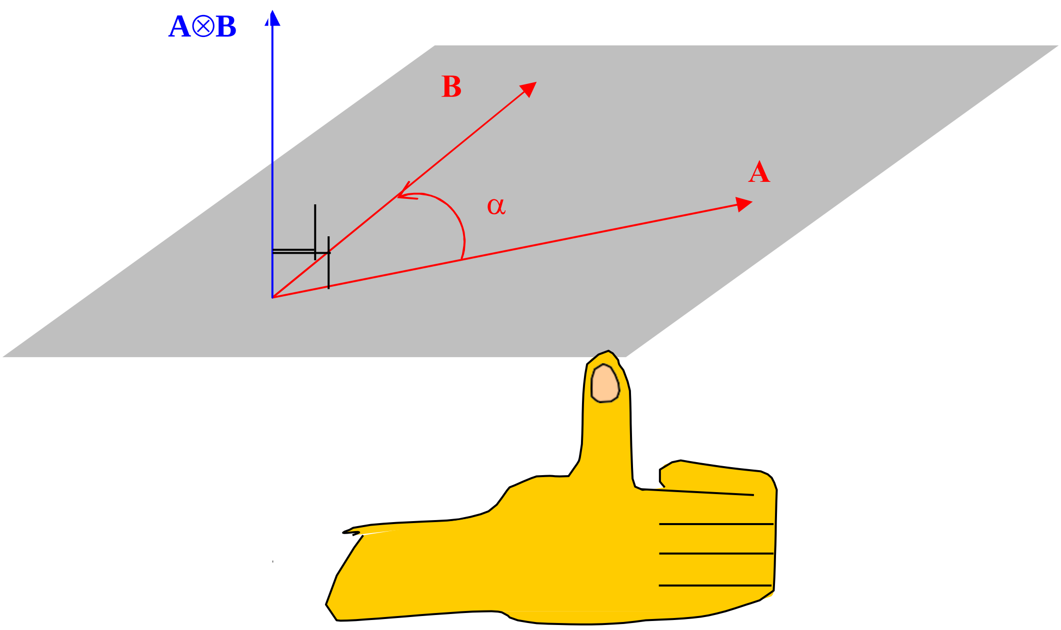
1.4.3) PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES: Dados dos vectores **A** y **B**, cuyas direcciones positivas forman un ángulo α, el producto vectorial de ambos vectores representado por **A**⊗**B**, es otro vector cuyo módulo se determina por el producto de los módulos de ambos vectores y el seno del ángulo α.

$$\left| \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \right| = A.B.\text{sen}\,(\,\alpha\,)$$

De esta definición se concluye que el módulo del producto vectorial de dos vectores paralelos (α=0°) es igual cero, y alcanza su máximo valor cuando los vectores son perpendiculares entre sí (α=90°).

La dirección del producto vectorial es perpendicular al plano formado por los dos vectores

Su sentido se determina por la regla de la mano derecha, la cual se expresa del siguiente modo: "Se extiende la palma de la mano derecha a lo largo del primer factor vectorial del producto, de modo tal que la palma se cierre subtendiendo un ángulo diedro α **desde el primer factor vectorial hacia el segundo factor vectorial del producto, el sentido indicado por el dedo pulgar es el sentido del vector producto vectorial".** Vea el esquema siguiente.



Ejercicio: Dos vectores **A** y **B**, cuyos módulos son A = 100 (N) y B = 20 (m), se multiplican vectorialmente. Determine el módulo del producto vectorial de los vectores, cuando el ángulo α que forman sus direcciones positivas es:

a) α=0°.

$$\left|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right| = A.B.sen(\alpha) = 100(N)20(m)sen(0°) = 100(N)20(m)0 = 0\ (Nm)$$

b) α=30°.

$$\left|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right| = A.B.sen(\alpha) = 100(N)20(m)sen(30°) = 100(N)20(m)0{,}5 = 1000(Nm)$$

c) α=90°.

$$\left|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right| = A.B.sen(\alpha) = 100(N)20(m)\,sen(90°) = 100(N)20(m)1 = 2000\ (Nm)$$

d) α=150°.

$$\left|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\right| = A.B.sen(\alpha) = 100(N)20(m)sen(150°) = -1000(NM)$$

e) α=180°.

$$\left|A\otimes B\right| = A.B.sen(\alpha) = 100(N)20(m)sen(180°) = 0(NM)$$

Cuando los vectores **A** y **B** están representados en función de sus componentes cartesianas.

$$\mathbf{A} = Ax\mathbf{i} + Ay\,\mathbf{j} + Az\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = Bx\mathbf{i} + By\,\mathbf{j} + Bz\mathbf{k}$$

El producto vectorial de ambos vectores **A**⊗**B**, se obtiene calculando el determinante siguiente:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

La expresión resultante para el producto vectorial será

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (AyBz - By\ Az)\mathbf{i} - (AxBz - Bx\ Az)\ \mathbf{j} + (AxBy - Bx\ Ay)\mathbf{k}$$

Ejercicio: Dado el vector, **r**, vector de posición del punto de aplicación del vector fuerza **F**:

$$\mathbf{r} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \text{(m)}$$

$$\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 50\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{(N)}$$

a) Determine el vector producto vectorial **r**⊗**F**, denominado torque.de la fuerza **F.**

$$\mathbf{r} \otimes \mathbf{F} = (3x(-10) - 50x(-2))\mathbf{i} - (7x(-10) - 20x(-2))\mathbf{j} + (7x50 - 20x3)\mathbf{k} \text{ (m.N)}$$

$$\mathbf{r} \otimes \mathbf{F} = 70\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 290\mathbf{k} \text{ (m.N)}$$

b) Determine los módulos de los vectores **r**, **F** y **C** = **r**⊗**F**.

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = (7)^2 + (3)^2 + (-2)^2 \text{ (m)} = 7{,}874 \text{ (m)}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(20)^2 + (50)^2 + (-10)^2} \text{(N)} = 54{,}772 \text{ (N)}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{(70)^2 + (30)^2 + (290)^2} \text{(m N)} = 299{,}833 \text{ (m N)}$$

c) Determine el ángulo formado por los vectores **r** y **F**.

Aplicamos la expresión para obtener el módulo del vector producto vectorial, de la cual despejamos el ángulo α formado por las direcciones positivas de los vectores factores del producto vectorial.

$$\alpha = \text{asen}\left(\frac{C}{r\,F}\right) = \text{asen}\left(\frac{299{,}833(\text{mN})}{7{,}874(\text{m})54{,}772\ (\text{N})}\right) = 44{,}045°$$

TAREA 1.4: Responda las siguientes preguntas.

P:01) ¿Se pueden aplicar las leyes conmutativa y asociativa a la resta de vectores?

P:02) ¿Puede ser negativo un producto escalar?

P:03) Si **A** o **B** = 0, ¿se deduce de ello que **A** y **B** son perpendiculares entre sí?

P:04) Si **A** o **B** = **A** o **C**, ¿ se deduce de ello que necesariamente **B** = **C**?

P:05) Si **A** ⊗ **B** = **0**, ¿deben ser **A** y **B** paralelos entre sí?

P:06) Si **A** ⊗ **B** ≠ **0**, ¿deben ser **A** y **B** perpendiculares entre sí?

P:07) ¿Debe especificar un sistema de coordenadas cuando, a) sume dos vectores, b) determine su producto escalar, c) determine su producto vectorial, d) calcule sus componentes cartesianas?

EJERCICIOS PROPUESTOS:

E:01.- Una señorita posee una masa corporal mc = 60 Kg, talla T = 1,65 (m) y una superficie corporal Sc = 1,6525 (m^2). Exprese estas magnitudes en unidades de los sistemas.

a) CGS.
b) Gravitacional o técnico.
c) Inglés.
d) Inglés técnico.

E:02.- Convierta las siguientes magnitudes físicas

a) 1000 (Kg./m^3) ---- (g/cm^3)
b) 1000 (Kg/m^3)------ (UTM/m^3).
c) 1000 (Kg/m^3) ----- (lbm/p^3).
d) 1000 (kg/m^3) ------- (Slg/p^3).
e) 101293 (N/m^2) ------ (D/cm^2)
f) 101293 (N/m^2)----- (Kgf/m^2i)).
g) 101293 (N/m^2) ----- (Pdl/p^2).
h) 101293 (N/m^2) ----- (lbf/p^2).
i) 149’000000 (Km) --- (m)
j) 149’000000 (Km) ---- (cm)

k) 149’000000 (Km)---- (p) l) 149’000000 (Km) ---- (plg).
m) 149’000000 (Km) ---- (UA) n) 149’000000 (Km) ---- (AL).

E:03.- Las ecuaciones que se expresan a continuación expresan leyes de la ciencia física:
V = **d**/t; **a** = **v**/t; **F** = m **a**; W = F d cos(α), Pot = W/t.
d: desplazamiento recorrido por el móvil.
t: tiempo empleado
v: velocidad de un móvil.
a: aceleración del cuerpo.
m: masa del cuerpo.
F: fuerza resultante externa qué actúa sobre el cuerpo.
d: módulo del desplazamiento recorrido por el cuerpo.
α: ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento.
Pot: potencia desplegada.

MAGNITUD	ECUAC. DE DEFIN.	ECUAC. DIMEN.	UNIDADES DE MEDIDA				
			SI	CGS	GRAVIT. O TECNICO	INGLES	INGLES TÉCNICO

a) Determine las ecuaciones dimensionales de las magnitudes físicas representadas.

b) Exprese las unidades de las magnitudes para cada sistema de unidades, resumir los resultados en una tabla como la indicada.

E:04.- Dados los vectores fuerza cuyos módulos forman los siguientes ángulos respecto al eje X^+ de un sistema de coordenadas cartesiano: F1 = 70 (N) y α1 = 60°; F2 = 50 (N) y α2 = 150°; F3 = 100 (N) y α3 = -120°.

a) Determine el ángulo director, β, que forma cada vector con el semieje Y^+

b) Descompón los vectores en sus componentes cartesianas.

c) Grafique los vectores en el plano cartesiano.

E:05.- Dados los siguientes vectores: **A** = 30 **i** + 40 **j** (N); **B** = -50 **i** - 70 **j** (N); **C** = -120 **i** + 40 **j** (N); **D** = 60 **i** - 20 **j** (N). Efectúe las siguientes operaciones vectoriales:

a) Grafique los vectores en el plano cartesiano.

b) Efectúe la composición vectorial de los vectores, determinando su módulo y los ángulos directores α y β que forman los vectores con los semiejes X^+ e Y^+, respectivamente.

E:06.- Dados los siguientes vectores: **A** = 40 **i** + 30 **j** (N); **B** = -70 **i** - 50 **j** (N); **C** = -40 **i** + 120 **j** (N); **D** = 20 **i** - 60 **j** (N). Efectúe las siguientes operaciones vectoriales

a) **A** + **B** – **C** – **D**   b) 10 **A** – 5 **B** + 3 **D**

c) **A** o **B**   d) **C** ⊗ **D.**

E:07.- Calcule el producto escalar del vector fuerza cuyo módulo es F = 100 (N) y del vector desplazamiento cuyo módulo es d = 1000 (m); cuando el ángulo α que forman sus direcciones positivas es:

a) α = 0°   b) α = 60°   c) α = 90°

d) α = 120°   e) α = 150°   f) α = 180°

E:08.- Calcule el módulo del producto vectorial del vector de posición cuyo módulo es r = 5 (m), y del vector fuerza cuyo módulo es F = 100 (N); cuando el ángulo α que forman sus direcciones positivas es:

a) α = 0°   b) α = 60°   c) α = 90°

d) α = 120°   e) α = 150°   f) α = 180°

E:09.- Dados el vector desplazamiento **d** = 1000 **i** + 3000 **j** (m) y el vector fuerza **F** = 100 **i** - 30 **j** (N).

a) Calcule el producto escalar de ambos vectores.
b) Calcule los módulos de los vectores **d** y **F**.
c) Determine el ángulo α formado por las direcciones positivas de los vectores **d** y **F**.

E:10.- Dados un vector fuerza **F** = 100 **i** + 300 **j** (N), aplicado en un punto de un cuerpo cuyo vector de posición es **r** = 3 **i** + 4 **j** (m).
a) Calcule el vector producto vectorial **τ** = **r** ⊗ **F**, denominado momento o torque de la fuerza respecto al origen del sistema de coordenadas.
b) Calcule el módulo de los vectores **r**, **F, τ**.
c) Determine el ángulo α que forman las direcciones positivas de los vectores **r** y **F**.
d) Obtenga un vector unitario **μ** en la dirección del vector torque **τ**.

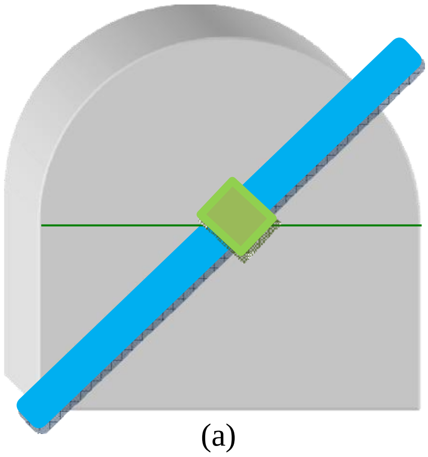
PRACTICA # 01: MEDICION INDIRECTA DE UNA DISTANCIA

I) OBJETIVOS:

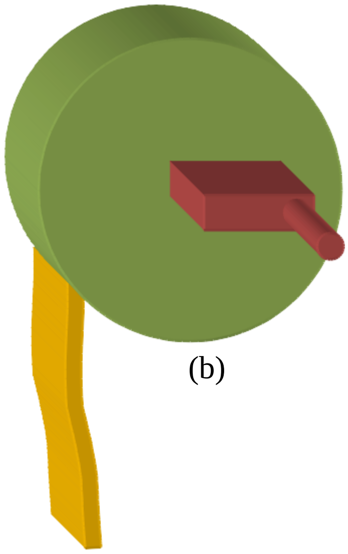
Medir la distancia de un objeto distante (barco) a una base de 20 (m) de longitud aproximada, empleando una técnica indirecta de medición denominada triangulación.

II) MATERIAL Y EQUIPO:

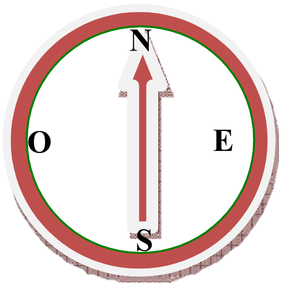
- Transportador con mira de visualización, para medir ángulos entre dos direcciones seleccionadas (a).
- Wincha metálica de 50 (m), (b).
- Brújula, (c).



(a)



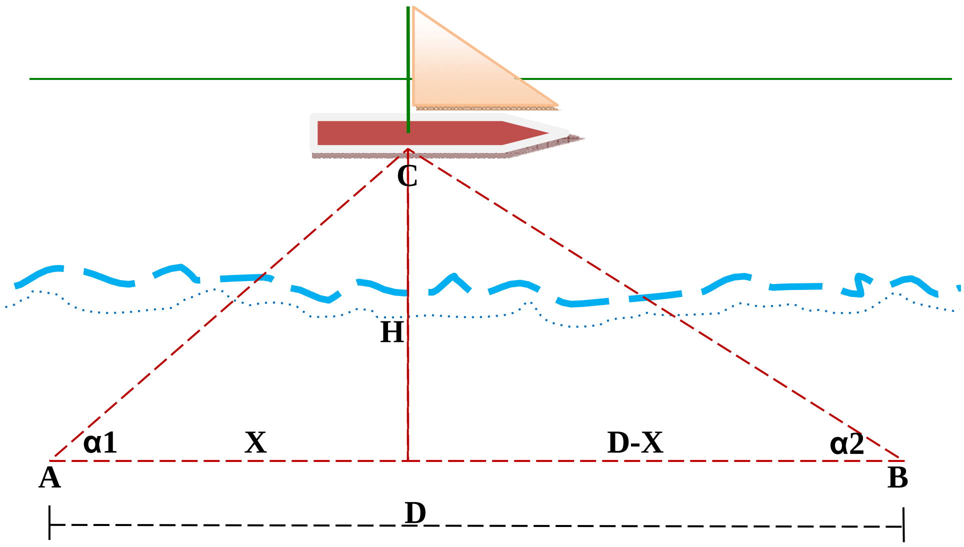
(b)



(c)

III) FUNDAMENTO TEORICO:

Considerando el esquema mostrado en la figura adjunta, la medición de la distancia (H), desde el barco perpendicularmente hasta la base A-B, de longitud D, se puede expresar en función de elementos de los triángulos formados, de fácil medición para un observador ubicado en la base A-B: longitud D (distancia entre los puntos A y B de la base), ángulos de paralaje $\alpha 1$ y $\alpha 2$ del objeto observado respecto al segmento de recta A-B, en los puntos de observación A y B respectivamente.



A partir del esquema se deducen las siguientes relaciones

$$ctg(\alpha 1) = \frac{X}{H} \qquad (1)$$

$$ctg(\alpha\ 2) = \frac{(D - X)}{H} \qquad (2)$$

Despejando X de las ecuaciones (1) y (2) e igualando los segundos miembros de las expresiones se obtiene la expresión para H.

$$H = \frac{D}{ctg(\alpha 1) + ctg(\alpha\ 2)} \qquad (3)$$

IV) PROCEDIMIENTO:

4.1) Usando la Wincha, mida la distancia entre las estaciones de observación A y B, expresada en metros.

4.2) Ubicando el transportador en la base A, de modo tal que su base sea paralela a la dirección A-B, apuntar con la mira al centro del barco escogido para ser observado, luego leer el ángulo de paralaje α1, de la visual respecto a la dirección A-B.

4.3) Ubicando el transportador en la base B, de modo tal que su base sea paralela a la dirección A-B, apuntar con la mira al centro del barco escogido para ser observado, luego leer el ángulo de paralaje α2, de la visual respecto a la dirección A-B.

4.4) Empleando la fórmula (3), determine la distancia H, desde el barco perpendicularmente hasta la dirección A-B, expresada en metros.

4.5) Repetir cinco veces los numerales 4.2), 4.3), y 4.4) del procedimiento.

V) DATOS:

D = (m)

I	α1 (º)	α2 (º)	H (m)
1			
2			
3			
4			
5			
Σ			

VI) CUESTIONARIO:

6.1) Explique ligeramente las posibles causas de las discrepancias en los resultados obtenidos para los ángulos de paralaje α1 y α2, y la distancia H. Explique que son errores aleatorios y errores sistemáticos.

6.2) ¿Qué tipo de medición es aquella realizada con el ángulo α1? Determine el valor promedio, desviación estándar, error absoluto, error porcentual, y exprese el resultado de la medición del ángulo de paralaje α1, según la convención científica.

6.3) ¿Qué tipo de medición es aquella realizada con el ángulo α2? Determine el valor promedio, desviación estándar, error absoluto, error porcentual, y exprese el resultado de la medición del ángulo de paralaje α2, según la convención científica.

6.4) ¿Qué tipo de medición es aquella realizada con la distancia D? Determine el error absoluto, error porcentual, y exprese el resultado de la medición de la distancia D, según la convención científica.

6.5) ¿Qué tipo de medición es aquella realizada con la distancia H? Determine el valor promedio, desviación estándar, error absoluto, error porcentual, y exprese el resultado de la medición de la distancia H, según la convención científica.

6.6) Paralaje es la diferencia en la aparente dirección de un objeto, debido al cambio en la posición del observador. El paralaje estelar es el cambio aparente en la posición de una estrella como un resultado del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol. Este es expresado cuantitativamente por la mitad del ángulo subtendido por el diámetro de la órbita de la Tierra E1 y E2 tomando como vértice la estrella. Este es dado por la expresión.

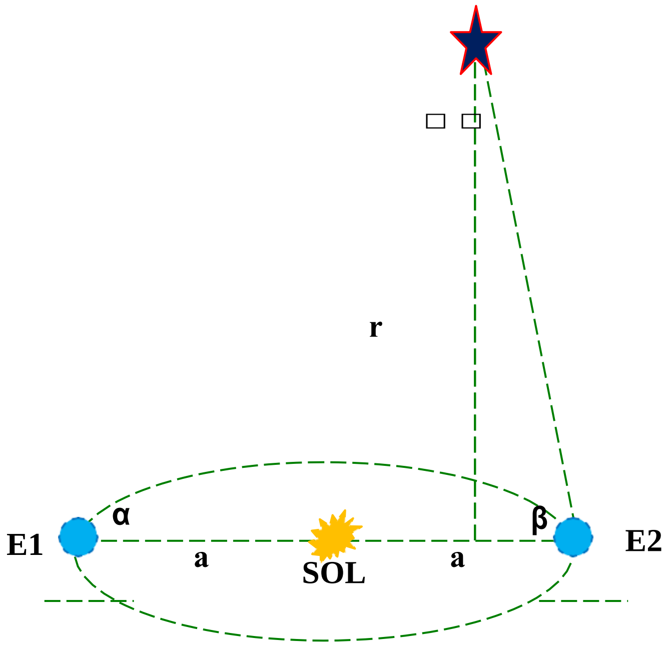
$$\theta = \frac{(180 - \alpha - \beta)}{2}$$

Donde los ángulos α y β son medidos en las dos posiciones E1 y E2, separadas por seis meses. La distancia “r” desde la estrella al Sol puede ser obtenida a partir de la relación.

$$a = r\,\theta$$

Donde, “a” es el radio de la órbita terrestre y “□” es expresado en radianes.
La estrella con el paralaje más grande □ = 0,76” (la estrella más cercana) es α-centauri. Encuentre su distancia desde el Sol, expresada en metros (m), años luz (AL), y unidades astronómicas (UA).
Una unidad astronómica es equivalente al radio promedio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, 1 UA = $1{,}49 \times 10^{11}$ (m).

Un año luz es equivalente a la distancia en el espacio vacío que viaja la luz durante un año, 1 AL = $9{,}46 \times 10^{15}$ (m)



6.7) Los ingenieros del ejército de los Estados Unidos midieron en el año 1946 la distancia de la Tierra a la Luna usando un radar. Si el viaje de ida y vuelta de la Tierra a la Luna le toma al haz del radar un tiempo t = 2,56 (s).

a) ¿Cuál es la distancia de la Tierra a la Luna? (La velocidad de las ondas de radar es v = 3×10^8 (m/s).

b) ¿Qué tipo de medición es?

VII) BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:

1. Alonso M., Finn E.: Física, tomo I. Edit. Fondo Educativo Interamericano.

2. Hackert A., Duff Ch.: Elements of trigonometry, Edit. D. C. Heath and Company.
3. Serway R. A.: Física, tomo I. Edit McGraw-Hill.

UNIDAD DIDACTICA II: FUNDAMENTOS DE MECANICA COMPETENCIA

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de movimiento de una partícula, tomando como base las leyes de Newton.

SESION DE APRENDIZAJE 2.1: CINEMATICA LINEAL Y CIRCULAR

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Comprende los conceptos de tiempo, posición, desplazamiento, velocidad y aceleración de una partícula.
2. Comprende, analiza, plantea y resuelve el movimiento de una partícula para los casos siguientes: movimiento rectilíneo uniforme (MRU), movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), caída libre (MCL), movimiento parabólico cerca de la superficie terrestre (MP), movimiento circular uniforme (MCU), movimiento circular uniformemente variado (MCUV).

La mecánica es un área muy amplia de la ciencia física, estudia las leyes que gobiernan los estados de reposo y movimiento de la materia.

El científico inglés, Sir Isaac Newton, en el siglo XVI realizó un importante estudio de la mecánica que condujo a sistematizar la mecánica en tres leyes denominadas “Leyes de Newton”.

2.1.1) MAGNITUDES QUE DESCRIBEN EL MOVIMIENTO:

Para evitar el tratamiento vectorial del tema desarrollaremos los conceptos y definiciones para un movimiento que ocurre en una sola dirección. El cuerpo que describe el movimiento lo denominaremos móvil, necesita de un punto de referencia o sistema de coordenadas respecto al cual se determinen las coordenadas del móvil en todo instante. El móvil estará en reposo si la coordenada del móvil permanece constante en el tiempo y estará en movimiento si cambia a cada instante. El sistema de referencia debe ser inercial o sea un tal

sistema donde no aparezcan fuerzas ficticias sobre los cuerpos cuyo movimiento describe.
La cinemática es el área de la ciencia Física que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas que son la causa de los cambios que ocurren en la velocidad de los mismos. Estudia y establece las magnitudes físicas necesarias para describir el movimiento.

A) POSICIÓN DEL MOVIL:
La posición del móvil se describe por la coordenada del móvil respecto al sistema de referencia escogido, esta se expresa en función del tiempo y se representa por X(t). En el sistema Internacional de unidades, la posición se mide en metros (m).

B) VELOCIDAD DEL MOVIL:
La velocidad del móvil es la rapidez con que varía la posición de éste en un instante o un intervalo de tiempo; en el primer caso se denomina velocidad instantánea y en el segundo velocidad promedio.

Se define como la razón del cambio de posición entre el intervalo de tiempo que dura dicho cambio.

En el Sistema Internacional de Unidades, la velocidad se mide en (m/s).
La velocidad instantánea es dada por la expresión

$$V = \frac{\delta X}{\delta t}$$

La velocidad promedio es dada por la expresión

$$\overline{V} = \frac{X - Xo}{t}$$

C) ACELERACIÓN DEL MOVIL:
La aceleración del móvil es la rapidez con que cambia la velocidad del móvil en un determinado instante o en un intervalo de tiempo; en el primer caso se denomina aceleración instantánea y en el segundo aceleración promedio.

Se define como la razón de la variación de velocidad entre el intervalo de tiempo que dura dicho cambio.

En el Sistema Internacional de Unidades la aceleración se mide en (m/s^2).
La aceleración instantánea es dada por la expresión

$$a = \frac{\delta V}{\delta t}$$

La aceleración promedio es dada por la expresión

$$a = \frac{V - Vo}{t}$$

donde:
a: aceleración del móvil, (m/s^2).
δ V: cambio de velocidad del móvil, (m/s).
δ t: intervalo de tiempo en que ocurre el cambio de velocidad, (s).
V: velocidad en el instante t, (m/s).
Vo: velocidad inicial del móvil, (m/s).
t: tiempo transcurrido, (s).

Si tomamos en cuenta diversos criterios de clasificación, como la trayectoria del movimiento o la variación de la velocidad del móvil, los movimientos típicos que podemos encontrar en la teoría cinemática son:

2.1.2) MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME:

El movimiento rectilíneo uniforme es aquel que realiza el móvil describiendo una trayectoria rectilínea con velocidad constante.

La posición viene determinada por la distancia X (m) a un punto que tomamos como referencia. Para conocer la posición final del móvil, precisamos saber la posición de partida Xo (m) y añadirle el espacio recorrido. Así, la ecuación de este movimiento será:

$$X = Xo + v.t$$

donde "v" es la velocidad del móvil y "t" es el tiempo empleado en pasar desde un punto hasta el otro.

2.1.3) MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO:

El movimiento rectilíneo uniformemente variado es aquel que realiza el móvil describiendo una trayectoria rectilínea con aceleración constante, o lo que es equivalente, velocidad uniformemente variada. La variación de la velocidad será el producto de la aceleración “a” por el tiempo “t”.

Para saber la velocidad “V” que posee el móvil en un instante dado, se deberá añadir a esta variación la velocidad Vo que llevaba al principio:

$$V = Vo + a.t$$

Para determinar la posición del móvil, a la posición inicial le añadimos el espacio recorrido, el cual lo determinamos multiplicando la velocidad media por el tiempo

$$X = Xo + \left(\frac{Vo + V}{2} \right) t$$

$$X = Xo + \left(\frac{Vo + Vo + at}{2} \right) t$$

$$X = Xo + Vo\,t + \frac{a t^2}{2}$$

Otra fórmula importante para describir el movimiento rectilíneo uniformemente variado se obtiene combinando las anteriores.
Despejamos el tiempo de la última expresión:

$$t = \frac{-2\,Vo \pm \sqrt{4\,Vo^2 + 8\,a(\,X - Xo\,)}}{2}$$

$$2a\,t + 2\,Vo = \pm\sqrt{4\,Vo^2 + 8\,a(X - Xo)}$$

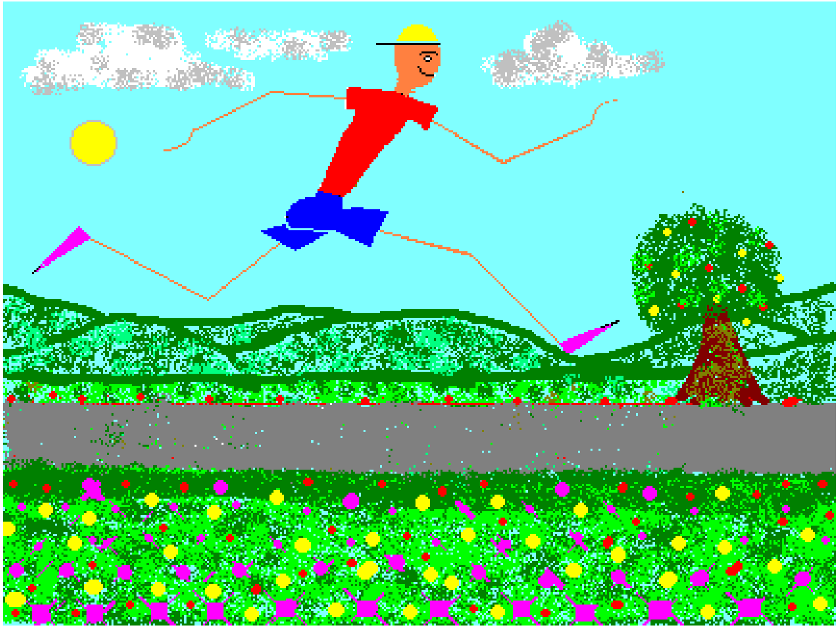
reemplazando “a t” por su equivalente (V – Vo)

$$2(V - Vo) + 2\,Vo = \pm\sqrt{4\,Vo^2 - 8\,a(X - Xo)}$$

despejando la velocidad, obtenemos la expresión

$$V^2 = Vo^2 + 2a(X - Xo)$$

EJERCICIO: Un corredor de maratón, hace ejercicios de precalentamiento y parte desde el reposo con movimiento rectilíneo uniformemente variado hasta alcanzar la velocidad de 5 (m/s) en el tiempo de 3 (s), luego continúa hasta la meta manteniendo la velocidad constante. La distancia recorrida durante la prueba de calentamiento es de 50 m.



a) Determine la aceleración del maratonista durante la partida.

$$a = \frac{V - Vo}{t}$$

$$a = \frac{(5 - 0)(m/s)}{3(s)}$$

$$a = 1{,}667\ (m/s^2)$$

b) Determine la distancia recorrida por el maratonista, con movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$e = X - Xo = \frac{V^2 - Vo^2}{2a}$$

$$e = \frac{(5^2 - 0^2)(m/s)^2}{2x1,667\ (m/s^2)}$$

$$e = 7,5(m)$$

c) Determine el tiempo que tarda el maratonista en cubrir la segunda etapa de su prueba.

Esta segunda etapa la realiza con velocidad constante.

$$t = \frac{X - Xo}{V}$$

$$t = \frac{(50 - 7,5)(m)}{5(m/s)}$$

$$t = 8,5(s)$$

d) Determine el tiempo que tarda el ejercicio de calentamiento.

$$t = t1 + t2$$

$$t = 3(s) + 8,5\ (s) = 11,5(s)$$

2.1.4) MOVIMIENTO PARABOLICO SOBRE LA SUPERFICIE TERRESTRE:

Cuando un móvil se mueve en un plano bajo la acción de la gravedad y cerca de la superficie de la Tierra, en la dirección vertical sufre la acción de la gravedad que actúa dirigida hacia el centro de la Tierra, y en la dirección horizontal no actúa aceleración alguna. Estas dos situaciones ocurren simultáneamente dando origen a un movimiento que puede describirse combinando los tipos de movimientos antes estudiados. La trayectoria del móvil es parabólica.
Las ecuaciones que describen este movimiento son las siguientes:

$$Vox = Vo.cos(\alpha)$$

$$Voy = Vo.sen(\alpha)$$

$$X = Xo + Vo.cos(\alpha)\ t$$

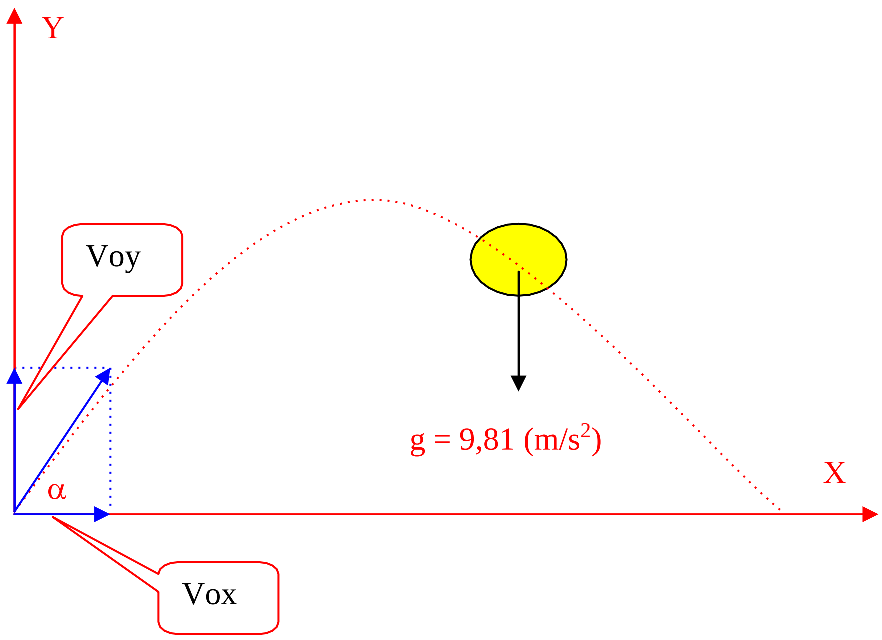
$$Y = Yo + Vo.sen(\,\alpha\,)\,t - \frac{g.t^2}{2}$$

$$Vy = Vo.sen(\,\alpha\,) - g.t$$

$$Vy^2 = Vo^2.sen^2(\,\alpha\,) - 2g(Y - Yo)$$

$$Hm = \frac{Vo^2.sen^2(\,\alpha\,)}{2\,g}$$

$$t_S = \frac{Vo.sen(\,\alpha\,)}{g}$$



donde,
α: ángulo de lanzamiento, (°).
Xo: abscisa inicial del móvil, (m).
Yo: ordenada inicial del móvil, (m).
X: abscisa del móvil en el instante t, (m).
Y: ordenada del móvil en el instante t, (m).
Vo: velocidad inicial de lanzamiento, (m/s).

Vox: componente horizontal de la velocidad inicial, (m/s).
Voy: componente vertical de la velocidad inicial, (m/s).
Vx: componente horizontal de la velocidad en el instante t, (m/s).
Vy: componente vertical de la velocidad en el instante t, (m/s).
Hm: altura máxima de la trayectoria, (m).
ts: tiempo de subida, equivalente al tiempo que tarda el móvil en alcanzar su altura máxima, (s).
g: aceleración de la gravedad, (9,81 m/s^2).

El tiempo de vuelo es el tiempo que tarda el móvil en su movimiento entre dos posiciones:

a) de abscisas Xo y Xf:

$$Tv = \frac{Xf - Xo}{Vo \cos \alpha}$$

b) de ordenadas Yo e Yf:

$$Tv = \frac{Vo \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{Vo^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\, g(Yf - Yo)}}{g}$$

EJERCICIO: Una alumna excursionista, salta una acequia de 2 (m) de ancho impulsándose con una velocidad inicial cuya dirección forma un ángulo de 45 ° con la superficie horizonta l. Si la aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,8 (m/s^2), Determine

a) La velocidad inicial con que se impulsó la estudiante.

$$Vo = \sqrt{\frac{R.g}{sen(2\alpha)}}$$

$$Vo = \sqrt{\frac{2(m)\,9{,}8\,(m/s^2)}{sen(\ 90°\ )}} = 4{,}45\,(m/s)$$

b) La componente horizontal de la velocidad inicial.

$$Vox = Vo.cos(\ \alpha\ )$$

$$Vox = 4{,}43\ (m/s)\ cos(\ 45°\ ) = 3{,}13(m/s)$$

c) La componente vertical de la velocidad inicial.

$$Voy = Vo.sen(\ \alpha\ )$$

$$Voy = 4{,}43\ (m/s)\ sen(\ 45°\ ) = 3{,}13(m/s)$$

d) El tiempo de vuelo, entre dos posiciones de ordenadas Yo e Yf tal que Yo = Yf.

$$Tv = \frac{2\ Vo\ sen\alpha}{g}$$

$$t_v = \frac{2x4{,}43\,(m/s)\,sen(\,45°)}{9{,}8(m/s^2)} = 0{,}64\,(s)$$

e) La altura máxima alcanzada durante el salto.

$$Hm = \frac{Vo^2.sen^2(\ \alpha\ )}{2\ g}$$

$$Hm = \frac{4{,}43^2\,(m^2/s^2)\,sen^2\,(\,45°)}{2x9{,}8(m/s^2)} = 0{,}5\ (m)$$

f) La posición de los pies de la estudiante en el instante t = 0,5 (s).

$$X = Xo + Vox.t$$

$$X = 0 + 3{,}13\ (m/s).0{,}5\ (m/s) = 1{,}57\ (m)$$

$$Y = Yo + Voy.t - \frac{g.t^2}{2}$$

$$Y = 0 + 3{,}13(m/s)0{,}5(s) - \frac{9{,}8(m/s^2)0{,}5^2(s^2)}{2} = 0{,}34\ (m)$$

g) Las componentes de la velocidad de la estudiante y su módulo, en el instante t = 0,5 (s).

$$Vx = Vox = 3{,}13\ (m/s)$$

$$Vy = Voy - g.t$$

$$Vy = 3{,}13\ (m/s) - 9{,}8(m/s^2)0{,}5(s) = -1{,}77\ (m/s)$$

su módulo es

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

$$V = \sqrt{3{,}13^2 + 1{,}77^2\,(m^2/s^2)} = 3{,}60\,(m/s)$$

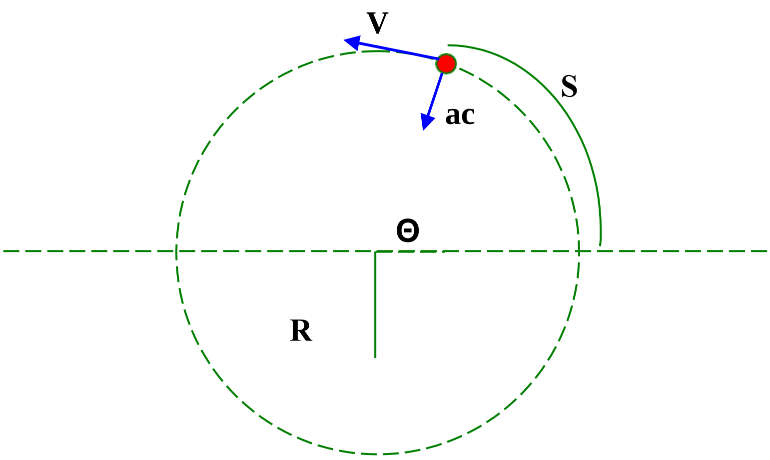
2.1.5) MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME:

En el movimiento circular uniforme el móvil describe una trayectoria circular, la posición del móvil se describe mediante el ángulo (Θ) que el radio vector sujeto al móvil subtiende respecto a una dirección de referencia que pasa por el centro de la trayectoria, el cual usualmente se mide en radianes. También se describe a través de la longitud del arco (S) subtendido por el radio vector sujeto al móvil respecto al eje de referencia que pasa por su centro.

La velocidad tangencial (V) del móvil, se define como la rapidez con que cambia la posición del móvil descrita como arco, en este tipo de movimiento su módulo permanece constante.

La velocidad angular (w) del móvil, se define como la rapidez de cambio de la posición angular del móvil, en este tipo de movimiento su módulo permanece constante.

La aceleración angular (α) del móvil, que es la rapidez con que cambia la velocidad angular, es nula.
El hecho que la dirección cambie, se debe a que existe una aceleración perpendicular a la trayectoria del móvil, dirigida al centro de la misma, denominada aceleración centrípeta (ac).
Las ecuaciones que relacionan estas magnitudes y permiten describir este tipo de movimiento son:



$$S = R\,\Theta$$

$$\Theta = \Theta o + W\,t$$

$$V = R\,W$$

$$ac = \frac{V^2}{R}$$

EJERCICIO: En una estación espacial se desea obtener una aceleración centrípeta equivalente a 5,0 (m/s^2), mediante la rotación alrededor de su eje, en una pista circular de radio 500 (m) cuyo centro coincide con el centro de rotación. Calcule:
a) La velocidad tangencial en un punto de la pista circular, necesaria para lograr la aceleración centrípeta deseada.

$$ac = R\,W^2$$

$$V = \sqrt{R\,ac} = \sqrt{500\,(m)\ 5\ (m/s^2)} = 50(m/s)$$

b) La velocidad angular de la estación.

$$W = \frac{V}{R} = \frac{50\,(m/s)}{500\,(m)} = 0{,}1\ (\ rad/s)$$

c) El período de revolución de un punto de la pista circular.
El período de revolución es el tiempo que tarda un punto cualquiera de la pista circular en completar una órbita de 2 π (rad).

$$P = \frac{\Theta - \Theta\,o}{W} = \frac{2\ \Pi\ (rad)}{0{,}1\,(rad/s)} = 62{,}83\ (s)$$

d) La longitud de la pista circular.

$$L = 2\ \Pi\ R = 2\ \Pi\ 50\ (m) = 314{,}16\ (m)$$

2.1.6)MOVIMIENTOCIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO:

En el movimiento circular uniformemente variado el móvil describe una trayectoria circular, la posición del móvil se describe mediante el ángulo (Θ) que el radio vector sujeto al móvil subtiende respecto a una dirección de referencia que pasa por el centro de la trayectoria, el cual usualmente se mide en radianes. También se describe a través de la longitud del arco (S) subtendido por el radio vector sujeto al móvil respecto al eje de referencia que pasa por su centro.
La velocidad tangencial (V) del móvil, se define como la rapidez con que cambia la posición del móvil descrita como arco, en este tipo de movimiento su módulo cambia uniformemente, cantidades iguales en tiempos iguales.
La velocidad angular (w) del móvil, se define como la rapidez de cambio de la posición angular del móvil, en este tipo de movimiento su módulo también varía uniformemente, cantidades iguales en tiempos iguales.
La aceleración angular (α) del móvil, que es la rapidez con que cambia la velocidad angular, es constante.

La aceleración tangencial (at) del móvil, que es la rapidez con que cambia la velocidad tangencial, es constante.
El hecho que la dirección de la velocidad cambie, se debe a que existe una aceleración perpendicular a la trayectoria del móvil, dirigida al centro de la misma, denominada aceleración centrípeta (ac).
Las ecuaciones que relacionan estas magnitudes y permiten describir este tipo de movimiento son:
Las ecuaciones que relacionan estas magnitudes y permiten describir este tipo de movimiento son:

$$S = R\,\Theta$$

$$\Theta = \Theta o + W\,t + \frac{\alpha\,t^2}{2}$$

$$V = R\,W$$

$$W = W_o + \alpha\,t$$

$$W^2 = W_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta - \theta_o)$$

$$ac = R\,W^2$$

EJERCICIO: Un disco compacto de audio, realiza un movimiento circular uniformemente variado partiendo desde el reposo con aceleración angular α = 1 (rad/s^2) durante 3 (s), después mantiene la velocidad alcanzada durante 4 (s), y finalmente disminuye su velocidad hasta detenerse después de girar un ángulo de 2 (rad). Calcule:

a) El ángulo girado por el disco en los primeros 3 (s).

$$\theta - \theta o = \frac{\alpha\,t^2}{2} = \frac{1\left(\frac{rad}{s^2}\right)[3\,(s)]^2}{2} = 4{,}5\,(rad)$$

b) La velocidad angular alcanzada por el disco en los primeros 3 (s).

$$W = Wo + \alpha\,t = 0\left(\frac{rad}{s}\right) + 1\left(\frac{rad}{s^2}\right)3\,(s) = 3\left(\frac{rad}{s}\right)$$

c) El ángulo girado por el disco entre los instantes t = 3 (s) y t = 7 (s).

$$\theta - \theta o = W\,t = 3\left(\frac{rad}{s}\right) 4\ (s) = 12\ (rad)$$

d) La aceleración angular durante el frenado.

$$\alpha = \frac{W^2 - Wo^2}{2\left(\theta - \theta o\right)} = \frac{\left[0\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2 - \left[3\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2}{2\left(2\ (rad)\right)}$$

e) El tiempo que tarda en detenerse en la última etapa de su movimiento.

$$t = \sqrt{\frac{W - Wo}{\alpha}} = \sqrt{\frac{0\left(\frac{rad}{s}\right) - 3\left(\frac{rad}{s}\right)}{-2{,}25\left(\frac{rad}{s^2}\right)}} = 1{,}155\ (s)$$

f) El tiempo total empleado en el movimiento.

$$t = t1 + t2 + t3 = 3\ (s) + 4\ (s) + 1{,}155\ (s) = 8{,}155\ (s)$$

g) El ángulo total girado por el disco.

$$\theta = \delta\,\theta 1 + \delta\,\theta 2 + \delta\,\theta 3 = 4{,}5\ (rad) + 12\ (rad) + 2 (rad) = 18{,}5\ (rad)$$

SESION DE APRENDIZAJE 2.2: FUERZAS Y LEYES DE NEWTON

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1) Aplica las leyes de Newton para determinar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

2) Define el concepto de masa y peso.

3) Comprende las fuerzas fundamentales que actúan en la naturaleza.

2.2.1) LEYES DE NEWTON:

La mecánica estudia la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y los efectos que producen sobre su movimiento. En el siglo XVII, Sir Isaac Newton estudió la mecánica, resumiéndola en tres leyes.

Primera Ley de Newton:
Denominada también ley de la inercia, establece que cuando un cuerpo está en reposo o describe un movimiento rectilíneo y uniforme respecto a un sistema de referencia inercial, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él debe ser nula.

Segunda Ley de Newton:
Cuando se aplica una fuerza resultante "**F**" (N) sobre un cuerpo cuya masa es "m" (Kg.), el cuerpo adquiere una aceleración "**a**" (m/s^2) en la misma dirección y sentido de la fuerza resultante, cuyo módulo es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

ó

$$\mathbf{F} = m.\mathbf{a}$$

La unidad de fuerza en el Sistema Internacional, el Newton (N), se define como la fuerza que impulsa a una masa de un 1 (Kg.) con una aceleración de 1 (m/s^2). Un Newton (N) = 1 Kg.m/ s^2.

Tercera Ley de Newton:
Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro podemos constatar que este segundo ejerce una fuerza de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario, sobre el primero. Algunas veces, a esta tercera ley del movimiento de Newton se la denomina ley de acción y reacción.

Las fuerzas son magnitudes vectoriales que resultan de la interacción entre dos cuerpos, son los agentes que aseguran el equilibrio de los cuerpos y producen los cambios en el movimiento de los mismos, se pueden clasificar en fuerzas gravitatorias, fuerzas electromagnéticas, fuerzas nucleares.

Las fuerzas que experimentan los sistemas mecánicos de manera evidente son: las fuerza gravitatorias, las fuerzas que ejercen los resortes, las fuerzas de contacto, las fuerzas de fricción, las fuerzas de compresión o tensión. Estas fuerzas resultan de la interacción entre dos cuerpos. Aquí, revisaremos de manera resumida cada una de ellas.

2.2.2) FUERZA DE LA GRAVEDAD (PESO DE LOS CUERPOS):

La interacción gravitatoria fue descubierta por Sir Isaac Newton en el siglo XVII, para explicar la caída de los cuerpos, el movimiento planetario alrededor del Sol y el movimiento de los satélites alrededor de los planetas.

La ley de la gravitación universal indica que, dos cuerpos cualesquiera cuyas dimensiones sean mucho más pequeñas que la distancia que los separa, se atraen con una fuerza **F** cuyo módulo es proporcional al producto de cada una de las masas (M y M’) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa (d). La fuerza de la gravedad actúa en la recta que une los centros de gravedad de ambos cuerpos, se expresa matemáticamente del modo siguiente

$$F = G\frac{M.M'}{d^2}$$

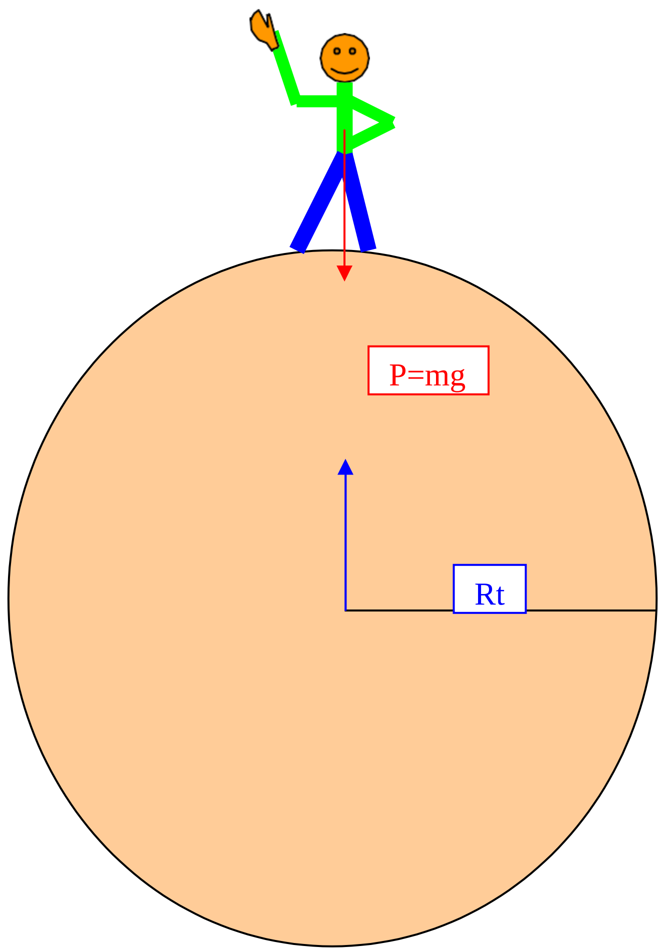
donde G es una constante universal que en el Sistema Internacional de unidades tiene el valor 6,67e-11 ($N.m^2/Kg^2$).

Si uno de los cuerpos no tiene dimensiones astronómicas y está próximo a un astro, la fuerza de atracción a la que se ve sometido recibe el nombre de peso. El peso de los cuerpos que se encuentran cercanos a la superficie de la tierra, según la ley de la gravitación, se puede expresar del siguiente modo.

$$P = m\left(\frac{G.Mt}{Rt^2}\right)$$

donde,

m: masa del cuerpo, (Kg).
Mt: masa de la Tierra, (Kg).
Rt: radio de la Tierra, (m).
P: peso del cuerpo, (N).



La expresión entre paréntesis es una constante que tiene unidades de aceleración y depende de algunas características de la Tierra, se denomina aceleración de la gravedad y toma el valor promedio g = 9,8 (m/s^2). Por lo tanto, el peso de los cuerpos que se encuentran sobre la superficie de la Tierra se expresa del siguiente modo.

$$\mathbf{P} = m.\mathbf{g}$$

Esta expresión nos indica que todos los cuerpos independientemente de su masa caen con la misma aceleración. La variación de la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra se debe a que los puntos de su superficie no están a la misma distancia de su centro.

Ejercicio: Una estudiante posee una masa corporal de 60 (Kg) y está ubicada sobre la superficie de la Tierra en un lugar cuya aceleración de la gravedad es g=9,8 (m/s^2).

a) Determine el módulo del peso corporal de la estudiante, cuando ésta se encuentra sobre la superficie de la Tierra.

$$P = m.g = 60(Kg)9{,}8(m/s^2) = 588\left(\frac{Kg.m}{s^2}\right) = 588\ (N)$$

b) Determine el módulo de la aceleración de la gravedad cuando la estudiante se encuentra en una nave espacial a una distancia igual dos radios de la Tierra, medida desde el centro de la Tierra.

$$g = \frac{G.Mt}{Rt^2}$$

$$g' = \frac{G.Mt}{(2Rt)^2} = \frac{G.Mt}{4Rt^2}$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{G.Mt}{4Rt^2}}{\frac{G.Mt}{Rt^2}} = \frac{1}{4}$$

$$g' = \frac{g}{4} = \frac{9{,}8(m/s^2)}{4} = 2{,}45\ (m/s^2)$$

c) Determine el módulo del peso de la alumna cuando está ubicada en la nave espacial.

$$P' = m.g' = 60\ (Kg)\ 2{,}45\ (m/s^{2}) = 147\ (Kg.m/s^{2}) = 147\ (N)$$

2.2.3) FUERZA QUE EJERCE UN RESORTE:

Ubicamos un resorte horizontalmente de modo tal que uno de sus extremos esté sujeto a una pared vertical, si aplicamos una fuerza horizontal constante (**F**) al extremo libre del resorte de modo tal que trate de estirarlo, el resorte se alarga una distancia X la cual es proporcional a la fuerza aplicada, esto ocurre hasta un límite denominado límite elástico del resorte. El módulo de la fuerza aplicada está relacionado con el estiramiento X mediante la relación.

$$F = K\ X$$

Donde K es una constante característica del resorte denominada constante elástica del resorte. Puesto que el extremo del resorte permanece en equilibrio de reposo, es necesario que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el extremo del resorte sea nula (primera ley de Newton), esto conlleva a la conclusión de que el resorte ejerce una fuerza (**Fr**) tal que sumada con la fuerza aplicada da una fuerza resultante nula.

$$\mathbf{F} + \mathbf{Fr} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto la fuerza que ejerce un muelle estirado una distancia X desde su posición de equilibrio es dada por la expresión.

$$\mathbf{Fr} = -\ K\ \mathbf{Xu}$$

Denominada ley de Hooke, el signo menos nos indica que la fuerza ejercida por el resorte es de sentido opuesto al sentido **u** del estiramiento del resorte y directamente proporcional al mismo.

2.2.4) FUERZA DE CONTACTO:

Las fuerzas de contacto las ejercen los cuerpos sólidos sobre otros objetos en contacto con ellos. Son fuerzas reales y van acompañadas de pequeñas distorsiones en las superficies de los mismos. De hecho, una fuerza de contacto se diferencia de la fuerza que ejerce un resorte en el tamaño de la distorsión que tiene lugar. Por lo tanto, un cuerpo sólido puede ejercer fuerzas de contacto diferentes en circunstancias diversas sin experimentar un cambio notable en su forma.

2.2.5) FUERZAS DE FRICCION:

La fricción es una fuerza aplicada a una superficie de un objeto, causada por el roce de otra superficie o por el flujo de un fluido. La fuerza de fricción es siempre paralela y opuesta a la dirección del movimiento relativo de las superficies en contacto.

A) FUERZAS DE FRICCION ENTRE DOS SUPERFICIES SOLIDAS EN CONTACTO:

Cuando dos superficies sólidas paralelas están unidas entre sí por una fuerza de contacto denominada fuerza normal, y mediante la acción de una fuerza externa se trata de establecer un movimiento de deslizamiento relativo entre ambas superficies, inmediatamente surge una fuerza de fricción que se opone compensando y evitando el deslizamiento.
Si aumentamos la fuerza externa la fuerza de fricción crece repitiéndose el fenómeno hasta un límite en que la fuerza de fricción ya no aumenta y las superficies comienzan su deslizamiento relativo.

En esta primera etapa la fuerza máxima de fricción se expresa mediante la fórmula

$$Ffmax = \mu_e N$$

donde,

Ffmax: fuerza de fricción máxima, (N).
μe: coeficiente estático de fricción.
N: fuerza normal de contacto, (N).

Después que la fuerza de fricción alcanza su máximo valor y las superficies en contacto se ponen en movimiento, la fuerza de fricción disminuye dando lugar a un movimiento de deslizamiento uniformemente variado. La expresión de la fuerza de fricción en esta etapa es de la forma.

$$Ff = \mu_c N$$

donde,

μc: coeficiente cinético de fricción.

El coeficiente estático de fricción siempre es mayor que el coeficiente cinético de fricción.

Las fuerzas de fricción son muy útiles en la vida diaria, debido a ellas es posible caminar, etc., pero en muchas ocasiones es necesario evitarlas para lo cual se suavizan las superficies en contacto puliéndolas para eliminar las rugosidades o haciendo uso de líquidos lubricantes.

Los coeficientes de fricción dependen del tipo y clase de las superficies en contacto.

B) FUERZA DE FRICCION VISCOSA:

Cuando un cuerpo sólido se desplaza a través de un fluido, gas o líquido, o cuando existe movimiento de deslizamiento relativo entre superficies lubricadas, aparecen fuerzas de fricción que se oponen al movimiento relativo, las cuales dependen de la velocidad relativa. La forma más simple de estas expresiones es

$$\mathbf{Ff} = -b\ .\mathbf{Vr}$$

donde,

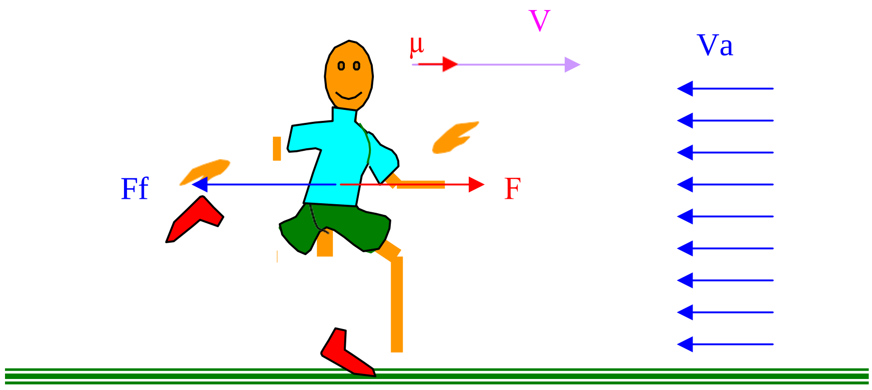
Ff: fuerza de fricción, (N).
b: coeficiente de proporcionalidad, (Kg/s).
Vr: velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido, (m/s).

Cuando una persona desnuda de masa corporal mc = 70 Kg. , se desplaza a través del aire en condiciones normales de presión y temperatura, el coeficiente de proporcionalidad es b = 17,9 (Kg/s).

Este coeficiente de proporcionalidad es directamente proporcional a la masa corporal elevada al exponente 3/4, eso es:

$$b = k\ (m_c)^{3/4}$$

Ejercicio: Un corredor mantiene una velocidad respecto a la superficie de la pista **V** = 3 **μ** (m/s), y el viento sopla en sentido contrario a su movimiento con una velocidad respecto a la pista **Va** = -1 **μ** (m/s) La masa del atleta es m = 65 Kg. El vector unitario **μ** apunta en el mismo sentido de la velocidad del corredor.



a) Determine el coeficiente de proporcionalidad b, correspondiente a la fuerza de fricción.

Tomando como referencia la masa m = 70 (Kg), se puede establecer la siguiente relación.

$$\frac{b}{b'} = \frac{K\,(m)^{3/4}}{K\,(m')^{3/4}}$$

$$b' = b\left(\frac{m'}{m}\right)^{3/4} = 17{,}9(\mathrm{Kg/s})\left(\frac{65(\mathrm{Kg})}{70(\mathrm{Kg})}\right) = 16{,}62(\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}})$$

b) Determine la velocidad relativa del corredor respecto al aire.

$$\mathbf{Vr} = \mathbf{V} - \mathbf{Va}$$

$$\mathbf{Vr} = 3(\mathrm{m/s}) - [-1(\mathrm{m/s})]\ \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbf{Vr} = 4(\mathrm{m/s})\ \boldsymbol{\mu}$$

c) Determine la fuerza de fricción que ejerce el aire sobre el cuerpo del corredor.

$$\mathbf{Ff} = -b.\mathbf{Vr}$$

$$\mathbf{Ff} = -16{,}62(\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}})4(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\ \boldsymbol{\mu}$$

$$\textbf{Ff} = 66{,}49\left(\frac{Kg.m}{s^2}\right)\boldsymbol{\mu} = 66{,}49(N)\,\boldsymbol{\mu}$$

2.2.6)FUERZAS DE COMPRESION Y TENSION:
Un bloque sólido que tiene dos fuerzas **F1** y **F2** = - **F1** presionándole a uno y otro lado (ver Fig. (a)) estará en equilibrio. El bloque experimenta una compresión en cualquiera de las secciones transversales a la dirección de las fuerzas, el módulo de la compresión (C) es igual al módulo de cualquiera de las fuerzas que actúan sobre él, es decir C = F1 = F2.
Asimismo, un bloque en equilibrio podría tener dos fuerzas opuestas de igual módulo tirando de él, como se muestra en la Fig. (b). En este caso decimos que el bloque se encuentra en estado de tensión, y el módulo de la tensión (T) es igual nuevamente al módulo de una u otra de las fuerzas que actúan sobre él, es decir T = F1 = F2.

(a)

(b)

SESION DE APRENDIZAJE 2.3: ESTATICA DE SOLIDOS RIGIDOS

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Aplica la primera y tercera leyes de Newton para resolver ejercicios de estática de sólidos rígidos.
2. Resuelve ejercicios de estática del sólido rígido para fuerzas concurrentes.
3. Calcula el momento de torsión de una fuerza respecto a un eje de giro.
4. Resuelve ejercicios de estática del sólido rígido para fuerzas no concurrentes y paralelas.

La estática es un área de la mecánica que estudia el estado de equilibrio de los cuerpos y su relación con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, en este propósito se aplica la primera y tercera leyes de Newton.
Se dice que un cuerpo está en equilibrio de reposo cuando sus coordenadas permanecen invariables en el tiempo; está en equilibrio de movimiento cuando el cuerpo se mueve con velocidad constante y consecuentemente describiendo una trayectoria rectilínea, en ambos casos el movimiento del cuerpo se refiere a un sistema de coordenadas inercial. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son concurrentes cuando sus direcciones se intersecan en un único punto denominado punto de concurrencia, se denominan fuerzas colineales cuando son paralelas actuando en una única dirección, cuando las direcciones de las fuerzas se intersecan en diferentes puntos se denominan fuerzas no concurrentes, cuando las fuerzas actúan en direcciones paralelas se denominan fuerzas paralelas. Se distinguen los siguientes casos de equilibrio para su mejor estudio.

2.3.1) EQUILIBRIO DE FUERZAS COLINEALES O CONCURRENTES:

Cuando un sistema de fuerzas colineales o concurrentes actúa sobre un cuerpo que se encuentra en estado de equilibrio, la suma de las fuerzas debe ser igual cero.

$$\mathbf{F1} + \mathbf{F2} + \mathbf{....} + \mathbf{Fn} = \mathbf{0}$$

Cuando las fuerzas son coplanares esta ecuación vectorial es equivalente a dos condiciones escalares, la suma de componentes X de las fuerzas debe ser igual a cero y la suma de componentes Y de las fuerzas también debe ser igual acero, que se traducen en las siguientes ecuaciones.

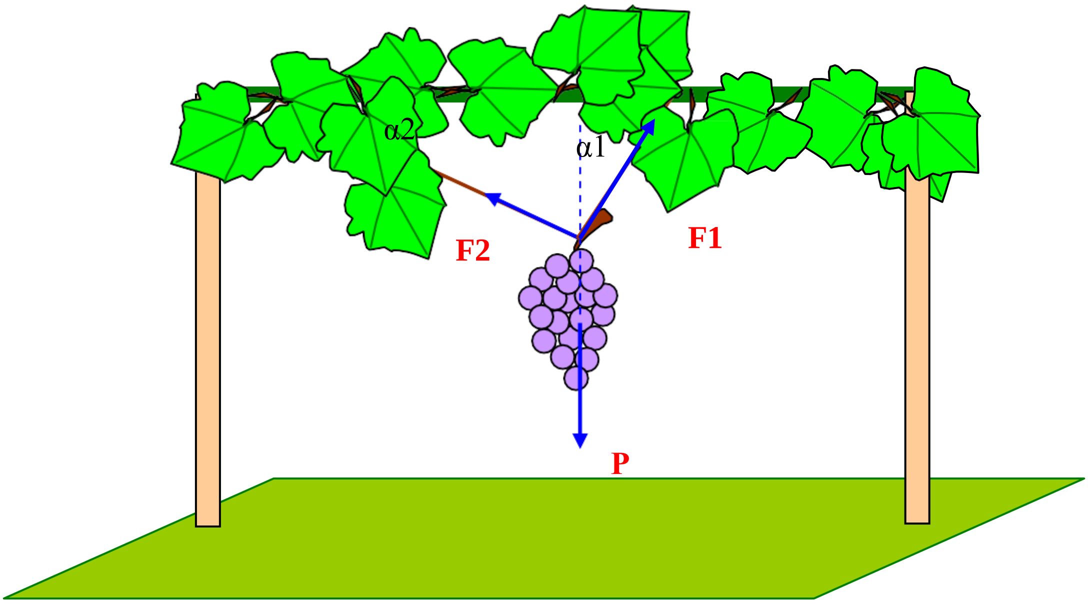
Condición de equilibrio de translación en la dirección X:

$$F1x + F2x + ... + Fnx = 0$$

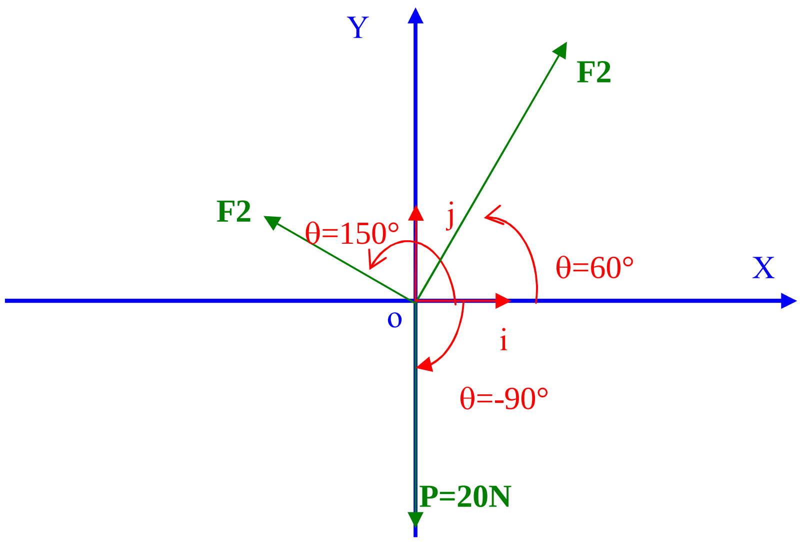
Condición de equilibrio de translación en la dirección Y:

$$F1y + F2y + ... + Fny = 0$$

Ejercicio: Un racimo de uvas cuyo peso tiene un módulo P = 20 (N), cuelga de un viñedo, suspendido por dos ramas que penden del plano horizontal formando ángulos $\alpha 1=60°$ y $\alpha 2=30°$, como se muestra en el esquema adjunto.



a) Represente el diagrama de fuerzas en un plano cartesiano cuyo origen coincide con el punto de concurrencia.



b) Realice la descomposición vectorial de cada una de las fuerzas que actúan sobre el gajo de uvas.

$$F1x = F1.\cos(\theta 1) = F1.\cos(60°) = \frac{1}{2} F1$$

$$F1y = F1.sen(\theta 1) = F1.sen(60°) = \frac{3}{2} F1$$

$$\mathbf{F1} = \frac{1}{2} F1\mathbf{i} + \frac{3}{2} F1\mathbf{j}$$

$$F2x = F2.cos(\theta 2) = F2.cos(150°) = -\frac{3}{2} F2$$

$$F2y = F2.sen(\theta 2) = F2.sen(150°) = \frac{1}{2} F2$$

$$\mathbf{F2} = -\frac{3}{2} F2\mathbf{i} + \frac{1}{2} F2\mathbf{j}$$

$$Px = P.cos(\theta) = 20(N)cos(-90°) = 20(N).0 = 0$$

$$Py = P.sen(\theta) = 20(N)sen(-90°) = -20(N)$$

$$\mathbf{P} = 0\mathbf{i} - 20\mathbf{j}\ \mathbf{(N)}$$

c) Establezca las expresiones para las condiciones de equilibrio del gajo de uvas.

Condición de equilibrio de translación en la dirección X:

$$F1x + F2x + Px = 0$$

$$\frac{1}{2} F1 - \frac{3}{2} F2 + 0 = 0$$

$$F1 - 3F2 = 0$$

Condición de equilibrio de translación en la dirección Y:

$$F1y + F2y + Py = 0$$

$$\frac{3}{2} F1 + \frac{1}{2} F2 - 20 = 0$$

$$3F1 + F2 = 40$$

d) haciendo uso de las condiciones de equilibrio establecidas, obtenga los módulos de las fuerzas F1 y F2, que ejercen las ramas sobre el racimo de uvas.
Resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones, multiplico la segunda condición de equilibrio por √ 3, sumo ambas expresiones, para finalmente despejar el módulo de la fuerza F1.

$$F1 - \sqrt{3}F2 = 0$$

$$3F1 + \sqrt{3}F2 = 40\sqrt{3}$$

– – – – – – – – – – – – –

$$4F1 = 40\sqrt{3}$$

$$F1 = 10\ \ 3\ (N)$$

reemplazo el valor de F1 encontrado en la primera ecuación, y luego despejo el módulo de la fuerza F2.

$$10\sqrt{3} - \sqrt{3}F2 = 0$$

$$F2 = 10\ (N)$$

2.3.2) MOMENTO DE TORSION DE UNA FUERZA:

El momento de torsión de una fuerza es una magnitud física vectorial que nos indica la efectividad de una fuerza para hacer girar un cuerpo alrededor de un eje

Su módulo se obtiene multiplicando el brazo de momento de la fuerza (bm), por la fuerza (F), donde el brazo de momento es la distancia perpendicular desde el eje de giro hasta la dirección de la fuerza

El momento de torsión toma el valor positivo (+) cuando el giro del cuerpo alrededor del eje de giro tiende ha ser en sentido antihorario y toma el valor negativo (-) cuando el giro del cuerpo tiende ha ser en sentido horario.
Cuando se hace coincidir el punto de giro con un sistema de coordenadas cartesiano derecho, el vector fuerza y el brazo se ubican en el plano X-Y, el vector momento se ubicará sobre el eje Z. En el Sistema Internacional de Unidades el momento se mide en (m N).

$$Mo = \pm\, b_m . F$$

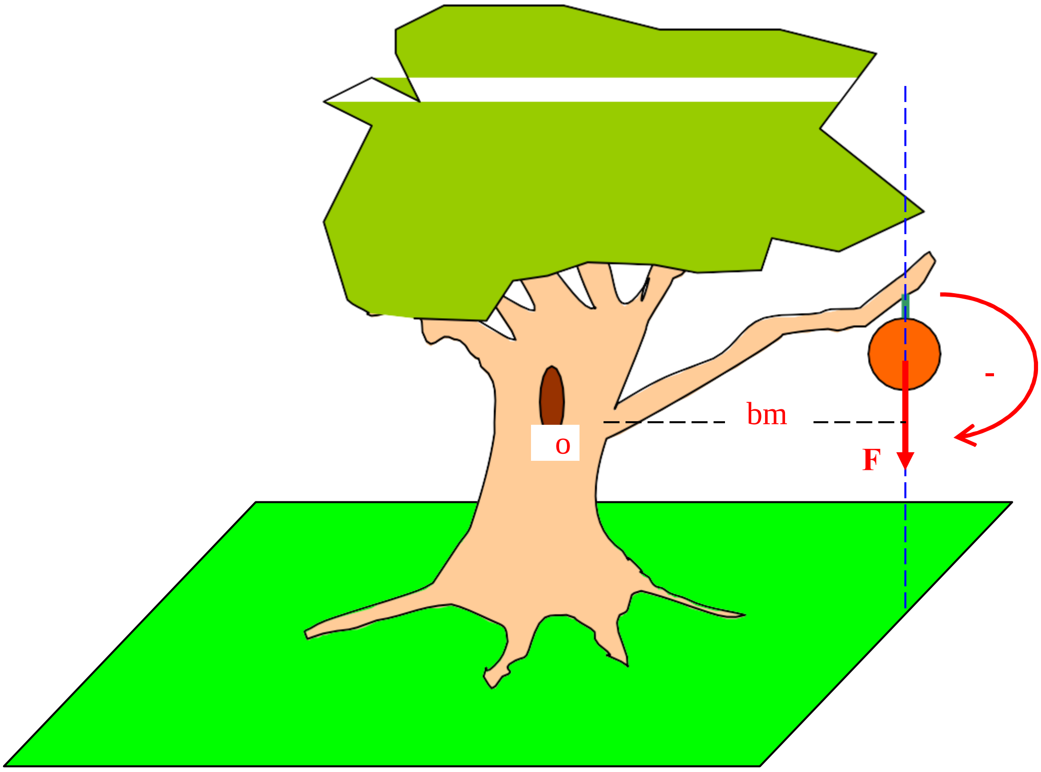
donde,

Mo: módulo del momento de torsión de la fuerza respecto al eje o, (m.N).

bm: brazo de momento de la fuerza, (m).

F: módulo de la fuerza aplicada sobre el cuerpo, (N).

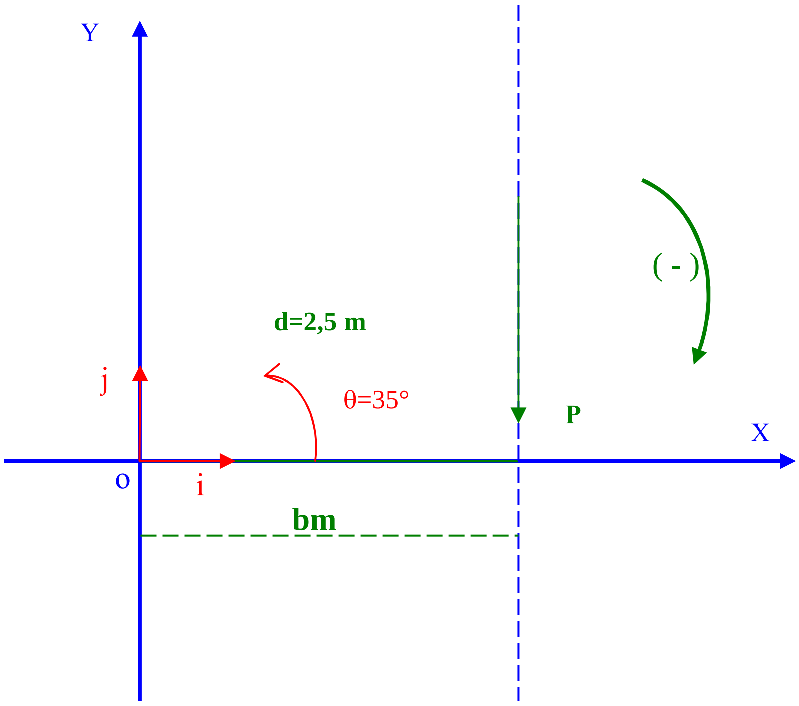
EJERCICIO: Una fruta cuya masa es m = 5 Kg, cuelga de la rama de un árbol, la rama tiene una longitud de 2,5 (m) desde su base “o” hasta el pedúnculo de la fruta y está inclinada un ángulo de 35° con respecto a la horizontal como se muestra en la figura precedente. La aceleración de la gravedad del lugar es g=9,8 (m/s^2).



a) Obtenga el peso de la fruta.

$$P = m.g = 5(Kg)\ 9{,}8(m/s^2) = 4{,}9\ (\frac{Kg.m}{s^2}) = 4{,}9\ (N)$$

b) Confeccione un diagrama de fuerzas en un sistema de coordenadas cartesiano, con el origen coincidente con el eje de giro.



c) Obtenga el valor del brazo de momento del peso de la fruta respecto al punto "o" donde la rama se adhiere al árbol.

$$bm = d.\cos(\theta. = 2{,}5\ (m)\ \cos(35°) = 2{,}048\ (m)$$

d) Determine el signo del momento del peso de la fruta respecto al eje de giro (punto "o").

El peso de la fruta tiende a hacer girar la rama alrededor del eje de giro en sentido horario, por lo tanto el momento de la fuerza será negativo (-).

e) Determine el valor del módulo del vector momento de la fuerza respecto al punto "o".

$$Mo = – bm..P = – 2{,}048(m)4{,}9(N) =10{,}04\ (m.N)$$

2.3.3) EQUILIBRIO DE FUERZAS NO CONCURRENTES Y PARALELAS:

Cuando un sistema de fuerzas coplanares no concurrentes, actúa sobre un cuerpo que se encuentra en estado de equilibrio, la suma de las fuerzas y la suma de los momentos de las fuerzas referidos a un mismo punto de giro, deben ser nulos, dando origen a tres condiciones escalares de equilibrio que se traducen en las siguientes ecuaciones.

Condición de equilibrio de translación en la dirección X:

$$F1x + F2x + ... + Fnx = 0$$

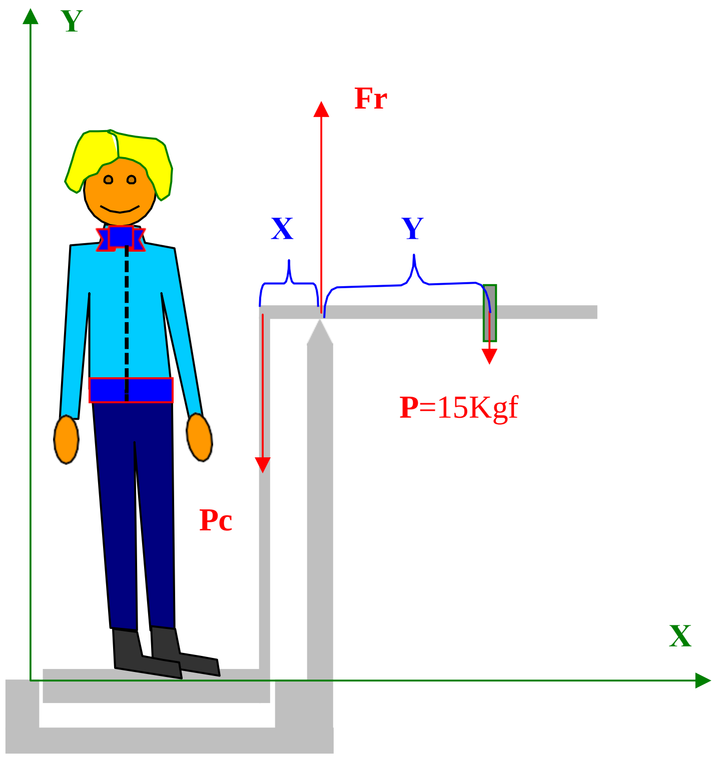
Condición de equilibrio de translación en la dirección Y:

$$F1y + F2y + ... + Fny = 0$$

Condición de equilibrio rotacional:

$$M1o + M2o + ... + Mno = 0$$

EJERCICIO: Una persona de peso corporal **Pc** se ubica en el pedestal de la balanza de brazos desiguales diseñada para medir el peso corporal, sacándola del equilibrio inicial en que se encontraba.



El equilibrio se restituye ubicando la pesa de peso P=15 Kgf a una distancia Y=60 cm desde el cero de la escala, el peso corporal se transmite al brazo de la balanza en uno de sus extremos ubicado a una distancia X=15 cm desde el punto de apoyo.

a) Explique por qué no es necesario establecer la condición de equilibrio de translación en la dirección X..

No es necesario establecerla porque conduce a una identidad trivial, 0=0. Esto ocurre porque las fuerzas que actúan sobre la balanza están orientadas a lo largo del eje Y, consecuentemente sus componentes en la dirección X son iguales a cero.

b) Establezca la condición de equilibrio de translación en la dirección Y.

En vista que las fuerzas son paralelas al eje Y, sus componentes en esa dirección son:

$$Pcy = Pc.sen(-90°) = -Pc$$

$$Fry = Fr.sen(90°) = Fr$$

$$Py = P.sen(-90°) = -15$$

La condición de equilibrio solicitada es

$$Pcy + Fry + Py = 0$$

$$-Pc + Fr = 15$$

c) Establezca la condición de equilibrio rotacional alrededor del eje que pasa por el punto de apoyo del brazo de la balanza.

Los momentos de las fuerzas que actúan sobre el brazo de la balanza, respecto al punto de apoyo del brazo, son

$$MPc = X.Pc = 15(cm)Pc$$

$$MFr = 0.Fr = 0$$

$$MP = -Y.P = -60(cm)15(Kgf) = -900\ (cm.Kgf)$$

La tercera condición de equilibrio es

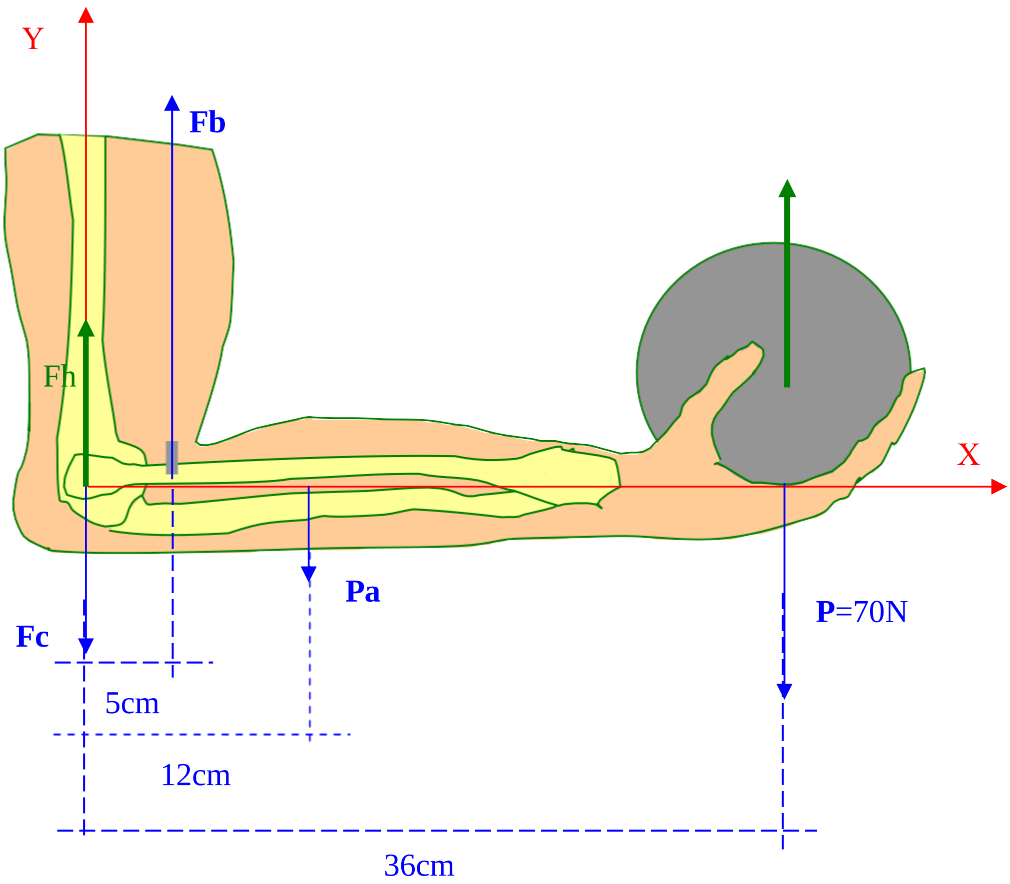
$$Mpc + MFr + MP = 0$$

$$15(cm)Pc - 900(cm.Kgf) = 0$$

De esta condición despejamos Pc.

$$Pc = 60(Kgf)$$

EJERCICIO: El antebrazo mostrado en el esquema adjunto está en reposo en posición horizontal y sujeta en la mano un peso de 70 (N). El antebrazo de longitud 36 (cm) posee una masa de 1.5 Kg, cuyo centro de gravedad está ubicado a 12 (cm) de la articulación del codo. El tendón del bíceps se adhiere al radio en un punto ubicado a 5 (cm) de la articulación del codo aplicando una fuerza **Fb** aproximadamente vertical. Las fuerzas indicadas en el diagrama con flechas de color azul actúan sobre el antebrazo y son las responsables de su estado dinámico, las fuerzas indicadas con flechas verdes son las reacciones que actúan sobre el húmero y sobre el peso sostenido por la mano, los cuales interaccionan con el antebrazo.



a) Determine el peso del antebrazo.

$$Pa = ma.g = 1,5\ (Kg)9,81(m/s^2) = 14,715\ (N)$$

b) Establezca la condición de equilibrio de translación en la dirección Y.

Las componentes de las fuerzas en la dirección Y, son:

$$Fcy = Fc.sen(-90°) = -Fc$$

$$Fby = Fb.sen(90°) = Fb$$

$$Pay = Pa.sen(-90°) = -Pa$$

$$Py = P.sen(-90°) = -70(N)$$

La condición de equilibrio es dada por la expresión

$$Fcy + Fby + Pay + Py = 0$$

$$-Fc + Fb - 14,715(N) - 70(N) = 0$$

$$-Fc + Fb = 84,715\ (N)$$

c) Establezca la condición de equilibrio rotacional alrededor del codo.

Los momentos de las fuerzas respecto al punto de giro en el codo, son:

$$MFc = bfc.Fc = 0.Fc = 0$$

$$MFb = +\ bfb.Fb = 5(cm)Fb$$

$$MPa = -\ bpa.Pa = -12(cm)14,715\ (N) = -176,58\ (cm.N)$$

$$MP = -\ bp.P = -\ 36\ (cm)\ 70\ (N) = -\ 2520\ (cn.N)$$

La condición de equilibrio solicitada se expresa por la ecuación

$$MFc + MFb + MPa + MP = 0$$

$$0 + 5(\text{cm})\text{Fb} - 176{,}58\ (\text{cm.}) - 2520\ (\text{cm.N}) = 0$$

de esta condición podemos despejar el valor del módulo de la fuerza que ejerce el bíceps sobre el radio

$$\text{Fb} = \frac{(176{,}58 + 2520)(\text{cm.N})}{5\ (\text{cm})} = 2696{,}58\ (\text{N})$$

d) Determine la fuerza **Fc**, que ejerce el húmero sobre el radio.

Reemplazando el valor de la fuerza del bíceps en la segunda condición de equilibrio, obtenemos:

$$-\text{Fc} + \text{Fb} = 84{,}715\ (\text{N})$$

$$\text{Fc} = \text{Fb} - 84{,}715(\text{N}) = 2696{,}58(\text{N}) - 84{,}715(\text{N}) = 2611{,}865\ (\text{N})$$

$$\mathbf{Fc} = \text{Fcx}\ \mathbf{i} + \text{Fcy}\ \mathbf{j} = 0\mathbf{i} - 2611{,}865\ \mathbf{j}\ (\text{N})$$

e) Exprese las fuerzas que actúan sobre el radio en componentes cartesianas.

Considerando la representación gráfica de las fuerzas y los valores obtenidos para sus módulos, su expresión en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{Fc} = \text{Fcx}\ \mathbf{i} + \text{Fc}\ \mathbf{j} = 0\mathbf{i} - 2611{,}865\ \mathbf{j}\ (\text{N})$$

$$\mathbf{Fb} = \text{Fbx}\ \mathbf{i} + \text{Fby}\ \mathbf{j} = 0\ \mathbf{i} + 2696{,}58\ \mathbf{j}\ (\text{N})$$

$$\mathbf{Pa} = \text{Pax i} + \text{Pay j} = 0\ \text{i} + 14{,}715\ \text{j}\ (\text{N})$$

$$\mathbf{P} = \text{Px}\ \mathbf{i} + \text{Py}\ \mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 70\ \mathbf{j}\ (\text{N})$$

f) Determine la fuerza de reacción **Fh**, que ejerce el radio sobre el húmero.

La fuerza **Fh** es la reacción de la fuerza **Fc**, las cuales actúan sobre el húmero y el radio, respectivamente. Aplicando la tercera ley de Newton de la mecánica, obtenemos:

$$\mathbf{Fh} = -\mathbf{Fc} = -(0\mathbf{i} - 2611{,}865\ \mathbf{j}) = 0\mathbf{i} + 2611{,}865\ \mathbf{j}$$

SESION DE APRENDIZAJE 2.4:DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Aplica las leyes de Newton para resolver ejercicios de dinámica lineal.
2. Aplica las leyes de Newton para resolver ejercicios de dinámica rotacional.
3. Comprende y deduce las unidades de la fuerza, a partir de la segunda ley de Newton.

2.4.1)- DINAMICA LINEAL DEL SOLIDO RIGIDO:

La dinámica lineal es el área de la mecánica que estudia el movimiento lineal considerando a las fuerzas como causas que originan sus cambios, la dinámica lineal se fundamenta esencialmente en las leyes de Newton de la mecánica.

Las unidades de fuerza en los distintos sistemas de unidades coherentes se deducen de la segunda ley de Newton (**F** = m **a**).

Newton: Unidad de fuerza del sistema Internacional, se define como la fuerza resultante que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 kilogramo (Kg) le imprime una aceleración de 1 (m/s^2).

$$\text{Newton (N)} = \text{Kg} \;\; m / s^2$$

Dina: Unidad de fuerza del sistema Giorgi, se define como la fuerza resultante que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 gramo (g) le imprime una aceleración de 1 (cm/s^2).

$$\text{Dina (D)} = g \;\; cm/ s^2$$

Kilogramo fuerza: Unidad de fuerza del sistema Gravitatorio o Técnico, se define como la fuerza resultante que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 unidad técnica de masa (UTM) le imprime una aceleración de 1 (m/s^2).

$$\text{Kilogramo fuerza (Kgf)} = \text{UTM } m/ s^2$$

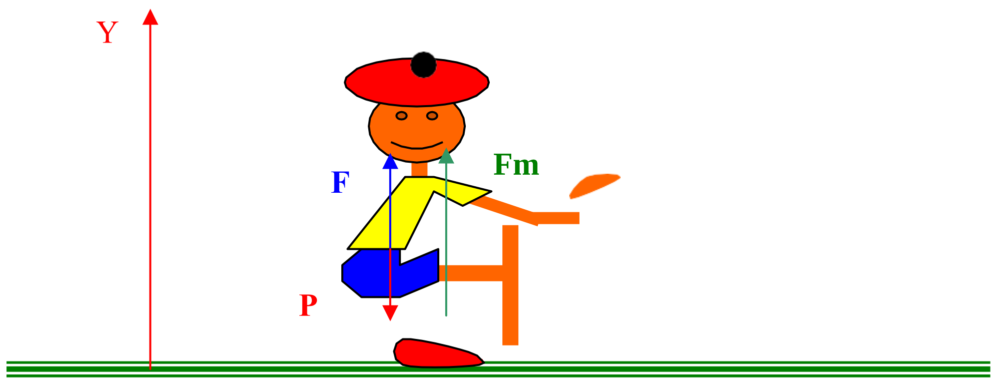
POUNDAL: Unidad de fuerza del sistema Inglés, se define como la fuerza resultante que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 libra masa (lbm) le imprime una aceleración de 1 (p/s^2).

$$\text{Poundal (Pdl)} = \text{lbm } p/s^2$$

LIBRA FUERZA: Unidad de fuerza del sistema Inglés Técnico, se define como la fuerza resultante que aplicada a un cuerpo cuya masa es de 1 slug (Slg) le im0prime una aceleración de 1 (p/s^2).

$$\text{Libra fuerza (lbf)} = \text{Slg } p/s^2$$

EJERCICIO: Un estudiante cuya masa es de 65 (Kg), da un salto vertical, para lo cual flexiona sus piernas y luego las extiende rápidamente una distancia e = 0,5 (m), al desprender sus pies del suelo éstos alcanzan una altura máxima de 0.7 (m) sobre el nivel del suelo. La aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,8 (m/s^2).



a) Determine la velocidad del estudiante al desprenderse del suelo.

$$Hm = \frac{Vo^2}{2g}$$

$$Vo = \sqrt{2gHm}$$

$$Vo = \sqrt{2x9,8\left(\frac{m}{s^2}\right)0,7(m)} = 3,7\,(m/s)$$

b) Determine el módulo, dirección y sentido de la aceleración del estudiante durante la extensión de sus piernas.

La velocidad al inicio del salto es Vo’ = 0, en vista que parte del reposo

$$a = \frac{Vo^2 - Vo'^2}{2e}$$

$$a = \frac{(3{,}7^2 - 0^2)(m^2/s^2)}{2x0{,}5(m)} = 13{,}69(m/s^2)$$

En la dirección vertical hacia arriba.

c) Determine el módulo dirección y sentido de la fuerza resultante, causante de la aceleración del cuerpo del estudiante durante la extensión de sus piernas

$$F = m.a$$

$$F = 65\ (Kg)13{,}69\ (m/s^2)$$

$$F = 889{,}85\ (Kg.m/s^2) = 889{,}85\ (N)$$

en la dirección vertical hacia arriba (igual que la aceleración), de acuerdo a la segunda ley de Newton

d) Determine el módulo, dirección y sentido de la fuerza que ejercen los músculos, durante la extensión de las piernas.

El módulo de la fuerza resultante F es igual a la diferencia de la fuerza normal N menos el peso del cuerpo, las cuales actúan en la dirección Y.

$$F = N - mg$$

$$N = F + mg$$

$$N = 889{,}85(N) + 65(Kg)9{,}8(m/s^2)$$

$$N = 1526{,}85(N)$$

Durante el salto la fuerza de tracción muscular extiende las piernas como palanca ínter potente que empuja el suelo hacia abajo y al cuerpo hacia arriba. Al mismo tiempo el suelo ejerce una fuerza de reacción normal **N** de la misma intensidad pero de sentido contrario sobre el cuerpo que se transmite a través de los huesos elevando el centro de gravedad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza muscular que actúa elevando el centro de gravedad del cuerpo es igual a la fuerza normal en intensidad y sentido.

$$Fm = 1526{,}85(N)$$

y actúa en la dirección vertical hacia abajo.

2.4.2) DINAMICA ROTACIONAL:

Estudia los factores que afectan la rotación de los cuerpos. Existen las leyes de Newton para los cuerpos que rotan alrededor de un eje fijo; éstas son como sigue:

Primera ley de Newton de la dinámica rotacional: Todo cuerpo sobre el cuál actúa un conjunto de fuerzas cuyo momento de torsión resultante es nulo, se mantiene en equilibrio de rotación alrededor de un eje fijo, o sea que no gira o gira con velocidad angular constante. Los cuerpos que no giran tienden a mantener su estado de ausencia de giro y aquellos que giran tienden a mantener su giro con velocidad angular constante. A esta ley se le conoce como ley de inercia rotacional.

Segunda ley de Newton de la dinámica rotacional: Todo cuerpo sobre el cual actúa un conjunto de fuerzas cuyo momento de torsión resultante **M** es diferente de cero, adquiere una aceleración angular α respecto a un eje fijo, la cual es directamente proporcional al momento de torsión e inversamente proporcional al momento de inercia I del cuerpo.

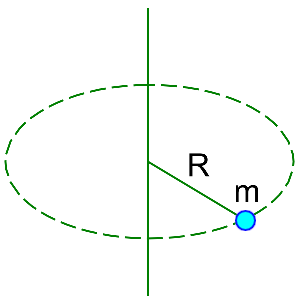
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{M}}{I}$$

ó

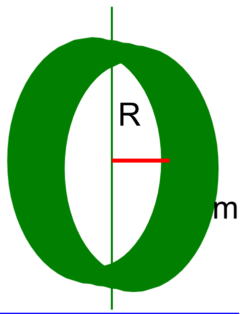
$$\mathbf{M} = I\,\boldsymbol{\alpha}$$

Tercera ley de Newton de la dinámica rotacional: En la interacción de dos cuerpos, el cuerpo **A** ejerce un momento de torsión **M** sobre el cuerpo **B,** entonces el cuerpo **B** reacciona inmediatamente ejerciendo sobre el cuerpo **A** un momento de torsión de igual módulo pero de sentido opuesto **M'**.

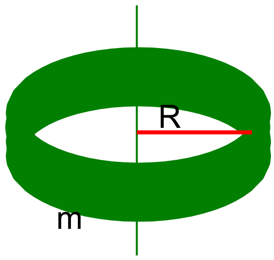
A) MOMENTO DE INERCIA: El momento de inercia "I" de un cuerpo es una magnitud física escalar cuyo módulo representa la dificultad del cuerpo para cambiar su estado de rotación (reposo o giro), se define como la suma de los productos de las masas de las partículas que conforman el cuerpo por su distancia perpendicular al eje de giro, en el sistema internacional de unidades se expresa en (Kg m^2). A continuación presentamos las expresiones de los momentos de inercia de algunos cuerpos de forma regular.



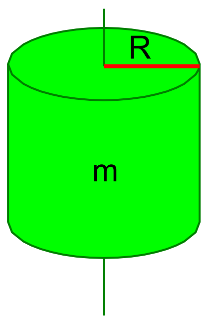
$I = m\,R^2$



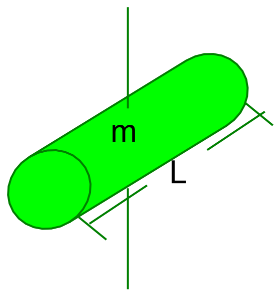
$I = m\,R^2/2$



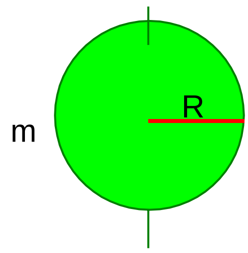
$I = m\,R^2$



$I = m\,R^2/2$



$I = m\ L^2/2$



$I = 2\ m\ R^2/5$

Si se desea obtener el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al eje indicado en la gráfica, ubicado a una distancia “b”, el momento de inercia será dado por la expresión siguiente.

$$I = Io + m\ b^2$$

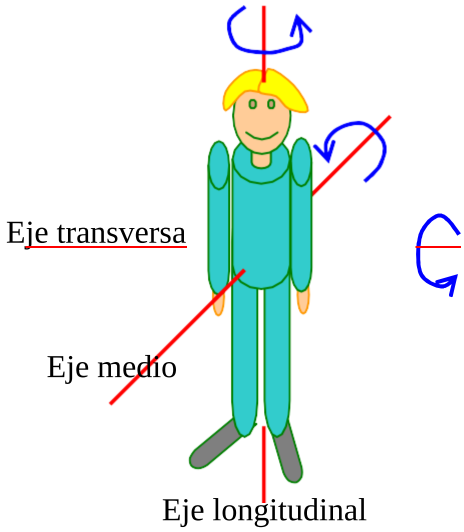
Donde, Io es el momento de inercia respecto al eje original (Kg m^2), I es el momento de inercia respecto al nuevo eje, m es la masa del cuerpo (Kg), b es la distancia entre los ejes paralelos (m).

B) MOMENTUM ANGULAR: El momentum angular “**L**”, de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, es igual al producto del momento de inercia “I” por la velocidad angular “**ω**” del cuerpo, ambos referidos al eje de rotación. En el sistema Internacional de Unidades el momentum angular se expresa en (Kg m^2/s)

$$\mathbf{L} = I\ \boldsymbol{\omega}$$

En un sistema sobre el cual actúa un momento de torsión resultante igual a cero, el momentum angular de dicho sistema se mantiene constante; este resultado es una consecuencia de la primera ley de Newton para el movimiento rotacional

C) EL MOMENTO DE INERCIA Y LA GIMNASIA: Cuando consideramos el cuerpo humano, éste puede girar libremente y en forma estable alrededor de tres ejes principales de rotación (ver figura adjunta).



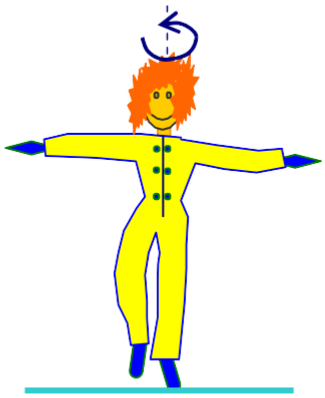
Estos ejes forman ángulos rectos unos con otros. Cada uno de ellos coincide con una línea de simetría del cuerpo y pasa por el centro de gravedad. La inercia rotacional del cuerpo, representada por el valor de su momento de inercia, es distinta respecto a cada uno de estos ejes.
La inercia rotacional más pequeña es respecto al eje longitudinal, o sea el eje vertical que va de la cabeza a los pies, y esto se debe a que la mayor parte de la masa se concentra alrededor de este eje. Por lo tanto es más fácil rotar alrededor del eje longitudinal de tu cuerpo que alrededor de cualquiera de los otros dos ejes. Una patinadora ejecuta este tipo de rotación cuando realiza un giro. La inercia rotacional aumenta simplemente extendiendo una pierna o los brazos. La inercia rotacional con los brazos extendidos resulta ser aproximadamente tres veces mayor que con los brazos ceñidos al cuerpo; y extendiendo además una pierna puede ser seis veces mayor.

EJERCICIO: Una patinadora inicia la realización de un giro de velocidad angular $\omega o = 2\ \pi$ (rad/s) con los brazos y una pierna extendidos. Despreciando la fricción que ejerce el hielo y el aire de la atmósfera calcule la velocidad angular del giro cuando

a) Recoge una pierna.
El momento de inercia del cuerpo al girar sobre su eje con la pierna recogida “I1”, es dos veces menor que el momento de inercia “Io” con los brazos y la pierna extendidos. En vista que no existen momentos de torsión externos al cuerpo de la
patinadora (fricción nula), el momentum angular se mantiene invariable antes y después de encoger la pierna.

$$Io\ \varpi o = I1\ \omega 1$$

$$\omega 1 = \frac{Io\ \omega o}{I1} = \frac{Io\ \omega o}{(Io/2)} = 2\ \omega o = 4\ \pi\ (rad/s)$$



b) Cuando después de recoger la pierna recoge los brazos y los ciñe al cuerpo.

El momento de inercia del cuerpo al girar sobre su eje con la pierna recogida y los brazos extendidos “I1”, es tres veces mayor que el momento de inercia “I2” con los brazos y la pierna recogidos. En vista que no existen momentos de torsión externos al cuerpo de la patinadora (fricción nula), el momentum angular se mantiene invariable antes y después de recoger los brazos.

$$I1\ \omega 1 = I2\ \omega 2$$

$$\omega 2 = \frac{I1\ \omega 1}{I2} = \frac{3\ I2\ \omega 1}{I2} = 3\ \omega 1 = 12\ (rad/s)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

E:01) Todo auto tiene asociado al velocímetro un odómetro que mide la distancia recorrida. Si ponemos la indicación inicial en cero al comienzo de un viaje y media hora después el odómetro marca 35 (Km), ¿cuál ha sido la rapidez promedio?

E:02) Si una chita mantiene una rapidez constante de 25 (m/s) recorrerá 25 (m) cada (s). ¿Qué distancia recorrerá en 10 (s)? ¿Y en un minuto?

E:03) El velocímetro de un auto que se desplaza hacia el norte indica 60 (Km/h). El auto pasa junto a otro auto que viaja hacia el sur a 60 (Km/h). ¿Viajan los autos con la misma rapidez? ¿Viajan con la misma velocidad?

E:04) Supón que la rapidez de un auto que se desplaza en línea recta aumenta constantemente cada segundo; en el primer segundo varía de 35 a 40 (Km/h), durante el segundo varía de 40 a 45 (Km/h) y durante el tercer segundo varía de 45 a 50 (Km/h). ¿Cuál es su aceleración?

E:05) En 5 segundos la rapidez de un auto que se mueve en línea recta aumenta de 50 a 65 (Km/h), mientras que un camión que también viaja en línea recta su rapidez aumenta desde el reposo hasta 15 (Km/h) en el mismo tiempo.. ¿Cuál es la aceleración de cada uno de ellos?

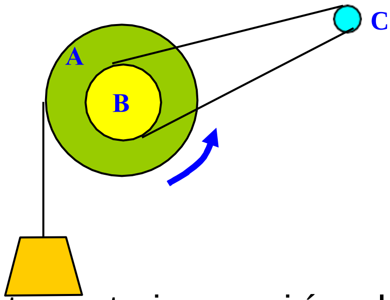
E:06) Una manzana cae de un árbol y llega al suelo en un segundo. ¿Cuál es su rapidez al llegar al suelo? ¿Cuál es su rapidez promedio durante la caída? ¿A qué altura se encontraba antes de caer?

E:07) El tren bala es un tren comercial de alta velocidad, de levitación magnética, viaja con una rapidez cercana a los 305 (Km/h). El tren se mueve con una sola unidad proporcionando un viaje excepcionalmente suave. Los ferrocarriles japoneses y alemanes están trabajando en trenes de levitación magnética que pueden alcanzar 480 (Km/h). ¿Cuántos metros recorre el tren en 1 (s)? ¿En cuántos segundos crees que puede recorrer este tren la vía expresa?

E:08) Piensa y explica por qué un objeto que se acelera puede conservar una rapidez constante pero no una velocidad constante?

E:09) ¿Qué móvil posee mayor aceleración moviéndose en línea recta: un automóvil cuya rapidez aumenta desde 50 a 60 (Km/h) o una bicicleta que pasa de cero a 10 (Km/h) en el mismo intervalo de tiempo?

E:10) En el sistema mostrado se sabe que Ra = 10 (cm), Rb = 30 (cm), Rc = 5 (cm) y además la polea C gira con una velocidad angular de 9 (rad/s). ¿Cuál es la rapidez del bloque?



E:10) ¿Qué tipo de trayectoria seguirían los planetas si la fuerza gravitatoria del Sol cesara repentinamente?

E:11) Un bloque de madera de 5 (Kg) tiene el doble de inercia que un bloque de madera de 2,5 (Kg) ¿Tiene el doble de masa? ¿Tiene el doble de volumen? ¿Tiene el doble de peso? (Medidos en el mismo lugar).

E:12) En lugar sobre la superficie de la Tierra se afirma que un saco de azúcar de 50 (Kg) pesa 490 (N). ¿Se puede afirma también que en el mismo lugar 50 (Kg) de arroz pesan 490 (N)? ¿Se puede afirmar también que un saco de azúcar de 50 (Kg) pesa 490 (N) cuando este se encuentra en el transbordador espacial orbitando alrededor de la Tierra?

E:13) Si un auto puede desarrollar una aceleración de 2 (m/s^2), ¿Qué aceleración desarrollará si tiene que remolcar a otro auto cuya masa es el doble?

E:14) Cuando subes a una báscula casera, la fuerza gravitatoria hacia abajo y la fuerza de reacción del piso hacia arriba comprimen un resorte que está calibrado para indicar tu peso. En realidad la báscula indica la intensidad de la fuerza de sustento. Si estuvieras de pie sobre dos básculas, distribuyendo tu peso uniformemente entre ambas, ¿qué indicaría cada una de ellas? ¿Y si tu peso carga más sobre un pie que sobre el otro?

E:15) Un avión a reacción vuela a gran altura y con velocidad constante mientras los motores producen un empuje constante de 100000 (N). ¿Cuál es la aceleración del avión? ¿Cuál es la fuerza resultante que actúa sobre el avión? ¿Cuál es la fuerza de fricción que ejerce el aire sobre el avión?

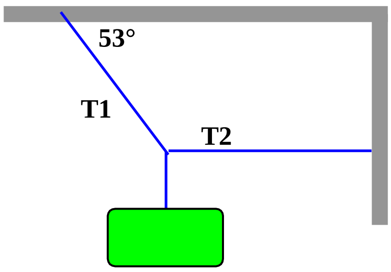
E:16) Si estuvieras en la Luna y dejaras caer un martillo y una pluma de ave al mismo tiempo y desde la misma altura, ¿llegarían a la superficie de la Luna al mismo tiempo?

E:17) Un auto se acelera sobre una carretera. Estrictamente hablando, ¿cuál es la fuerza que mueve al auto?

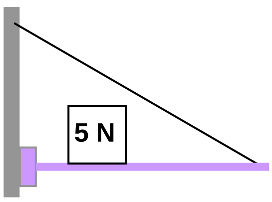
E:18) Identifica las fuerzas de acción y reacción en el caso de un objeto que cae en el vacío.

E:19) En la colisión de un camión y un automóvil ¿sobre cuál de los dos vehículos es mayor la fuerza de impacto? ¿Cuál de los dos vehículos sufre un cambio de movimiento mayor?

E:20) Calcula las tensiones T1 y T2 siendo el peso del bloque P = 300 (N).



E:21) Determine la tensión del cable, si el peso de la barra homogénea es de 30 (N), y el bloque se encuentra a 1 (m) de la pared y 2 (m) del extremo libre de la barra.



E:22) Si un equipo de fútbol americano intenta bloquear a otro, ¿por qué el defensivo trata de colocarse debajo de su adversario y de empujarlo hacia arriba? ¿Qué efecto tiene esto sobre la fuerza de fricción entre os pies del jugador del otro equipo y el suelo?

E:23) De varios ejemplo de cuerpos que no estén en equilibrio, aunque la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ellos sea igual a cero.

E:24) Indique como se puede usar una balanza de resorte para pesar objetos que pesan bastante más que la lectura máxima de dicha balanza.

E:25) Si la fuerza de fricción que se ejerce sobre una caja que se desliza es de 100 (N), ¿cuánta fuerza se debe aplicar y en qué dirección para que la velocidad sea constante? ¿Cuál es la fuerza total que se ejerce sobre la caja? ¿Cuál será la aceleración?

E:26) Una fuerza horizontal actúa sobre una masa que puede moverse libremente. ¿Se puede producir una aceleración si la fuerza es menor que el peso de la masa?

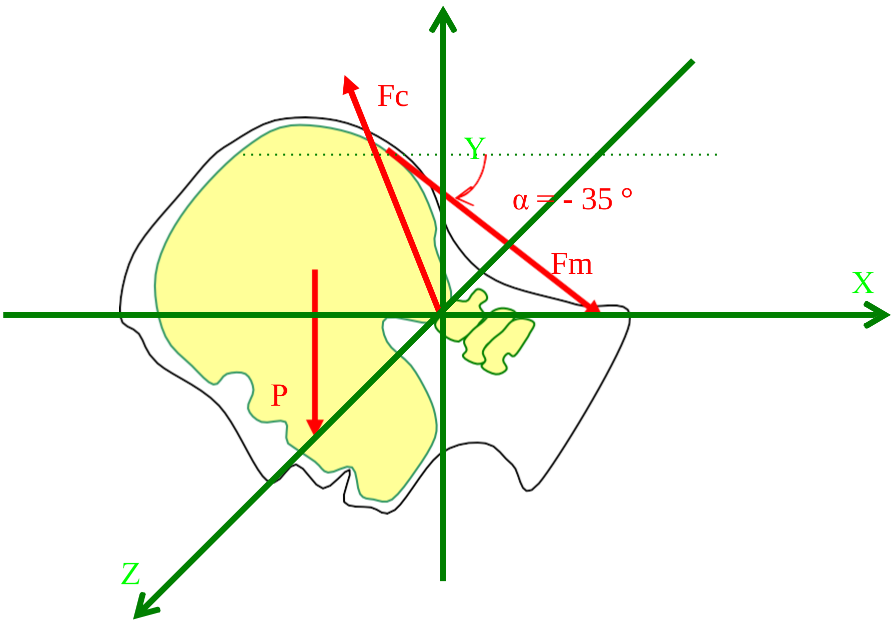
E:27) ¿Por qué se cae hacia adelante cuando un tren frena a detenerse y se cae hacia atrás cuando acelera desde el reposo?
¿Qué le pasaría cuando el tren realiza una curva con rapidez constante?

E:28) Un trineo experimental impulsado por cohete, puede acelerarse desde el reposo hasta 1600 (Km/h) en 1,8 (s). ¿Qué fuerza constante se necesita, si la masa del trineo es de 600 (Kg)?

E:29) Un cuerpo de 8,5 (Kg) pasa por el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad de 30 (m/s) paralelamente al semieje X+. Experimenta una fuerza constante de 17 (N) en la dirección del semieje Y+. ¿Cuál es el tipo del movimiento resultante? ¿Cuál será la velocidad del cuerpo después de transcurridos 15 (s)? ¿Cuál será la posición del cuerpo después de transcurridos 15 (s)?

E:30) La figura representa esquemáticamente la cabeza de un estudiante inclinada sobre su libro. La cabeza posee un peso **P** cuyo módulo es de 45 (N) y está sostenida por la fuerza muscular **Fm** ejercida por los extensores del cuello que forman un ángulo de 35 ° con la dirección horizontal, y por la fuerza de contacto **Fc** ejercida por la articulación atlanto – occipital. El punto de aplicación de las fuerzas representadas en la figura respecto al sistema de coordenadas cartesiano se indica en la tabla siguiente.

FUERZA	COORDENADAS			
	X (cm)	**Y (cm)**	**Z (cm)**	**VECTOR DE POSICION**
Muscular (**Fm**)	-3	9	0	- 3 **i** + 9 **j** + 0 **k** (cm)
Contacto (**Fc**)	0	0	0	0 **i** + 0 **j** + 0 **k** (cm)
Peso de cabeza (**P**)	-7	2	0	-7 **i** + 2 **j** + 0 **k** (cm)



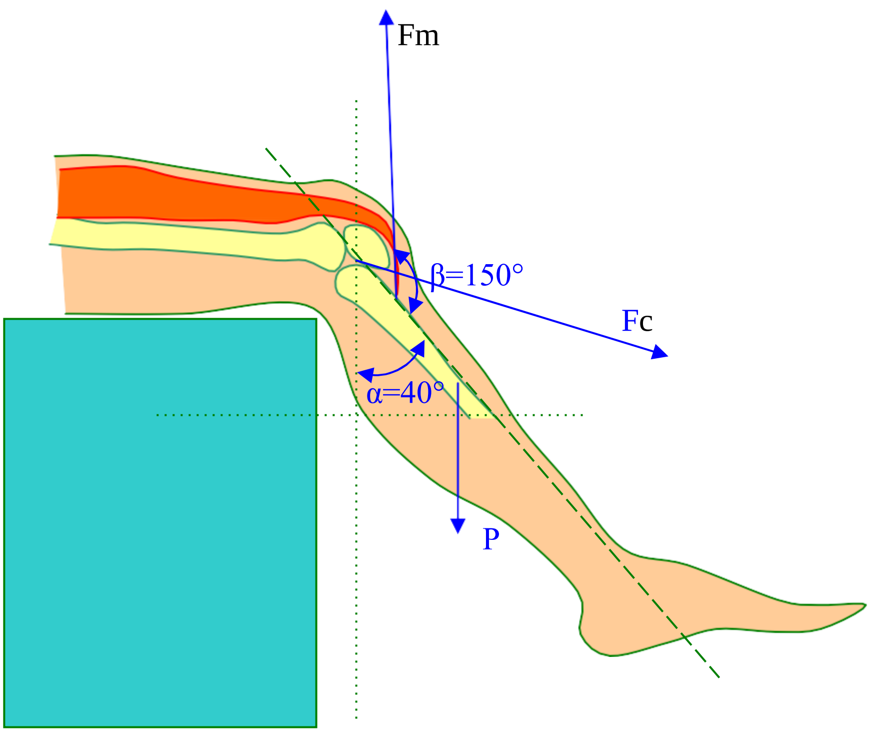
A) Exprese las fuerzas en función de sus componentes cartesianas.
B) Calcule los momentos de las fuerzas respecto al punto ubicado en la articulación atlanto – occipital (origen de coordenadas).
C) Establezca la condición de equilibrio rotacional respecto al eje que pasa por el origen de coordenadas, y despeje el módulo de la fuerza muscular.
D) Establezca las condiciones de equilibrio de translación en las direcciones X e Y. Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante obtenga las componentes Fcx y Fcy de la fuerza de contacto, obtenga asimismo el módulo su módulo y el ángulo que forma dicha fuerza con el semieje positivo X^+.
E) Obtenga la fuerza de reacción que ejerce la cabeza sobre la articulación atlanto – occipital, expresada en componentes cartesianas, asimismo obtenga su módulo y el ángulo que forma con el semieje X^+.

E:31) En la figura adjunta una pierna cuyo peso es 40(N), gira alrededor de la articulación de la rodilla ubicándose en estado de equilibrio en la posición indicada en la figura adjunta, bajo la acción de las siguientes fuerzas:
fuerza muscular **(Fm)** ejercida por el músculo cuadriceps que se inserta en la tibia a 7 (cm) desde la articulación de la rodilla y forma un ángulo β = 150° con la tibia, fuerza de contacto (**Fc**) ejercida por el fémur sobre la pierna en la articulación de la rodilla, peso de la pierna (**P**) que actúa en el centro de gravedad de la pierna ubicado sobre la tibia a 20 (cm) desde la articulación de la rodilla. La pierna forma un ángulo α = 40 °con la vertical.

A) Confeccione un diagrama de fuerzas sobre un sistema de ejes cartesianos tal que coincida el eje X con el eje de la tibia y el origen de coordenadas con la articulación de la rodilla.

B) Exprese las fuerzas en función de sus componentes cartesianas.

C) Calcule los momentos de las fuerzas respecto al eje que pasa por la articulación de la rodilla (origen de coordenadas).



D) Establezca la condición de equilibrio rotacional respecto al origen de coordenadas y deduzca el módulo de la fuerza muscular.

E) Establezca las condiciones de equilibrio de translación en las direcciones X e Y. Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante obtenga los valores de las componentes Fcx y Fcy de la fuerza de contacto, obtenga también el módulo de la fuerza de contacto y el ángulo que esta fuerza forma con el semieje X^+.
F) Obtenga la fuerza de reacción que ejerce la pierna sobre el fémur en la articulación de la rodilla, expresada en componentes cartesianas, asimismo obtenga su módulo y el ángulo que forma con el semieje X^+.

E:32) Un atleta cuyo centro de gravedad se encuentra a 0,85 (m) desde la planta de sus pies (posición vertical), salta dando un impulso cuya velocidad inicial forma un ángulo α = 45 ° con la horizontal, y alcanza una distancia horizontal R = 6 (m). Representamos el cuerpo del atleta por un punto material ubicado en su centro de gravedad, la aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,79 (m/s^2) y la resistencia del aire es despreciable.
A) Calcule el módulo de la velocidad inicial.
B) Calcule el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.
C) Calcule el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima.
D) Calcule el tiempo de vuelo del atleta.
E) Calcule la altura máxima que alcanza el atleta.
F) Confeccione una gráfica de la trayectoria del centro de gravedad del atleta a partir de las coordenadas X(t) e Y(t) correspondientes a los instantes t = 0; 0,2; 0,4; 0,6; y 0,783 (s)
G) Calcule las componentes de la velocidad y el módulo de la velocidad total del centro de gravedad del atleta, para los instantes t = 0; 0,2; 0,4; 0,6; y 0,783 (s). Represente los vectores velocidad sobre la gráfica de la trayectoria del centro de gravedad del atleta. ¿ Qué podría opinar respecto a la trayectoria y el vector velocidad.

E:33) Un basketbolista lanza una pelota desde un punto cuyas coordenadas descritas en plano cartesiano vertical son x = 0 (m), y = 1,8 (m); con una velocidad inicial que forma un ángulo α = 50° con el plano horizontal. Si el centro del aro de la canasta se encuentra ubicado en las coordenadas x = 7, y = 4,5 (m). La pelota es representada por un punto material ubicado en su centro de gravedad, la aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,8 (m/s^2). Calcule:
A) El módulo de la velocidad inicial (Vo), necesario para que la trayectoria de la pelota incluya a las coordenadas del centro del aro.
B) El tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima.
C) El tiempo que tarda la pelota en viajar desde el punto de lanzamiento hasta el centro del aro.

D) Las coordenadas de la pelota cuando alcanza su altura máxima.
E) Grafique la trayectoria de la pelota para los instantes de tiempo t = 0; 0,1; 0,2; 0,3;..(s); hasta llegar al centro del aro.
F) Las componentes Vx, Vy y el módulo de la velocidad de la pelota para los instantes t = 0; 0,1; 0,2; 0,3; ...(s), hasta que llega al centro del aro.
G) El ángulo que forma la velocidad de la pelota con el semieje X^+, en el instante que llega al centro del aro.

E:34) Un atleta cuya masa corporal es M = 70 (Kg) y su centro de gravedad corporal (posición de pié) se encuentra ubicado sobre el eje medio del cuerpo a 0,80 (m) desde la planta de los pies, encoge las piernas y luego las estira rápidamente una distancia de 0,50 (m) partiendo desde el reposo, de modo tal que su centro de gravedad alcanza una altura máxima y = 2 (m)velocidad inicial. La aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,8 (m/s^2). Despreciando la resistencia del aire.
A) Calcule la velocidad inicial vertical del movimiento de caída libre (cuando los pies dejan de experimentar la fuerza de contacto del suelo).
B) Calcule la aceleración vertical del centro de gravedad del cuerpo del atleta durante la extensión de sus piernas.
C) Calcule la fuerza vertical resultante que actúa sobre el cuerpo del atleta durante la extensión de sus piernas.
D) Confeccione el diagrama de fuerzas que actúa sobre el cuerpo del atleta durante la extensión de sus piernas y durante la caída libre.
E) Determine los módulos y direcciones de la fuerza normal y peso del cuerpo durante la extensión de las piernas.
F) Determine la dirección y el módulo de la fuerza de reacción que ejerce el cuerpo del atleta sobre la superficie del suelo.
G) Determine el tiempo que dura la extensión de las piernas del atleta.

E:35) Un nadador de estilo libre posee una masa corporal M = 70 (Kg), talla T = 1,70 (m), densidad promedio corporal D = 980 (Kg./m^3); desarrolla un entrenamiento de natación manteniendo una velocidad de 1,5 (m/s) durante media hora. La fuerza de fricción que ejerce el agua sobre la superficie corporal del nadador es de la forma Ff = C A ρ v^2/2, donde C = 1,2, A es el área del cuerpo perpendicular a la dirección del movimiento (m^2), ρ es la densidad del agua (Kg./m^3), v es la velocidad relativa del nadador respecto al agua
A) Calcule la velocidad relativa del nadador respecto al agua.
B) Estime el área promedio de la sección transversal del atleta.

C) Estime la fuerza de fricción que ejerce el agua sobre la superficie del cuerpo del nadador.
D) Determine la fuerza de impulsión que ejerce el nadador sobre su cuerpo, para vencer la fuerza de fricción.
E) Determine la distancia recorrida por el nadador.

E:36) Un atleta lanza una bala de masa M = 2 (Kg), desde un punto cuyas coordenadas son x = 0 (m); y = 1,90 (m); con una velocidad inicial que forma un ángulo α = 45° con el plano horizontal; para lo cual estira rápidamente su brazo aplicando una fuerza constante, de modo tal que la bala recorre una trayectoria de longitud d = 0,50 (m) y el centro de gravedad del sistema brazo - antebrazo - mano (BAM), cuya masa es M' = 3,5 (Kg), recorre una trayectoria d' = 0,30 (m). La bala impacta en el suelo horizontal en un punto cuyas coordenadas son x = 6,5 (m); y = 0 (m).
A) Determine el módulo de la velocidad **Vo** de la bala, en el instante que se desprende de la mano.
B) Calcule el tiempo que tarda la bala en alcanzar su altura máxima.
C) Calcule el tiempo de vuelo de la bala.
D) Calcule la altura máxima alcanzada por la bala.
E) Determine la aceleración de la bala en la dirección de su trayectoria, durante el estiramiento del brazo.
F) Determine la aceleración del centro de gravedad del BAM durante su estiramiento, suponiendo que al final de su trayectoria alcanza la misma velocidad que la bala.
G) Calcule las fuerzas aplicadas sobre la bala y sobre el centro de gravedad del brazo.
H) Calcule el tiempo que tarda el estiramiento completo del brazo.

PRACTICA DE LABORATORIO # 02: MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

I) Objetivos

1. Comprobar que el rodamiento de una esfera a lo largo de una rampa inclinada es rectilíneo uniformemente acelerado.
2. Determinar la aceleración de la esfera, por métodos gráficos geométricos.

II) Material y equipo

1. Rampa de rodamiento graduada (a)
2. Esfera metálica (b)
3. Cronómetro (c)
4. Taquitos de madera de diferente altura (d).

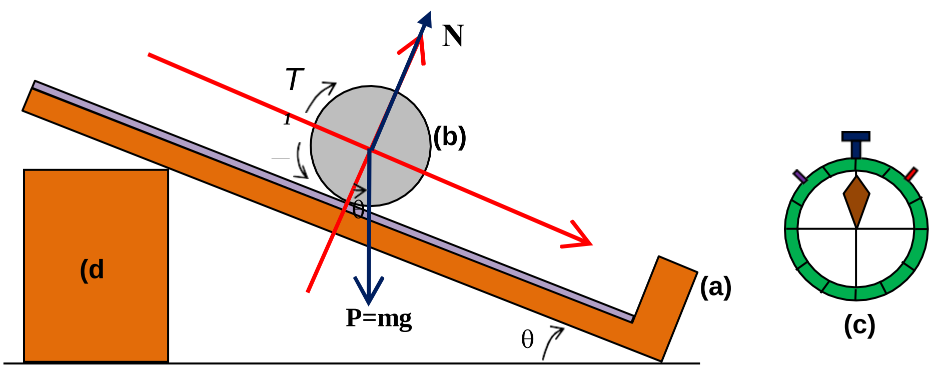


Fig. 1: Esquema de los materiales y equipo del experimento.

III)|Fundamento:

A) <u>Movimiento rectilíneo con aceleración constante:</u>

Un cuerpo se mueve con aceleración constante cuando experimenta cambios iguales de velocidad en intervalos iguales y sucesivos de tiempo.

Si “a” es la aceleración uniforme, “V_0” la velocidad inicial y, “V” la velocidad del móvil después que ha transcurrido el tiempo “t”.

Luego, a partir de la definición de aceleración, la ganancia de velocidad en el tiempo “t” es “a . t”, por lo tanto:

$$V = Vo + a\,t \qquad (1)$$

La gráfica velocidad – tiempo (fig. 1–a) es una línea recta cuya pendiente es igual a la aceleración del móvil.

El desplazamiento “S” del móvil es igual al desplazamiento inicial “So” más el incremento del desplazamiento producido durante el tiempo “t”. El incremento del desplazamiento producido durante el tiempo “t” es igual a la velocidad promedio durante el intervalo, multiplicada por el intervalo de tiempo “t”.

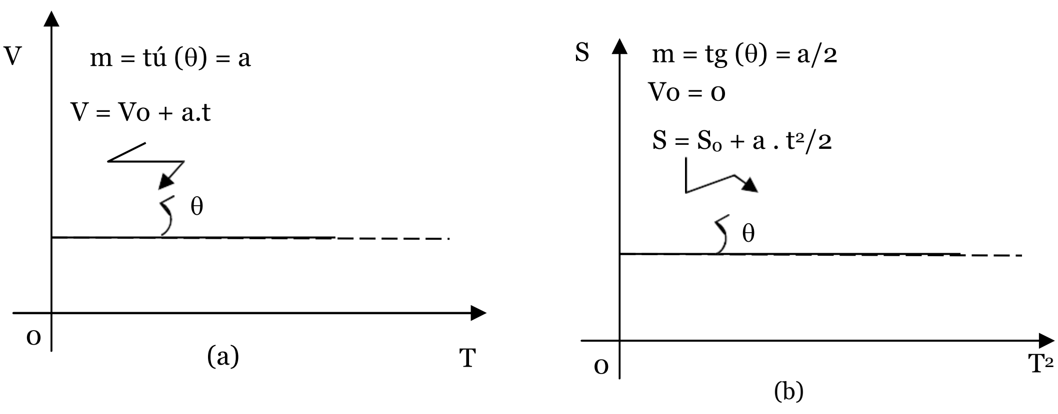


Fig. 1 Gráficas (a) de la velocidad en función del tiempo, y (b) del desplazamiento en función del cuadrado del tiempo, cuando el movimiento parte del reposo (V_0 = 0).

$$S = So + \delta\, S \quad (2)$$

$$\delta\, S = \frac{(Vo + V)t}{2} \quad (3)$$

Reemplazando la expresión (3) en (2) , resulta la expresión

$$\delta\, S = Vo + \frac{a\,t^2}{2} \quad (4)$$

y por lo tanto reemplazando (4) en (2), obtenemos la expresión para determinar el desplazamiento en función del tiempo, en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$S = So + Vo\; t + \frac{a\,t^2}{2} \quad (5)$$

La gráfica desplazamiento – tiempo^2 (Fig. 1-b), es una línea recta cuya pendiente es igual a la aceleración del móvil.

A partir de la ecuación (3) obtenemos la expresión

$$V + Vo = \frac{2\,\delta\, S}{t} \quad (6)$$

Si deseamos determinar la velocidad del móvil cuando este ha recorrido una distancia “S”, seguimos el procedimiento que continúa.
De la ecuación (1) obtenemos la expresión.

$$V - Vo = a\; t \quad (7)$$

Multiplicando miembro a miembro las expresiones (6) y (7) obtenemos la expresión que permite determinar la velocidad final del móvil en función de la velocidad inicial, espacio recorrido y aceleración.

$$V^2 = Vo^2 + 2\,a\delta\,S \quad (8)$$

B) Errores aleatorios de medidas directas

Un error de medición es la discrepancia o diferencia entre el valor medido y el valor real de la magnitud, se define matemáticamente como el valor absoluto de esta diferencia.

$$Ea = \left| Xm - Xr \right| \quad (9)$$

Cuando estos errores son ocasionados por causas impredecibles, de modo tal que los valores medidos cercanos al valor real tienen mayor probabilidad de ocurrencia que las medidas que se alejan de éste, se denominan errores aleatorios.

B.1) Valor medio más probable

En vista que el valor real no se conoce y es el objetivo de la medición, una buena aproximación al valor real es el valor promedio de las mediciones obtenidas de una magnitud, y se expresa matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (10)$$

<X>: valor medido más probable, (u).

Xi: i-ésimo valor medido, (u).

n : número de mediciones

u : unidad de medida de la magnitud

B.2) Desviación estándar de la muestra de medidas

La dispersión de los valores medidos alrededor del valor real se estima mediante un parámetro estadístico denominado desviación estándar, la cual se calcula haciendo uso de la siguiente relación matemática.

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle X \rangle)^2}{n-1}} \qquad (11)$$

DE: desviación estándar de la muestra, (u)

B.3) Error Absoluto

El error absoluto promedio de una medición se estima a través del parámetro estadístico denominado desviación estándar de la media, el cual se calcula mediante la siguiente expresión matemática.

$$EA = \frac{DE}{\sqrt{n}} \qquad (12)$$

EA: error absoluto aleatorio de la medición (μ)

El error absoluto determinado de este modo, representa la dispersión alrededor del valor promedio que se obtendría si se repitiera el proceso de medición basado en n medidas, un número grande de veces, el error absoluto posee las mismas unidades que la magnitud sometida al proceso de medición.

B.4) Error porcentual

El error porcentual equivale al error relativo multiplicado por 100, se expresa en porcentajes, y se representa matemáticamente por la siguiente ecuación.

$$EP = \frac{EA x 100(\%)}{\langle X \rangle} \quad (13)$$

EP: Error aleatorio porcentual, (%)

B.5) Reporte de la medición

El resultado de un proceso de medición se reporta indicando el valor promedio (o más probable) de la magnitud medida $\pm$ el error porcentual

$$X = \langle X \rangle (u) \pm EA(u) \quad (14)$$
$$X = \langle X \rangle (u) \pm EP(\%) \quad (15)$$

IV) Procedimiento

1. Instalar el equipo tal como se muestra en el esquema correspondiente a la sección II (material y equipo).
2. Hacer rodar la esfera, partiendo desde el reposo y desde el origen de la escala graduada de la rampa de rodamiento. Medir en cada caso el tiempo que tarda en recorrer las

distancias S =10, 30, ...,200 (cm), anotando los resultados en la tabla de datos.

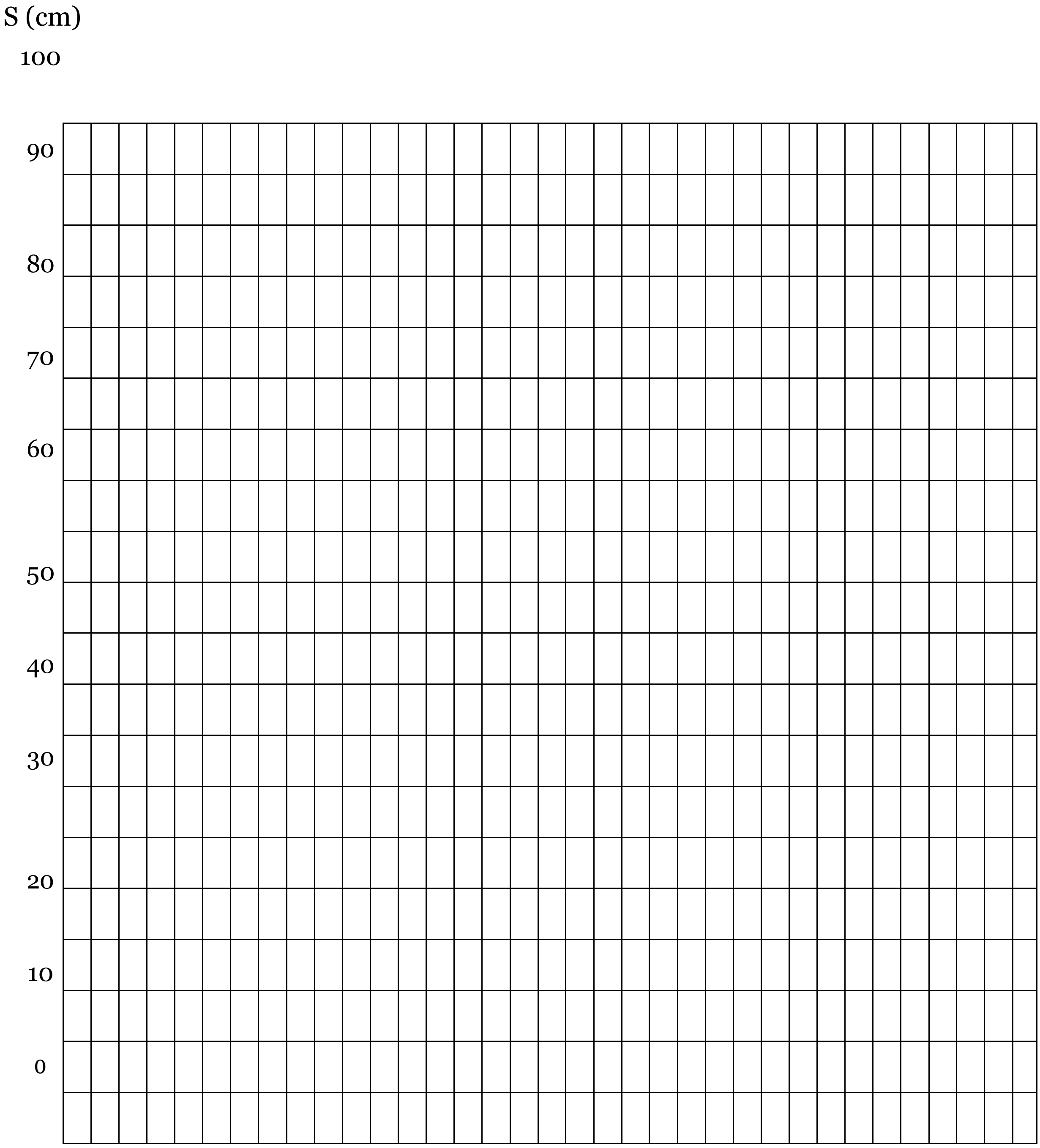
V) Datos

I	Si (cm)	Ti (S)	(cm/s^2)	ai - <a> (cm/s^2)	(ai - <a>)^2 (cm^2/s^4)
01					
02					
03					
04					
05					
06					
07					
08					
09					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
Σ					

VI) Preguntas

1. Haciendo uso de los datos tabulados en la sección V (datos) obtenga el valor promedio (o más probable), la desviación estándar, el error absoluto, el error porcentual, de la aceleración de la esfera. Así mismo, reporte el resultado de su proceso de medición según la convención científica. Reporte los resultados en la tabla de datos.

2. Confeccione una gráfica del desplazamiento de la esfera sobre la rampa (S), en función del cuadrado del tiempo (T^2).



3. Determine gráficamente la aceleración del rodamiento de la esfera, midiendo la pendiente de la recta graficada en el numeral 2.

4. Tomando como referencia el valor medio de la aceleración; determine el error porcentual del valor de la aceleración obtenido gráficamente.

VI) Bibliografía

1. Sears W; Semansky M .: Física general . Edit. Aguilar.
2. Halliday D. Resnick F.: Física para estudiantes de ciencias e Ingeniería, tomo I. Edit. CECSA.
3. Halliday D., Resnick F.: Fundamentos de física. Edit. CECSA.
4. Serway A.: Física, tomo I Edit. Mc Graw – Hill.
5. Finn E. Alonso M.: Física, Tomo I. Edit. Fondo Educativo Interamericano.
6. Leyva Naveros H.: Física I. Edit. Moshera.
7. Cromer A.: Física para las ciencias de la vida. Edit. Reverté S.A.

UNIDAD DIDACTICA III: TRABAJO Y ENERGIA
COMPETENCIA GENERAL:

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de movimiento de una partícula, tomando como base principios, leyes y conceptos energéticos.

SESION DE APRENDIZAJE 3.1: TRABAJO Y ENERGIA (I)
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:

1. Comprende el concepto de trabajo mecánico.
2. Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios acerca del trabajo realizado por fuerzas constantes, variables.

3.1) TRABAJO Y ENERGIA:

La energía es una magnitud física escalar que mide la capacidad para realizar trabajo que posee un sistema real, al interactuar con otros sistemas de su entorno de influencia. La energía se manifiesta en nuestro universo real en variadas formas tales como: energía mecánica, energía electromagnética, energía gravitatoria, energía nuclear, energía química, energía térmica, energía lumínica. Una forma de energía se puede convertir en otra forma de energía. Por ejemplo, la energía potencial gravitatoria del agua de un río al caer por una presa se convierte en energía mecánica lineal, esta al interactuar con las paletas de una turbina pelton se convierte en energía mecánica rotacional, al girar la turbina con un devanado de espiras conductoras eléctricas en un campo magnético esta energía se convierte en energía eléctrica que se transmite hasta un taller por medio de una red de cables conductores de cobre, el cable de poder de un motor eléctrico toma esta energía desde un tomacorriente instalado en el taller, esta energía se convierte en energía mecánica rotacional en el rotor del motor eléctrico. Cuando la energía cambia de una forma a otra, su cantidad total permanece constante. La conservación de la energía señala que si un objeto (sistema) pierde energía, la misma cantidad de energía aparece en otro objeto o en los alrededores.

3.1.1) TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE:

Una fuerza realiza trabajo al actuar sobre un cuerpo o sistema cuando el punto de aplicación de la fuerza se mueve alguna distancia y la fuerza tiene alguna componente a lo largo de la línea de movimiento.

El trabajo es una magnitud física escalar equivalente al producto de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento (causa), por el desplazamiento ocasionado sobre el cuerpo en el cual se aplica la fuerza (uno de los efectos). El trabajo que realiza una fuerza se mide en Joules (J), definido como el trabajo realizado por una fuerza de un Newton al desplazar al cuerpo sobre el que actúa una distancia de un metro en la misma dirección de la fuerza.

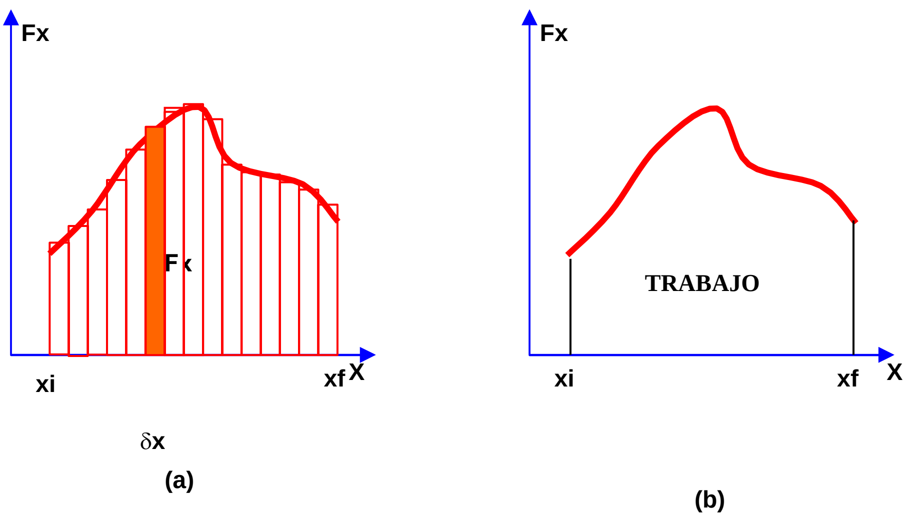
$$W = F.\cos(\alpha).d$$

donde,

W: trabajo, (J).
F: fuerza aplicada, (N).
d: desplazamiento, (m).
α: ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

3.1.2) TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Consideremos una partícula que se desplaza a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza variable que actúa en la misma dirección (Fx). La partícula se mueve en la dirección de x creciente desde x = xi hasta x = xf

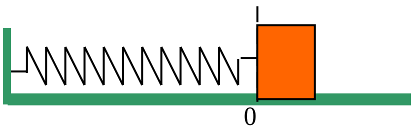


Cuando la partícula experimenta un desplazamiento δx, ver figura adjunta, la componente Fx de la fuerza puede considerarse constante en este intervalo, y el trabajo realizado por la fuerza Fx es Fx δx, el cual es igual al área del rectángulo sombreado. El trabajo total realizado para el desplazamiento desde x = xi a x = xf es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos. El trabajo realizado por la fuerza variable Fx conforme la partícula se mueve desde xi hasta xf es exactamente igual al área bajo esta curva, que equivale a la integral de la fuerza desde xi hasta xf.

$$W = \int_{xi}^{xf} Fx\, dx$$

3.1.3)TRABAJO REALIZADO POR UN RESORTE

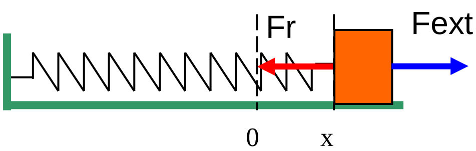
Se dispone de un resorte ubicado horizontalmente, fijado en uno de sus extremos a una pared y libre en el otro extremo, en el cual está sujeto un bloque de masa m.



Cuando ejercemos una fuerza externa Fext en el extremo libre, el resorte se deforma una distancia x hasta que la fuerza que ejerce el resorte se iguala en magnitud con la fuerza externa, ambas fuerzas están orientadas en la misma dirección pero en sentidos opuestos. La fuerza que ejerce el resorte es directamente proporcional a la deformación x que experimenta el resorte y actúa en sentido opuesto a la misma, este comportamiento se denomina ley de Hooke y se expresa matemáticamente por la relación siguiente.

$$\mathbf{Fr} = - K\, x\, \mathbf{u}$$

La constante K se denomina constante elástica del resorte



Cuando el resorte se estira desde su posición de equilibrio una distancia x **u**, la fuerza ejercida por el resorte realiza un trabajo mecánico sobre el bloque, el cual se evalúa del modo siguiente

$$dWr = \mathbf{Fr} \circ d\mathbf{x} = Fr\ dx\ \cos(\alpha)$$

En vista que la fuerza Fr y la deformación x están en sentidos opuestos, el ángulo α que forman ambos vectores es 180°; por lo tanto cos (α) = -1. El trabajo mecánico realizado por la fuerza que ejerce el resorte sobre el bloque es dado por la integral siguiente

$$Wr = \int_0^x -K\,x\,dx = -K\int_0^x x\,dx = -\frac{K\,x^2}{2}$$

Si durante el estiramiento suponemos que la fuerza externa en todo momento iguala en magnitud a la fuerza del resorte, el trabajo mecánico realizado por la fuerza externa sobre el bloque será

$$Wext = \int_0^x Fext \circ dx = \int_0^x Kx\ dx\ \cos(\alpha\alpha = K\cos(0)\int_0^x x\ dx = \frac{K\,x^2}{2}$$

3.1.4) TRABAJO REALIZADO POR UN TORQUE ACTUANDO SOBRE UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE FIJO:

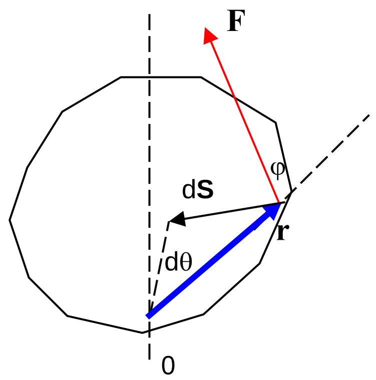
Consideramos un torque actúa sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, el cual posee un momento de inercia Io. Una fuerza externa F se aplica al cuerpo en el punto P, el trabajo realizado por F cuando el objeto gira una distancia infinitesimal dS = r dθ; es dado por la siguiente expresión

$$dW = \mathbf{F} \circ d\mathbf{S} = (F\,\mathrm{sen}\ \alpha)\ r\ d\theta$$

De acuerdo con la descripción de la figura adjunta, F sen ϕ es la componente de la fuerza F a lo largo del desplazamiento; de acuerdo con esta figura la componente radial de la fuerza F no realiza trabajo debido a que es perpendicular al desplazamiento.

En vista de que la magnitud del torque producido por **F** en torno del punto o se define como τ = r F sen ϕ, podemos escribir el trabajo efectuado por la rotación infinitesimal como

$$dW = \tau \, d\theta$$



SESION DE APRENDIZAJE 3.2: TRABAJO Y ENERGIA (II)
COMPETENCIA GENERAL:

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de movimiento de una partícula, tomando como base principios, leyes y conceptos acerca energía.

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Comprende los conceptos de potencia, energía cinética.
2. Relaciona el trabajo mecánico realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo con el cambio de energía cinética que experimenta.
3. Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con las competencias mencionadas previamente.

3.2.1) POTENCIA MECANICA:

La potencia mecánica es una magnitud física que valora la rapidez con que una fuerza realizas un trabajo mecánico. En el sistema internacional de unidades la potencia se mide en Watts (W), definida como el trabajo de un Joule (J) realizado cada segundo (s), 1 W = 1 J/s. La potencia se expresa mediante las expresiones siguientes.

$$Pot = \frac{W}{t}$$

$$Pot = \frac{F\ d\cos(\alpha)}{t} = F\ V\ \cos(\alpha)$$

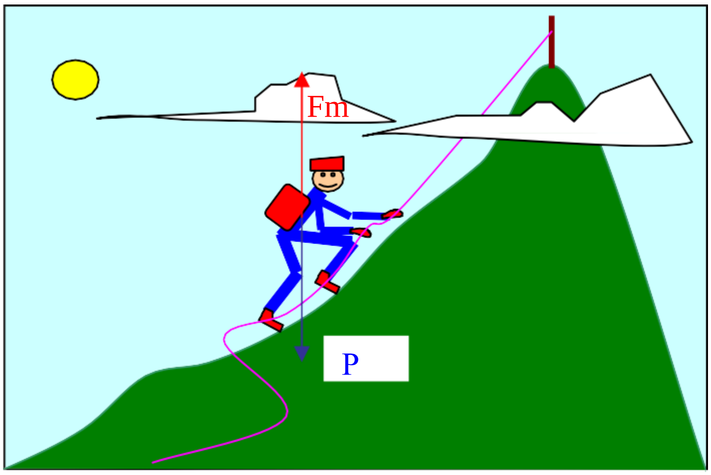
Donde,

Pot: potencia mecánica desplegada por la fuerza, (W).
W: trabajo realizado por la fuerza, (J).
t: tiempo en que se realiza el trabajo, (s).
F.cos(α): componente de la fuerza en la dirección de la velocidad, (N).
V: velocidad con que se desplaza el cuerpo, (m/s).
α: ángulo formado por la velocidad del cuerpo y la fuerza.

La potencia entregada por una fuerza que actúa sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo se obtiene al dividir la expresión para el trabajo infinitesimal que realiza dicha fuerza entre un instante de tiempo infinitesimal dt, y considerando que la potencia instantanea Pot entregada por la fuerza(la tasa a a la cual **F** realiza trabajo) es Pot = dW/dt; la velocidad angular a la que gira el cuerpo es $\omega = d\theta/dt$; obtenemos la expresión para la potencia.

$$Pot = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\ \omega$$

Ejercicio: Un alpinista asciende a una montaña cuya cima se encuentra ubicada a una altura de 1000 (m) desde la base, el alpinista tiene una masa corporal de 70 (Kg) y su vestimenta y mochila tienen una masa de 15 (Kg), la aceleración de la gravedad del lugar es 9,79 (m/s^2) y realiza la faena en 2 horas.



A) Calcule el peso total del alpinista.

$$\mathbf{P} = (mc + mv).\mathbf{g}$$

$$\mathbf{P} = (70 + 15)(Kg)9{,}79(m/s^2)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{P} = 832{,}15\,\mathbf{j}\,(Kg.m/s^2) = 832{,}15\ \mathbf{j}\,(N)$$

B) Determine la fuerza muscular necesaria para que el alpinista levante su peso con velocidad constante en la dirección vertical.

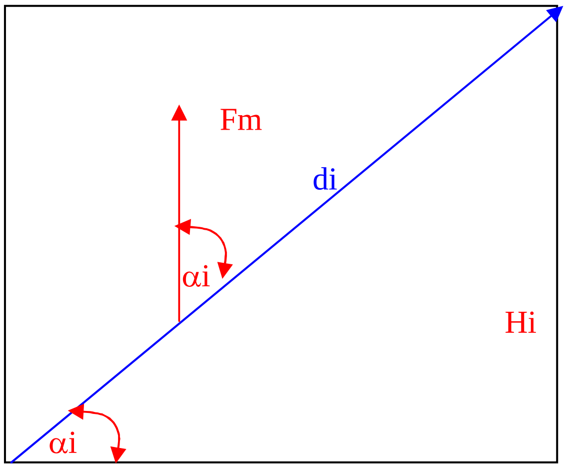
Durante el ascenso el alpinista ejerce una fuerza de tracción muscular que extiende las piernas como palanca ínter potente empujando el suelo hacia abajo y a su cuerpo hacia arriba. Al mismo tiempo el suelo ejerce una fuerza de reacción normal **N** de la misma intensidad pero de sentido contrario sobre el cuerpo la cual se transmite a través de los huesos elevando el centro de gravedad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza muscular que actúa elevando el centro de gravedad del cuerpo es igual en intensidad y sentido a la fuerza normal.
En vista que el ascenso se realiza con velocidad constante, ó aceleración cero, la suma de fuerzas en la dirección vertical debe ser igual a cero.

$$\mathbf{Fm} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Fm} - 832{,}15\ \mathbf{j}\,(N) = 0$$

$$\mathbf{Fm} = 832{,}15\,\mathbf{j}\,(N)$$

C) Determine el trabajo mecánico realizado por la fuerza muscular durante el ascenso del alpinista.



En el gráfico adjunto se representa el i-ésimo de los n tramos de que está compuesta la trayectoria de ascensos.
El trabajo total realizado se obtiene sumando los trabajos realizados en cada uno de los tramos, usando la expresión siguiente

$$W = \sum_{i=1}^{n} Fm.(di.\cos(\alpha i))$$

$$W = Fm.\sum_{i=1}^{n} Hi = Fm.\ H$$

$$W = 832{,}15\ (N)1000\ (m)$$

$$W = 832\ 15\ 0\ (N.m) = 832150\ (J)$$

D) Determine la potencia mecánica promedio desarrollada por la fuerza muscular durante el ascenso.

$$Pot = \frac{W}{t}$$

$$Pot = \frac{832150\,(J)}{2(h)}\left(\frac{1h}{3\ 600\ s}\right)$$

$$Pot = 115{,}58\ (W)$$

3.2.2) ENERGIA CINETICA:

La energía cinética de un cuerpo es la capacidad de realizar trabajo que posee debido a su estado de movimiento. En el sistema Internacional de unidades se expresa en Joules (J). Dado un cuerpo de masa “m”; momento de inercia “Io”, respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad; velocidad lineal de su centro de gravedad “v”; que gira al mismo tiempo con velocidad angular “ωo” alrededor del mismo eje que pasa por su centro de gravedad.

La energía cinética del cuerpo posee una componente lineal dada por la siguiente expresión.

$$ECl = \frac{1}{2} mv^2$$

Donde,

ECl: componente lineal de la energía cinética, (J).

m: masa del cuerpo, (Kg.).

V: velocidad lineal del centro de gravedad del cuerpo, (m/s).

La componente rotacional de la energía cinética es dada por la siguiente expresión.

$$ECr = \frac{1}{2} Io\ \omega o^2$$

Donde,

ECr: componente rotacional de la energía cinética, (J).

Io: momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación que pasa por su centro de gravedad, (Kg m^2).

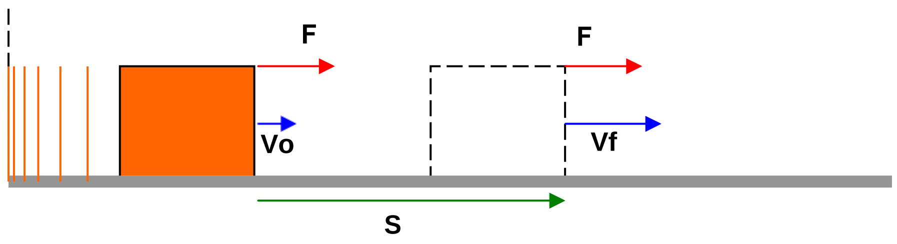
ωo: velocidad angular del cuerpo respecto al eje de rotación que pasa por su centro de gravedad, (rad/s).

La energía cinética total del cuerpo es la suma de las dos componentes.

$$EC = ECl + ECr$$

3.2.3) TEOREMA DEL TRABAJO ENERGIA:

Si se utiliza la segunda ley de Newton para analizar el movimiento de un cuerpo sólido, las soluciones pueden ser difíciles si las fuerzas que actúan son complejas. Se puede utilizar un planteamiento alternativo relacionando las velocidades del cuerpo con el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo.
Analizaremos este problema para una situación simple; supondremos una fuerza neta constante F que actúa en la dirección del desplazamiento S de un cuerpo de masa m (ver figura adjunta).



El trabajo mecánico neto realizado por la fuerza es dado por la expresión siguiente.

$$W = F\,S = (m\,a)\,S$$

Considerando las velocidades inicial Vo y final Vf del cuerpo, obtenemos las siguientes relaciones para la aceleración "a" y para el desplazamiento "S".

$$a = \frac{Vf - Vo}{t} \qquad y \qquad S = \frac{(Vf + Vo)\,t}{2}$$

Reemplazando estas últimas expresiones en aquella del trabajo mecánico, obtenemos la relación para el trabajo mecánico realizado por la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, conocida como el teorema del trabajo energía.

$$W = m\,\frac{(Vf - Vo)}{t}\,\frac{(Vf + Vo)\,t}{2}$$

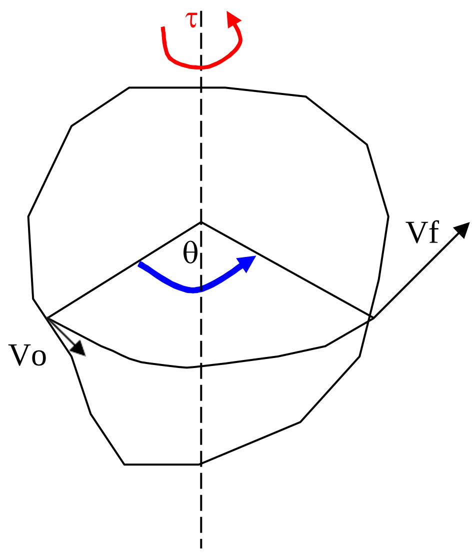
$$W = \frac{m\,Vf^{2}}{2} - \frac{m\,Vo^{2}}{2}$$

“El trabajo mecánico realizado por una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo de masa m es equivalente al cambio de energía cinética que experimenta el cuerpo”. La deducción se ha realizado para un caso simple de fuerza constante pero posee validez general.

Ahora supondremos un torque neto constante τ que actúa sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo en la dirección del desplazamiento angular θ de un cuerpo cuyo momento de inercia respecto al eje de rotación es Io (ver figura adjunta).
El trabajo mecánico neto realizado por el torque es dado por la expresión siguiente.

$$W = \tau\,\theta = \left(Io\ \alpha \right)\theta$$

Considerando las velocidades angulares inicial ωo y final ωf del cuerpo, obtenemos las siguientes relaciones para la aceleración angular “α” y para el desplazamiento angular “θ”.



$$\alpha = \frac{\omega f - \omega o}{t} \qquad y \qquad \theta = \frac{\left(\omega f + \omega o\right) t}{2}$$

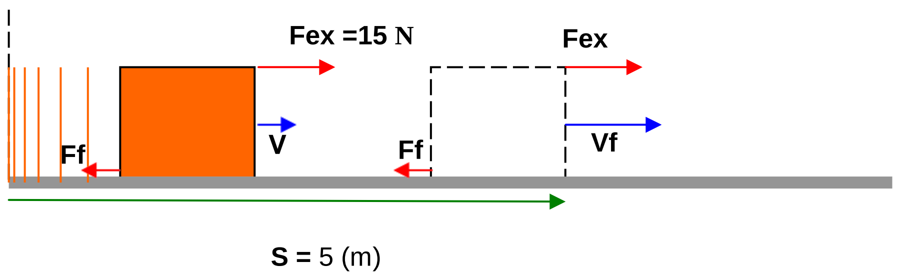
Reemplazando estas últimas expresiones en aquella del trabajo mecánico, obtenemos la relación para el trabajo mecánico realizado por el torque neto que actúa sobre el cuerpo, conocida como el teorema del trabajo energía para el movimiento rotacional.

$$W = Io \frac{(\omega f - \omega o)}{t} \frac{(\omega f + \omega o)\, t}{2}$$

$$W = \frac{Io\, \omega f^2}{2} - \frac{Io\, \omega o^2}{2}$$

“El trabajo mecánico realizado por un torque neto que actúa sobre un cuerpo de momento de inercia Io, que gira alrededor de un eje fijo, es equivalente al cambio de energía cinética rotacional que experimenta el cuerpo”. La deducción se ha realizado para un caso simple de torque constante pero tiene validez general.

EJERCICIO:
Un bloque cuya masa es m = 7 (Kg) inicialmente en reposo es jalado hacia la derecha una distancia S = 5 (m) a lo largo de una superficie horizontal rugosa con coeficiente cinético de fricción Uc = 0,15, por una fuerza externa horizontal constante Fex = 25 (N), ver figura adjunta.



A) Calcule la fuerza normal de contacto entre la superficie y el bloque.

Las fuerzas que actúan verticalmente sobre el bloque son el peso del bloque, P = m g, que actúa verticalmente hacia abajo (negativa) y la fuerza normal de contacto N entre el bloque y el suelo, que actúa verticalmente hacia arriba (positiva), en vista que el bloque está en reposo en la dirección vertical la suma de ambas fuerzas debe ser cero, esto conduce a la conclusión de que los módulos de ambas fuerzas deben ser iguales y sus sentidos opuestos.

$$N = mg = 15\ (Kg)\ 9{,}8\left(\frac{m}{s^2}\right) = 147\ (N)$$

B) Calcule el módulo de la fuerza de fricción Ff.

La fuerza de fricción actúa en sentido opuesto al desplazamiento S y por ende también a la fuerza externa Fex, el módulo de dicha fuerza es

$$Ff = Uc\ N = 0{,}15 \times 147(N) = 22{,}05\ (N)$$

C) Calcule la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo.

Las fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo se anulan, las fuerzas que actúan horizontalmente están en sentidos opuestos, por lo tanto el módulo de la fuerza neta es la diferencia de la mayor menos la menor fuerza, está fuerza apunta en el sentido de la fuerza externa por ser ésta la mayor fuerza.

$$F = Fex - Ff = 25\ (N) - 22{,}05\ (N) = 2{,}95\ (N)$$

D) Calcule el trabajo mecánico realizado por la fuerza neta.

La fuerza neta F y el desplazamiento S son paralelas y están en la misma dirección, por lo tanto el ángulo que forman sus direcciones positivas es $\alpha = 0$. El trabajo mecánico realizado por esta fuerza es

$$W = Fex\ \ S \cos(\alpha) = 2{,}95\ (N)\ 5\ (m) \cos(\ 0\ °\ ) = 14{,}75\ (N\ m) = 14{,}75\ (J)$$

E) Calcule la velocidad del cuerpo al final del trayecto.
Aplicamos el teorema del trabajo energía.

$$W = \frac{m\ Vf^2}{2} - \frac{m\ Vo^2}{2}$$

Dado que parte desde el reposo, Vo = 0, despejando Vf obtenemos.

$$Vf = \sqrt{\frac{2\ W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 14{,}75\ (J)}{7\ (Kg)}} = 2{,}05 \left(\frac{m}{s}\right)$$

SESION DE APRENDIZAJE 3.3: CONSERVACION DE LA ENERGIA (I) COMPETENCIA GENERAL:

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de movimiento de una partícula, tomando como base principios, leyes y conceptos de conservación de la energía.

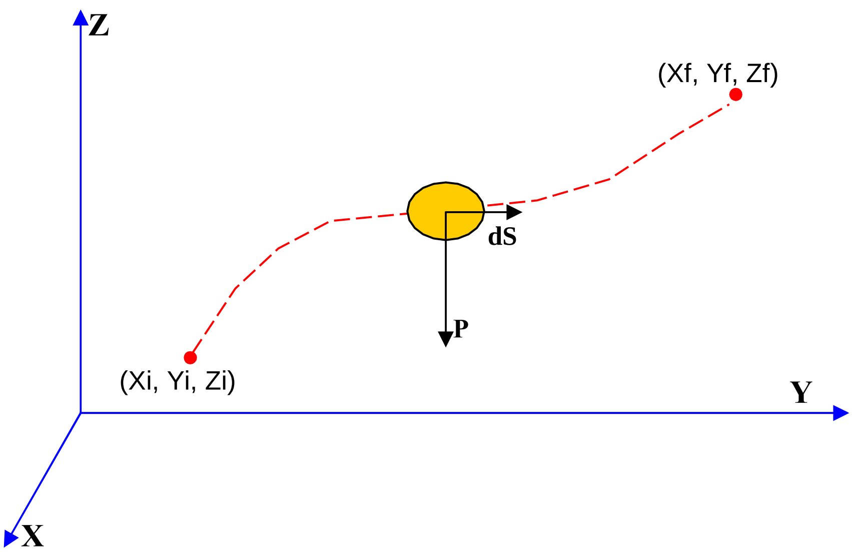
COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Comprende el concepto de fuerza conservativa.
2. Comprende los conceptos de energía potencial gravitatoria y de energía potencial elástica.
3. Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con las competencias mencionadas previamente.

3.3.1) FUERZAS CONSERVATIVAS:

Una fuerza es conservativa si el trabajo que hace sobre una partícula que se mueve entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria seguida por la partícula. Además, el trabajo echo por una fuerza conservativa ejercida sobre una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria cerrada es cero.

Analicemos el caso de la fuerza de la gravedad. Cuando un cuerpo se mueve cerca de la superficie de la Tierra desde un punto de coordenadas (Xi, Yi, Zi) hasta un punto de coordenadas (Xf, Yf, Zf) siguiendo una trayectoria cualquiera, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es (ver figura adjunta), es.



$$dW = \mathbf{P} \circ d\mathbf{S}$$

$$dW = (0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - mg\mathbf{k}) \circ (dX\,\mathbf{i} + dY\,\mathbf{j} + dZ\,\mathbf{k})$$

$$W = -\int_{zi}^{zf} m\,g\,dZ = m\,g(Zi - Zf)$$

Como puede observarse en la expresión final, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad (peso del cuerpo), depende únicamente de las coordenadas Zi y Zf, independientemente de la trayectoria que siga la partícula, y es nulo para una trayectoria cerrada, por lo tanto podemos concluir que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa.
Otro ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza que ejerce un resorte sobre un objeto unido a él, donde la fuerza está dada por la ley de Hooke, **F** = - K X **i**, donde X es la deformación del resorte desde una posición de equilibrio. Cuando el cuerpo se mueve desde una posición Xi hasta una posición Xf, el trabajo realizado por la fuerza del resorte es.

$$dW = - K\,X\,i \circ d\,X\,i = - K\,X\,d\,X$$

$$W = - K \int_{xi}^{xf} X\,dX$$

$$W = \frac{K\,Xi^2}{2} - \frac{K\,Xf^2}{2}$$

También podemos observar que el trabajo depende únicamente de las coordenadas inicial y final de la posición del cuerpo, siendo el trabajo nulo para una trayectoria cerrada, lo que nos indica que la fuerza ejercida por un resorte sobre un cuerpo sujeto a uno de sus extremos es conservativa.

3.3.2) ENERGIA POTENCIALY FUERZAS CONSERVATIVAS:

En el espacio donde existe un campo de fuerzas conservativo, si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza distinta que compensa exactamente a la fuerza conservativa, el trabajo realizado por ésta se almacena en forma de **energía potencial**, la cual puede

cambiar a otra forma de energía cuando quede bajo la sola influencia de la fuerza conservativa.
Debido a que el trabajo realizado por una fuerza conservativa que actúa sobre un cuerpo sólo es función de las coordenadas inicial y final de éste, podemos definir una **función de energía potencial EP** tal que el trabajo efectuado por la fuerza conservativa sea igual a la reducción en la energía potencial del cuerpo.

$$Wc = -\ \Delta\, EP = EPi - EPf$$

Esto significa que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al valor al valor negativo del cambio en energía potencial asociada.
El término energía potencial significa que el objeto posee energía potencial, o capacidad , ya sea de ganar energía cinética o de realizar trabajo cuando se le libera desde algún punto bajo la influencia de la gravedad o bajo la influencia de la fuerza de un resorte.
Muchas veces es conveniente establecer alguna posición particular, (Xi, Yi, Zi) y medir todas las diferencias de potencial respecto a él. Podemos entonces definir la función energía potencial como.

$$EPf\ (X,Y,Z) = -Wc + EPi\ (Xi,\ Yi,\ Zi)$$

A menudo el valor de Epi igual a cero, por lo tanto

$$EPf\ (X,Y,Z) = -Wc$$

Para el caso de la fuerza gravitatoria, cerca de la superficie de la Tierra, la función energía potencial gravitatoria se define por la expresión

$$EPGf\left(Z\right) = -Wc + mgZi\ = -\left(mgZi - mgZf\right) - mgZi\ = m\,g\,Z$$

Considerando el sistema Internacional de unidades, EPGf(Z) es la función energía potencial gravitatoria y se mide en (J), m es la masa del cuerpo y se mide en (Kg), g es la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra (9,8 m/s^2), Z es la altura que ocupa el cuerpo desde la superficie de la Tierra y se mide en (m).

Para el caso de la fuerza ejercida por un resorte sobre un cuerpo de masa m sujeto en uno de sus extremos, la función energía potencial elástica se define por la expresión

$$EPEfl(X) = -Wc + \frac{K\,Xi^2}{2} = -\left(\frac{K\,Xi^2}{2} - \frac{K\,X^2}{2}\right) + \frac{K\,Xi^2}{2} = \frac{K\,X^2}{2}$$

Considerando el sistema Internacional de Unidades, EPEf(X) es la función energía potencial elástica y se mide en (J), K es la constante elástica del resorte y se mide en (N/m), X es la deformación lineal del resorte desde su posición de equilibrio y se mide en (m).
Las fuerzas no conservativas son: las fuerzas aplicadas y las fuerzas disipativas o de fricción. Las fuerzas disipativas generalmente hacen un trabajo negativo.

3.3.3) CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA:

El teorema del trabajo – energía establece que el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo de masa m, es igual al cambio en energía cinética que experimenta el cuerpo.

$$Wneto = \Delta EC$$

El trabajo neto realizado sobre un cuerpo lo podemos desdoblar en: trabajo realizado por las fuerzas aplicadas (Wap), trabajo realizado por las fuerzas conservativas (Wc), trabajo realizado por las fuerzas de fricción (Wf), por lo tanto la expresión anterior queda expresada del modo siguiente.

$$Wap + Wc + Wf = \delta Ec$$

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas sobre el cuerpo es equivalente al negativo del cambio en energía potencia, Wc = - ΔEP. Reemplazando esta expresión en la anterior y despejando el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas, obtenemos

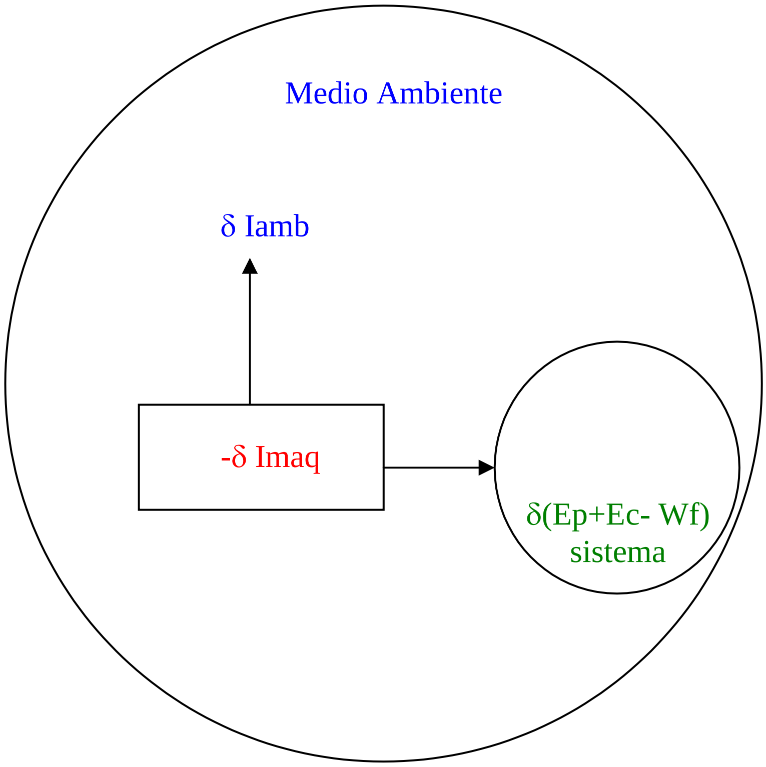
$$Wap = \Delta Ep + \Delta\delta Ec - Wf$$

Donde,
ΔEp: incremento de energía potencial del sistema, (J).
ΔEc: incremento de energía cinética del sistema, (J).
Wd: trabajo de fuerzas disipativas sobre el sistema, (J).

Wap: trabajo de fuerzas aplicadas sobre el sistema, (J).
Wf: trabajo realizado por las fuerzas de fricción, (J).

El principio de conservación de la energía establece que la energía no se crea ni se destruye solo se transforma.
El trabajo aplicado Wap se lleva a cabo mediante dispositivos llamados máquinas que convierten energía interna en trabajo. Ejemplos corrientes de máquinas son los motores de automóvil, las máquinas de vapor y los músculos animales.

Teniendo en consideración el principio de conservación de la energía aplicado al sistema y su entorno, la energía total del medio ambiente, la máquina y el sistema sobre el que la máquina produce trabajo se conserva. La figura esquemática que sigue, muestra que los sistemas componentes tomados en conjunto forman un solo sistema cerrado en el cual ninguna de las energías se destruye, sino solo se transforma de un componente a otro.



El rendimiento "e" de una máquina es la razón del trabajo aplicado que se produce a la energía interna utilizada para producirlo.

$$e = \frac{100(\%)\ Wap}{-\delta Imaq}$$

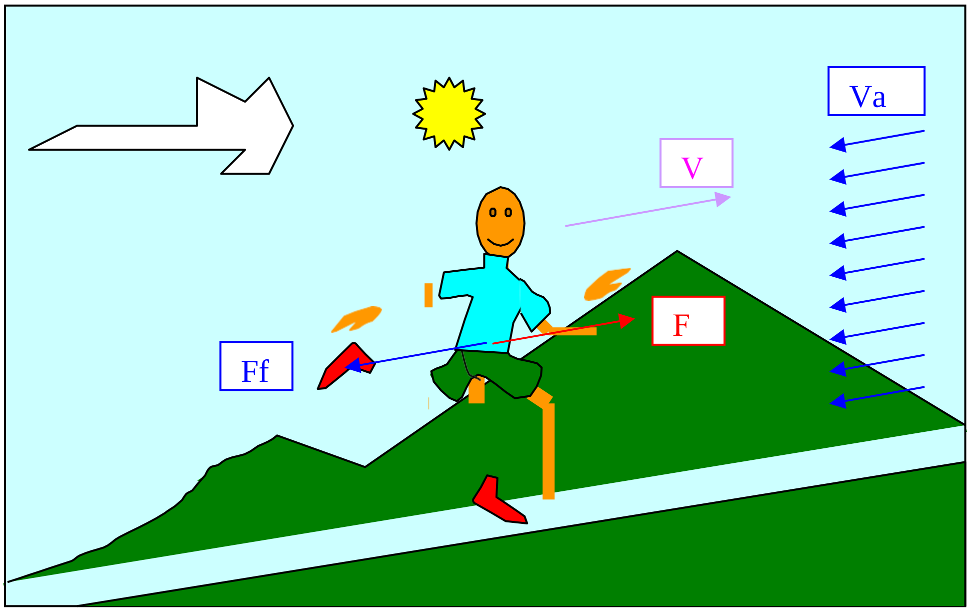
Donde,

e: eficiencia de la máquina, (%).

Wap: trabajo aplicado, (J).

- δ Imaq: cambio de energía interna de la máquina, (J).

EJERCICIO: Un atleta entrenado realiza una carrera de 10000 (m), manteniendo una velocidad de 2 (m/s) respecto a la superficie de la Tierra, al mismo tiempo que avanza asciende por una colina hasta llegar a la meta que se encuentra a 500 (m) sobre el nivel del punto de partida. La velocidad promedio del viento es –0,5 (m/s) respecto a la superficie de la Tierra. La masa total del atleta es 70 (Kg) y su masa corporal es mc = 68 (Kg), la aceleración de la gravedad del lugar es en promedio g = 9,79 (m/s) y la constante de proporcionalidad para la fuerza de rozamiento medida experimentalmente es b = 17,9 (Kg/s).



A) Determine la energía cinética del atleta. ¿Cuál es el cambio de energía cinética durante la prueba de maratón?

$$Ec = \frac{m v^2}{2}$$

$$Ec = \frac{70 (Kg) \left(2 (m/s)\right)^2}{2}$$

$$Ec = 140 \left(\frac{Kg.m}{s^2}.m\right) = 140 \ (N.m) = 140 \ (J)$$

El cambio de energía cinética del atleta durante la prueba es 140 (J), en vista que parte desde el reposo (EC = 0).

B) Determine el cambio de energía potencial gravitatoria del atleta durante la prueba.

$$\delta Ep = m.g.Z2 - mgZ1 = mg(Z2 - Z1)$$

$$\delta Ep = 70(Kg)\ 9{,}79\ (m/s^2)(500 - 0)(m)$$

$$\delta Ep = 342650 \left(\frac{Kg.m}{s^2}.m\right) = 342650\ (N.m) = 342650\ (J)$$

C) Determine la velocidad relativa del atleta respecto al aire.

$$\mathbf{Vr} = \mathbf{V} - \mathbf{Va}$$

$$\mathbf{Vr} = 2\ \boldsymbol{\mu}(m/s) - \left(-0{,}5\ \boldsymbol{\mu}\ (m/s)\right)$$

$$\mathbf{Vr} = 2{,}5\ \boldsymbol{\mu}\ (m/s)$$

D) Determine la fuerza de fricción que ejerce el aire sobre el cuerpo del atleta.

$$\mathbf{Ff} = -b.\mathbf{Vr}$$

$$\mathbf{Ff} = -17{,}9\left(\frac{Kg}{s}\right)2{,}5\ \boldsymbol{\mu}\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\mathbf{Ff} = -44{,}75\ \boldsymbol{\mu}\left(\frac{Kg.m}{s^2}\right) = -44{,}75\ \boldsymbol{\mu}\ (N)$$

E) Determine el trabajo realizado por las fuerzas disipativas (fuerzas de fricción).

$$Wd = Ff\ .d.\ \cos(\alpha)$$

$$Wd = 44,75(N)10000(m)\cos(180°)$$

$$Wd = -44750\,(N.m) = -44750\,(J)$$

F) Determine el tiempo que tarda el atleta en realizar su prueba física.

$$t = \frac{X - Xo}{V}$$

$$t = \frac{10000\ (m)}{2(m/s)}$$

$$t = 5000\ (s) = 83,33\ (mint) = 1,388\ (h)$$

G) Determine el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas (fuerzas musculares).

$$Wap = \delta Ep + \delta Ec - Wd$$

$$Wap = 342650(J) + 140\ (J) + 0(J) + 44750(J)$$

$$Wap = 387540\ (J)$$

H) Determine la energía interna aportada por el combustible del cuerpo del atleta, para lo cual considerará que la eficiencia del tejido muscular para realizar trabajo efectivo, en el caso de la carrera, es e = 15 %.

$$e = \frac{100(\%)\ Wa}{-\delta Imaq}$$

$$\delta Imaq = -\frac{100\ (\%)\ Wa}{e}$$

$$\delta Imaq = -\frac{100(\%)387540\ (J)}{15(\%)}$$

$$\delta Imaq = -\ 2'583600(J)$$

el signo menos indica que el combustible pierde energía para cederla al sistema con una eficiencia e = 15 (%).

I) El sistema (cuerpo humano del atleta), mantiene una temperatura constante (37 ℃), autorregulada por me canismos automáticos, por tal motivo la energía interna que gana del trabajo realizado por las fuerzas disipativas es vertida al medio ambiente. Determine la energía total vertida al medio ambiente durante la prueba de maratón.

$$\delta(Iamb + Imaq + Ep + Ec - Wd) = 0$$

$$\delta Iamb = -\ \delta Imaq - \delta Ep - \delta Ec + Wd$$

$$\delta Iamb = -\left(-\ 2'583600(J)\right) - 342650(J) - 140(J) + 44750(J)$$

$$\delta Iamb = 2'285560(J)$$

SESION DE APRENDIZAJE 3.4: CONSERVACION DE LA ENERGIA (II) COMPETENCIA GENERAL:

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de movimiento de una partícula, tomando como base principios, leyes y conceptos de la curva de energía potencial y la conservación de la energía.

COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

1. Comprende la relación existente entre energía potencia y fuerza conservativa.
2. Comprende el diagrama de energía mecánica total y energía potencial para estudiar el movimiento de los cuerpos.
3. Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con las competencias mencionadas previamente.

3.4.1) RELACION ENTRE FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGIA POTENCIAL:

Vimos previamente en las secciones anteriores que un modo de almacenar energía es en forma de energía potencial, la cual se relaciona con la configuración, o coordenadas, de un sistema.
Las funciones de energía potencial se asocian sólo con fuerzas conservativas. Si un objeto o campo realiza trabajo sobre algún objeto externo la energía se transfiere desde el objeto o campo hacia el objeto externo. El trabajo mecánico efectuado es

$$\int_{s1}^{s2} \mathbf{F} \circ d\,\mathbf{S} = -\Delta U$$

Esto significa que la energía que se transfiere como trabajo reduce la energía potencial del sistema del cual provino la energía. En esta expresión **F** es la fuerza ejercida por el objeto o campo sobre el objeto externo, y d**S** es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.
Si hay un desplazamiento infinitesimal, dS, podemos expresar el cambio infinitesimal de la energía potencial del sistema, dU, como sigue.

$$dU = -\mathbf{F} \circ d\mathbf{S}$$

$$dU = -(F \cos(a))\, dS = -Fs\, dS$$

En consecuencia la fuerza conservativa se relaciona con la función de energía potencial por medio de la relación.

$$Fs = -\frac{dU}{dS}$$

Es decir, la componente, en la dirección del desplazamiento, de la fuerza conservativa, es igual al negativo de la derivada de la función energía potencial respecto del desplazamiento S.

EJERCICIO:
Obtenga las fuerzas conservativas que corresponden a las funciones de energía potencial

A) Gravitatoria.

La función de energía potencial gravitatoria cercana a la superficie de la Tierra es U(Z) = m g Z, donde Z es la altura del cuerpo medida desde un nivel de referencia, que generalmente es la superficie de la Tierra. Por lo tanto la fuerza gravitatoria que experimenta un cuerpo ubicado cercanamente a la superficie de la Tierra es dada por.

$$Fz = -\frac{d}{dZ}\left(-m\ g\ Z \right) = -m\ g$$

B) Elástica de un resorte.

La función de energía potencial elástica almacenada en un resorte que en su extremo libre tiene sujeto un cuerpo y que se ha deformado una distancia X, es dada por la expresión U(X) = K X^2 / 2. Por lo tanto la fuerza conservativa que experimenta la masa sujeta al resorte es dada por

$$Fx = -\frac{d}{dX}\left(\frac{K\ X^2}{2} \right) = -K\ X$$

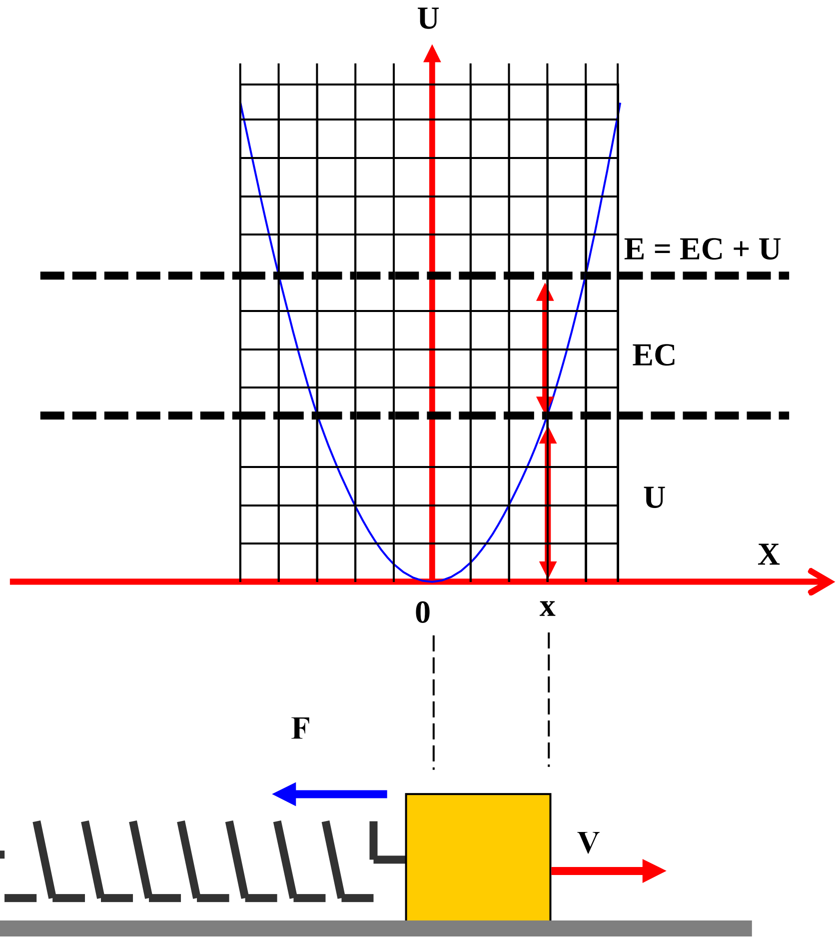
3.4.2) DIAGRAMAS DE ENERGIA Y EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA:

El movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo puede entenderse cuantitativamente por medio de su curva de energía potencial. Consideramos como sistema al cuerpo y al campo de fuerzas conservativo. En ese caso no se transfiere energía hacia o desde el sistema, por lo que

$$\Delta E = \Delta\ EC + \Delta\ U = 0$$

$$\Delta EC = -\Delta U$$

$$Fx = -\frac{d}{dX}\left(\frac{K X^2}{2}\right) = -K X$$



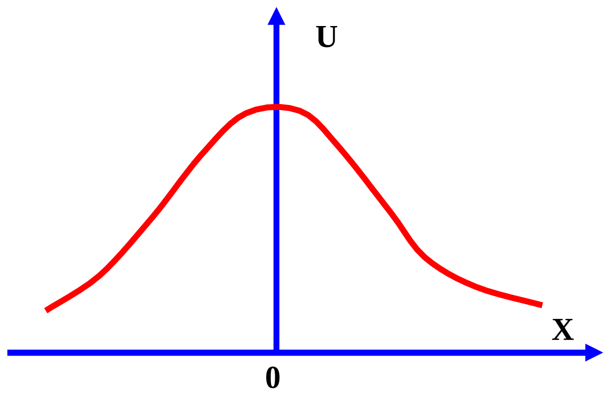
Consideramos como ejemplo el sistema masa – resorte, mostrado en la figura adjunta, La energía potencial elástica para este sistema es dada por la expresión U = K X^2 / 2. En la figura se ve la gráfica de esta función dependiendo de X, la fuerza se relaciona con X mediante la expresión

Es decir, la fuerza es igual al valor negativo de la pendiente de la curva U(X). Cuando la masa se pone en reposo en la posición de equilibrio (X = 0), donde F = 0, permanecerá ahí a menos que una fuerza externa actúe sobre ella. Si el resorte se extiende una distancia X desde el equilibrio, X es positiva y la pendiente dU/dX también es positiva; en consecuencia, Fx es negativa y la masa se acelera de regreso hacia X = 0. Si se comprime el resorte una distancia X, X es negativa y la pendiente también lo es; de manera que Fx es positiva y también en este caso la masa se acelera hacia la posición X = 0.

Concluimos que la posición X = 0 es una posición de **equilibrio estable.** Esto significa que cualquier movimiento que aleja al cuerpo de esta posición produce una fuerza dirigida hacia la posición de equilibrio. En general las posiciones de equilibrio estable corresponden a aquellos puntos para los cuales U(X) tiene un valor mínimo.

De la figura podemos observar que cuando la masa se encuentra en la posición X, esta posee una energía cinética EC y una energía potencial elástica U(X), que sumadas dan la energía mecánica total E; la cual permanece constante. Además, se puede concluir por la velocidad que posee el cuerpo, que la energía cinética se está convirtiendo en energía potencial elástica hasta que ésta última alcance su máximo valor (máxima extensión del resorte) equivalente a la energía mecánica total. Posteriormente la masa iniciará un movimiento de retorno acercándose al punto de equilibrio, durante este movimiento disminuye la energía potencial elástica y aumenta su energía cinética del sistema. Cuando la masa alcanza la posición de equilibrio poseerá la máxima energía cinética equivalente a la energía mecánica total E, y continuará su movimiento hacia la izquierda convirtiendo su energía cinética en energía potencial elástica hasta que el resorte alcance nuevamente su máxima energía potencial elástica (máxima compresión del resorte) equivalente a la energía mecánica total E. Como no hay pérdida de energía (no existe fricción) el movimiento de extensión y compresión del resorte continuará indefinidamente.

Consideramos un ejemplo donde la curva U(X) tiene la forma indicada en la siguiente figura



También en este caso F = 0 en X = 0, por lo que la partícula está en equilibrio en este punto. Sin embargo, si la partícula se desplaza una pequeña cantidad hacia la derecha (X > 0), en vista que la pendiente

a la curva es negativa en esta posición, la fuerza es positiva y tiende a alejar a la partícula de la posición de equilibrio: si la partícula se desplaza una pequeña distancia hacia la izquierda (X< 0), en vista que la pendiente a la curva es positiva en esta posición, la fuerza es negativa y tiende a alejar la partícula de la posición de equilibrio. A este tipo de equilibrio se le conoce como **equilibrio inestable**. En general las posiciones de equilibrio inestable corresponden a aquellos puntos de la función de energía potencial para los cuales U(X) posee un valor máximo.
Puede suceder una situación donde U(X) es constante en alguna región y, consecuentemente, F = 0. Esta condición se conoce como **equilibrio neutro o indiferente.** Pequeños desplazamientos, a partir de esta posición, no producen fuerzas restauradoras ni de ruptura. Una bola puesta en una superficie horizontal plana es un ejemplo de un objeto en un estado de equilibrio neutro.

EJERCICIO:
Un bloque de masa m = 2 (Kg) que reposa sobre una superficie horizontal sin fricción se sujeta al extremo libre de un resorte horizontal de masa despreciable cuya constante elástica es K = 3 (N/m). El resorte se estira de modo tal que el bloque se desplaza una distancia Xm = 0,05 (m) hacia la derecha y luego se suelta partiendo desde el reposo. Calcule.

A) La energía potencial elástica almacenada en el resorte, la energía cinética del cuerpo, la energía total del sistema, y la fuerza que experimenta el cuerpo, cuando la deformación del resorte es Xm = 0,05 (m).

$$EPm = \frac{K\,Xm^2}{2} = \frac{3\left(\frac{N}{m}\right)(0{,}05\ m)^2}{2} = 0{,}00375\ (J)$$

$$ECm = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{2(Kg)\left(0\left(\frac{m}{s}\right)\right)^2}{2} = 0\ (J)$$

$$F = -K\,X = -3\left(\frac{N}{m}\right)0.05\ (m) = -0{,}15\ (N)$$

$$E = EC + EP = 0\ (J) + 0{,}00375\ (J) = 0{,}00375 (J)$$

B) La energía potencial elástica almacenada en el resorte, la energía cinética del cuerpo, la velocidad del cuerpo, y la fuerza que experimenta el cuerpo, cuando la deformación del resorte es X = 0 (m).

$$EPm = \frac{K\,Xm^2}{2} = \frac{3\left(\frac{N}{m}\right)(0\ m)^2}{2} = 0\ (J)$$

$$EC = E - EP = 0{,}00375(J) - 0\ (J) = 0{,}00375\ (J)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ EC}{m}} = \sqrt{\frac{2x0.00375\,(J)}{2(Kg)}} = 0{,}06124\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$F = -K\,X = -3\left(\frac{N}{m}\right)0\ (m) = 0\ (N)$$

C) La energía potencial elástica almacenada en el resorte, la energía cinética del cuerpo, y la velocidad del cuerpo, cuando la deformación del resorte es Xm = -0,005 (m).

$$EPm = \frac{K\,Xm^2}{2} = \frac{3\left(\frac{N}{m}\right)(-0{,}05\ m)^2}{2} = 0{,}00375\,(J)$$

$$EC = E - EP = 0{,}00375(J) - 0{,}00375\ (J) = 0\ (J)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ EC}{m}} = \sqrt{\frac{2x0\,(J)}{2\ (Kg)}} = 0\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$F = -K\,X = -3\left(\frac{N}{m}\right)(-0.05\ m) = 0{,}15\ (N)$$

3.4.3)SISTEMAS CONSERVATIVOS EN TRES DIMENSIONES:

Cuando un cuerpo se encuentra bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo tridimensional, se tiene

$$\mathbf{F} \text{ o } d\mathbf{S} = -dU$$

$$(Fx\mathbf{i} + Fy\mathbf{j} + Fz\mathbf{k}) o (dX\mathbf{i} + dY\mathbf{j} + dZ\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}dX + \frac{\partial U}{\partial Y}dY + \frac{\partial U}{\partial Z}dZ\right)$$

$$(Fx\,\mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j} + Fz\,\mathbf{k}) \text{ o } (dX\,\mathbf{i} + dY\,\mathbf{j} + dZ\,\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial Y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial Z}\mathbf{K}\right) \text{ o } \left(dX\,\mathbf{i} + dY\,\mathbf{j} + dZ\,\mathbf{K}\right)$$

De esta expresión vectorial se concluye que

$$(Fx\mathbf{i} + Fy\mathbf{j} + Fz\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial Y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial Z}\mathbf{k}\right)$$

Para que esta igualdad vectorial se cumpla es necesario que las componentes vectoriales de cada miembro se igualen entre sí, resultando las siguientes expresiones.

$$Fx = -\frac{\partial U}{\partial X}; \quad Fy = -\frac{\partial U}{\partial Y}; \quad Fz = -\frac{\partial U}{\partial Z}$$

La penúltima expresión se puede expresar en forma vectorial compacta.

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

EJECICIO:

Un cuerpo de masa m = 2 (Kg) se encuentra bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo cuya función de energía potencial es de la forma $U(x, y) = 3x^2y - 7x$, donde U se expresa en (J) cuando las coordenadas se expresan en (m)

A) Encuentre la expresión de fuerza que actúa sobre el cuerpo afectado por dicho campo de fuerzas ubicado en un punto (x, y).

$$Fx = -\frac{\partial U}{\partial x} = -6\,x\,y + 7$$

$$Fy = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\ 3x^2$$

B) Determine el trabajo mecánico que realiza la fuerza conservativa **F**, cuando esta al actuar sobre el cuerpo lo desplaza desde el punto A

$$\mathbf{F} = Fx\,\mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j} = \left(-6xy + 7\right)\mathbf{i} + \left(-3x^2\right)\mathbf{j}$$

de coordenadas (1m, 2m) hasta el punto B de coordenadas (2m, 4m).

$$Wc = -\ \Delta U = U_A\ - U_B$$

$$Wc = (3x1^2\ x\ 2 - 7x2)(J) - (3x2^2\ 4 - 7x4)(J) = -\ 28\ (J)$$

C) Determine el cambio en energía cinética que experimenta el cuerpo bajo la acción del campo de fuerzas conservativas.

$$\Delta EC = -\ Wc = 28\ (J)$$

D) Determine el valor de la fuerza conservativa en los puntos A y B.

$$\mathbf{F} = Fx\,\mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j} = \left(-6xy + 7\right)\ \mathbf{i} + \left(-3x^2\right)\mathbf{j}$$

En el punto A tenemos

$$F_A\ = FAx\,\mathbf{i} + FAy\,\mathbf{j} = \left(-6(1)(2) + 7\right)\mathbf{i} + \left(-3(1^2)\right)\mathbf{j} = \mathbf{-}\,5\,\mathbf{i}\ \mathbf{-}\ 3\,\mathbf{j}$$

En el punto B

$$F_B\ = FBx\,i + FBy\,j = \left(-6(2)(4) + 7\right)i + \left(-3(2^2)\right)j\quad (N) = \mathbf{-}\ 41\ i\ \mathbf{-}\ 12\ j\ (N)$$

3.4.4) CONSERVACION DE LA ENERGIA:

Cuando sobre un sistema actúa fuerzas conservativas la energía mecánica total se conserva.

$$\Delta EC + \Delta EP = 0$$

$$\Delta(EC + EP) = 0$$

$$EC + EP = \text{constante}$$

La energía mecánica se pierde cuando están presentes fuerzas no conservativas, como la fricción.
En el estudio de la termodinámica encontraremos que la energía puede transformarse en energía interna del sistema. Por ejemplo, cuando un bloque desliza sobre una superficie rugosa, la energía mecánica perdida se transforma en energía interna almacenada temporalmente en el bloque y en la superficie, lo que se evidencia por un incremento mensurable en la temperatura de ambos. Veremos que en una escala submicroscópica esta energía interna está asociada a la vibración de las moléculas en torno a sus posiciones de equilibrio. Tal movimiento molecular tiene energía cinética y potencial. Por tanto, si a este incremento en la energía interna del sistema lo incluimos en nuestra expresión de la energía, la energía total se conserva.
Este es solo un ejemplo de cómo podemos analizar un sistema aislado y encontrar siempre que su energía total no cambia, siempre que se tomen en cuenta todas las formas de energía. Esto significa que, **la energía nunca puede crearse ni destruirse. La energía puede transformarse de una forma en otra, pero la energía total de un sistema aislado siempre es constante**.
Si una parte del universo gana energía en alguna forma, otra parte debe perder una cantidad igual de energía. No se ha encontrado ninguna violación a este principio.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

E:01) Cuando una persona se desplaza a lo largo de una trayectoria horizontal, su peso actúa verticalmente hacia abajo. ¿ Porqué esta fuerza no ejerce trabajo mecánico sobre la persona?

E:02) Si una persona saca de un pozo una cubeta de 30 (Kg) y realiza un trabajo mecánico de 6000 (J), ¿cuál es la profundidad del pozo?. Suponga que la velocidad de la cubeta permanece constante cuando se levanta.

E:03) Un grupo de perros arrastra un trineo de 150 (Kg) en un tramo de 3000 (m),
sobre una superficie horizontal a velocidad constante. Sí el coeficiente de fricción entre el trineo y la superficie es 0,10 determine a) el trabajo mecánico realizado por los perros y b) el trabajo mecánico realizado por la fuerza de fricción.

E:04) Una torna mesa gira bajo la acción de un torque constante de 5 (N m), si la torna mesa gira un arco $\theta f - \theta i = 2000$ (rad). ¿Qué trabajo mecánico ha realizado el torque actuante sobre la torna mesa?

E:05)¿ La energía cinética puede ser negativa? Explique.

E:06) ¿Qué puede decirse acerca de la velocidad de un cuerpo si el trabajo mecánico realizado por la fuerza neta es nulo?

E:07) Encuentre el tiempo que le tomaría subir un piso por las escaleras. Luego calcule la potencia necesaria para efectuar esta tarea. Exprese su respuesta en (W) y (HP), (1 Hp **=** 746 W).

E:08) Cuando un péndulo simple se balancea hacia delante y hacia atrás, las fuerzas que actúan sobre la masa suspendida son la de la gravedad, la tensión en la cuerda de soporte, y la resistencia del aire.
A) ¿Cuál de estas fuerzas, si hubiera alguna, no realiza trabajo sobe el péndulo? B) ¿Cuál de estas fuerzas hace trabajo negativo todo el tiempo durante su movimiento? C) Describa el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad mientras el péndulo se balancea.

E:09) ¿Qué puede decirse acerca de la velocidad angular de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, si el trabajo mecánico realizado por un torque neto que actúa sobre el cuerpo es nulo?

E:10) Nuestros músculos del cuerpo ejercen fuerzas cuando nos levantamos, empujamos, saltamos, etcétera. ¿Son fuerzas conservativas?

E:11) Explique las transformaciones de energía que ocurren durante un a) salto con garrocha, b) lanzamiento de bala, c) el salto de altura.
¿Cuál es la fuente de energía en cada caso?

E:12) En el salto con garrocha o en el salto de altura , ¿por qué el atleta intenta mantener su centro de gravedad lo más bajo posible cerca del punto máximo del salto?

E:13) Un bloque de masa m = 3 (Kg) se mantiene en reposo mientras comprime una distancia X = 15 (cm) a un resorte horizontal de masa despreciable, cuya constante elástica es K = 150 (N/m). Cuando el bloque se suelta, se desplaza una distancia d = 0,35 (cm) sobre una superficie horizontal rugosa antes de detenerse. Determine el coeficiente cinético de fricción entre el bloque y la superficie horizontal rugosa.

E:14) Una pistola de juguete usa un resorte para disparar una esfera de hule blando de masa m = 5 (g). La constante elástica del resorte es K = 8 (N/m), el cañón de la pistola mide un largo L = 15 (cm); y hay una fuerza de fricción constante Ff = 0,032 (N) entre el cañón y el proyectil. ¿Con qué velocidad sale disparado el proyectil desde el cañón si el resorte se comprime una distancia d = 5 (cm).

E:15) Un cono circular recto puede balancear sobre una superficie horizontal de tres maneras. Dibuje estas tres configuraciones de equilibrio e identifíquelas como estable, inestable o neutra.

E:16) ¿Una sola fuerza externa que actúa sobre una partícula cambia necesariamente a) su energía cinética b) ¿su velocidad?

E:17) Si se considera a la Tierra como una esfera perfecta ¿ cuánto cambia la energía potencial cuando usted a) camina sobre su superficie desde el polo Norte hacia el Ecuador? b) ¿Cae por un túnel desde el Polo Norte hasta el polo Sur y pasa por el centro de la Tierra?

E:18) ¿Cómo se vería la curva de energía potencial U(x, y) si una partícula estuviera en una región a) de equilibrio neutro? b) ¿de equilibrio inestable? c) ¿ de equilibrio estable?

E:19) Se lanza una bola en la atmósfera, hacia arriba y en línea recta. a) ¿En
qué posición su energía cinética es máxima? B) ¿ En que posición su energía potencial es máxima?

E:20.- Un nadador de estilo libre posee una masa corporal M = 70 (Kg), talla T = 1,70 (m), densidad promedio corporal D = 980 (Kg./m^3); desarrolla un entrenamiento de natación manteniendo una velocidad de 1,5 (m/s) durante media hora. La fuerza de fricción que ejerce el agua sobre la superficie corporal del nadador es de la forma Ff = C A ρ $v^2/2$, donde C = 1,2, A es el área del cuerpo perpendicular a la dirección del movimiento (m^2), ρ es la densidad del agua ($Kg./m^3$), v es la velocidad relativa del nadador respecto al agua

a).- Calcule la velocidad relativa del nadador respecto al agua.

b).- Estime el área promedio de la sección transversal del atleta.

c).- Estime la fuerza de fricción que ejerce el agua sobre la superficie del cuerpo del nadador.

d).- Determine la fuerza de impulsión que ejerce el nadador sobre su cuerpo, para vencer la fuerza de fricción.

e).- Determine el cambio de energía cinética del atleta durante la prueba, si parte desde el reposo.

f).- Determine la distancia recorrida por el nadador.

g).- Determine el trabajo realizado por la fuerza de fricción.

h).- Determine el trabajo efectivo realizado por las fuerzas musculares internas desarrolladas.

i).- Determine la potencia de trabajo físico efectivo desarrollado por el atleta.

E:21.- Un atleta lanza una bala de masa M = 2 (Kg), desde un punto cuyas coordenadas son x = 0 (m); y = 1,90 (m); con una velocidad inicial que forma un ángulo α = 45° con el plano horizontal; para lo cual estira rápidamente su brazo aplicando una fuerza constante, de modo tal que la bala recorre una trayectoria de longitud d = 0,50 (m) y el centro de gravedad del sistema brazo - antebrazo - mano (BAM), cuya masa es M' = 3,5 (Kg.), recorre una trayectoria d' = 0,30 (m). La bala impacta en el suelo horizontal en un punto cuyas coordenadas son x = 6,5 (m); y = 0 (m).

A) Determine el módulo de la velocidad **Vo** de la bala, en el instante que se desprende de la mano.

B) Calcule el tiempo que tarad la bala en alcanzar su altura máxima.

C) Calcule el tiempo de vuelo de la bala.

D) Calcule la altura máxima alcanzada por la bala.

E) Determine la aceleración de la bala en la dirección de su trayectoria, durante el estiramiento del brazo.

F) Determine la aceleración del centro de gravedad del BAM durante su estiramiento, suponiendo que al final de su trayectoria alcanza la misma velocidad que la bala.

G) Calcule las fuerzas aplicadas sobre la bala y sobre el centro de gravedad del brazo.

H) Suponiendo que tanto la bala como el centro de gravedad del BAM siguen una trayectoria paralela a la dirección del lanzamiento, estime el cambio de energía potencial de la bala y del BAM.

I) Estime el cambio de energía cinética del BAM y de la bala.

J) Despreciando la fuerza de fricción que ejerce el aire, estime el trabajo efectivo realizado por las fuerzas musculares.
K) Calcule el tiempo que tarda el estiramiento completo del brazo.
L) Estime la potencia promedio del trabajo físico efectivo, desplegada durante el estiramiento del brazo.
M) Estime la potencia máxima del trabajo físico efectivo, desplegada durante el estiramiento del brazo.

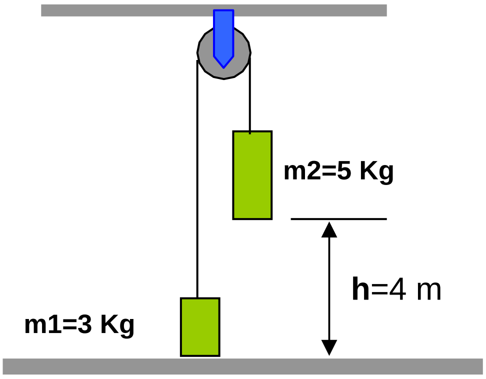
E:22) Bajo la influencia de la gravedad, un bloque de masa m se desliza hacia abajo por una pista de un cuarto de circunferencia sobre la cual hay fricción (Uc = coeficiente cinético de fricción); el radio de la pista es R.
A) determine la expresión para el cambio en energía mecánica del bloque.
B) Si el cambio en energía total del bloque es 42 (J), determine el trabajo mecánico realizado por las fuerzas conservativas y la energía disipada por las fuerzas no conservativas. Suponga que m = 2 (Kg), y R = 3,2 (m).
C) ¿Cuál es el valor del coeficiente cinético de fricción.

E.23) Una fuerza conservativa aislada que actúa sobre una partícula varía como $F = (-A\,x + B\,x^2)\,i$ (N), donde A y B son constantes y x está expresada en (m).
A) Calcule la energía potencial asociada a esta fuerza tomando U = 0 en x = 0.
B) Encuentre el cambio en la energía potencial y el cambio en la energía cinética cuando la partícula se mueve desde x = 2 (m) hasta x = 3 (m).

E:24) Una fuerza conservativa aislada Fx = (2x 4) (N), donde x está en (m), actúa sobre una partícula de masa m = 5 (Kg). Cuando la partícula se mueve a lo largo del eje x desde x= 1 (m) hasta x = 5 (m), encuentre.
A) El trabajo efectuado por esta fuerza.
B) El cambio en la energía potencial de la partícula.
C) La energía cinética de la partícula cuando x = 5 (m) si su velocidad en x = 1 (m) es 3 (m/s).

E:25) En el diagrama adjunto se muestra dos masas que están conectadas entre sí por medio de una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción y sin masa. La masa m1 se suelta desde el reposo. Utilizando la ley de la conservación de la energía.

A) Determine la velocidad de la masa m2 cuando ésta golpea el suelo.
B) Encuentre la altura máxima a la cual sube m1.



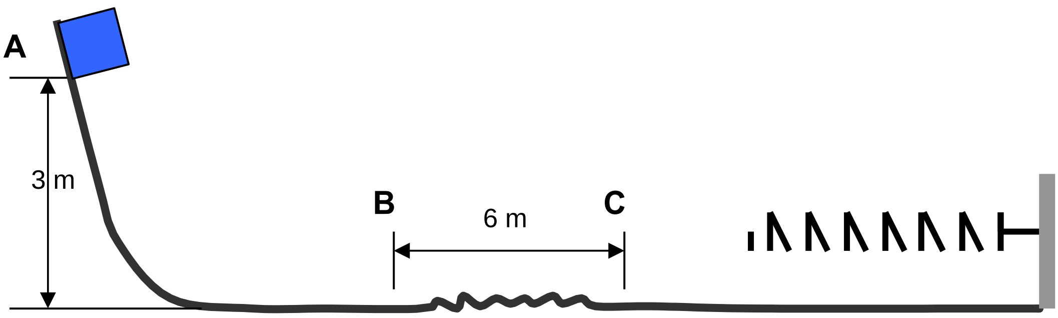
E:26) Una fuerza constante aislada **F** = 3 **i** + 5 **j** (N) actúa sobre una partícula cuya masa es m = 5 (Kg)partícula.
A) Calcule el trabajo realizado por esta fuerza si la partícula se mueve desde el origen hasta el punto que tiene el vector de posición **r** = 2 **i** - 3 **j** (m). ¿Este resultado depende de la trayectoria? Explique.
B) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en r si su velocidad en el origen es 4 (m/s)?
C) ¿Cuál es el cambio en su energía potencial?

E:27) Un paracaídas de masa m = 50 (kg) salta desde un avión a una altura h = 1000 (m) y llega al suelo con una velocidad de 5 (m/s).
A) Calcule la energía mecánica total cuando el paracaídas está en el avión.
B) Calcule la energía mecánica total cuando el paracaídas llega al suelo.
C) ¿Cuánta energía perdió por la fricción del aire durante el salto?

E:28) Un bloque de masa m = 0,25 (kg) se sitúa en la parte superior de un resorte vertical de constante K = 5000 (N/m) y empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte una distancia x = 0,1 (m). Después se suelta el bloque el cual se mueve hacia arriba y luego se separa del resorte.
A) Calcule la energía mecánica total del sistema bloque resorte cuando el resorte está comprimido.
B) Calcule la energía cinética del bloque cuando el resorte está en su posición de equilibrio (punto de separación del bloque y el resorte).

C) ¿A qué altura máxima sobre el punto de separación llega el bloque?

E:29) Un bloque de masa m = 10 (Kg) se suelta desde el punto A, la pista no ofrece fricción excepto en la parte BC, de 6 (m) de longitud. El bloque se mueve hacia abajo por la pista, golpea un resorte de constante elástica K = 2250 (N/m) y lo comprime una distancia x = 0,3 (m) desde su posición de equilibrio antes de quedar momentáneamente en reposo.



A) Calcule la energía mecánica total del bloque cuando se encuentra en el punto A.
B) Calcule la energía mecánica total del sistema bloque resorte cuando el bloque ha comprimido todo el resorte.
C) Calcule la pérdida de energía mecánica debido a la fricción en la región BC.
D) Determine el trabajo mecánico realizado por la fuerza de fricción en la región BC.
E) Calcule la fuerza de fricción entre el bloque y el piso en la zona BC.
F) Calcule la fuerza normal que mantiene unidos el bloque y el piso en la zona BC.
G) calcule el coeficiente cinético de fricción entre el bloque y el piso en la zona BC.

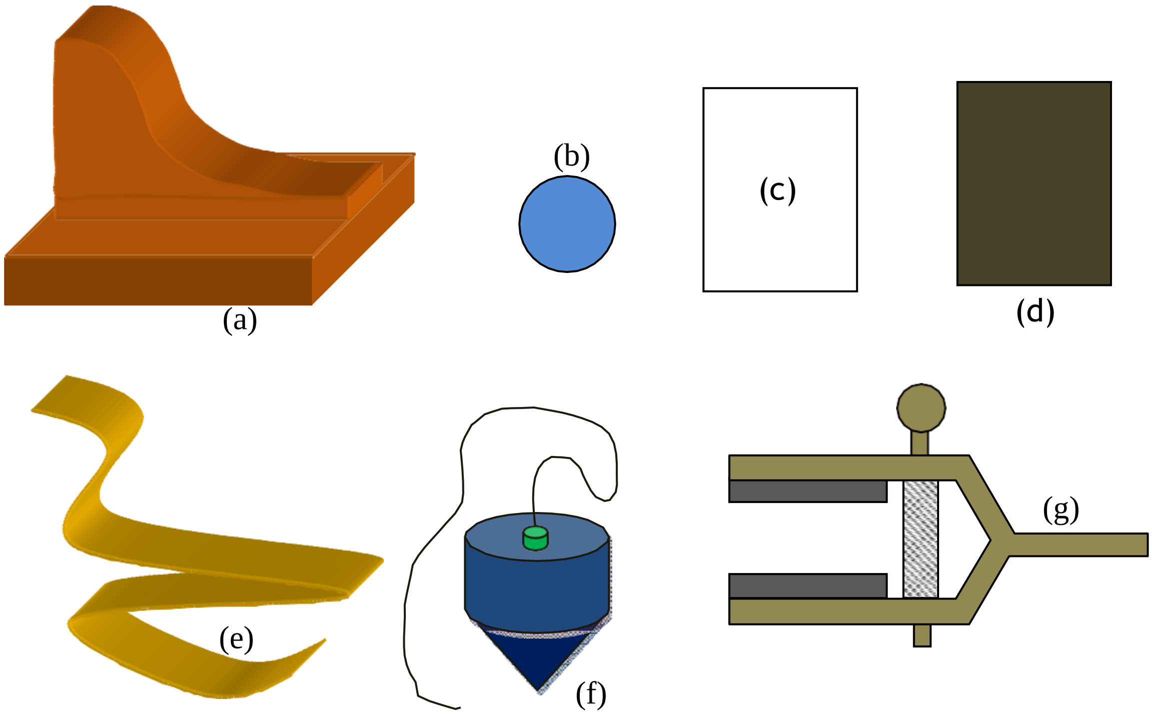
PRACTICA DE LABORATORIO # 03: ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA Y RODAMIENTO EN RAMPAS

I. Objetivo:

1. Aplicar el principio de conservación de la energía, movimiento bidimensional, para determinar parámetros cinemáticos de movimiento translacional y rotacional de esferas que ruedan sobre rampas.
2. Evaluar los errores experimentales aleatorios del experimento, usando métodos estadísticos.

II. Material y equipo

3. Una rampa para rodamiento de esferas, (a).
4. Una esfera metálica, $\phi = 1 – 2$ cm, (b).
5. Una hoja de papel bond, A – 4, (c).
6. Una hoja de papel carbón, (d).
7. Una cinta métrica, (e).
8. Una plomada, (f).
9. Una pinza sujetadora, (g).



III. Fundamento Teórico

A) Movimiento Parabólico

Cuando la esfera metálica se separa de la rampa en el punto B, posee una velocidad V_B, y describe una trayectoria parabólica hasta que impacta en el suelo a una distancia X medida desde el punto 0.

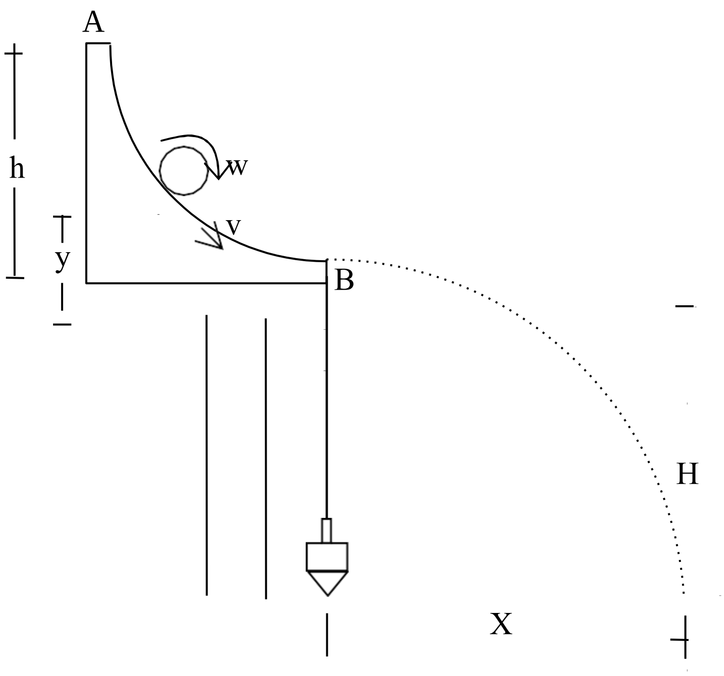


Fig. 2: Esquema de la instalación del equipo

Las ecuaciones que describen el movimiento de la esfera son:

$$H = \frac{g\,t^2}{2} \quad (1)$$

$$X = V_B\,t \quad (2)$$

Eliminando la variable tiempo entre las ecuaciones (1) y (2), y despejando luego la velocidad tangencial V_B, resulta la expresión:

$$V_B = \sqrt{\frac{g\ X^2}{2\ H}} \quad (3)$$

B) Conservación de la energía total:

Cuando la esfera rueda sobre la rampa a lo largo de los puntos A y B esta posee:

Energía potencial:

$$E_p = m\ g\ y \quad (4)$$

energía cinética translacional

$$Ec = \frac{m\ V^2}{2} \quad (5)$$

Energía cinética rotacional respecto a su centro de gravedad.

$$Ecr = \frac{I\ \omega^2}{2} = \frac{mR^2 W^2}{5} \quad (6)$$

El principio de conservación de la energía mecánica establece que la suma de las tres energías permanece constante a lo largo de la rampa, si se desprecian las fuerzas de fricción. En caso contrario es necesario considerar una energía Q que se irradia hacia el medio ambiente en forma de calor. La energía Q es equivalente al negativo del trabajo realizado por las fuerzas de fricción durante el rodamiento de la bola sobre la rampa. Se supone que la esfera metálica no se desliza sobre la rampa, lo cual se logra con una esfera metálica suficientemente pesada.
Si la esfera parte desde el reposo en el punto A.

$$(Ep + Ec + Ecr)_A = (Ep + Ec + Ecr)_B + Q \qquad (7)$$

Resultando la expresión

$$m\,gh = \frac{mV^2}{2} + \frac{m\,R^2\,W^2}{5} + Q \qquad (8)$$

En vista que la esfera se apoya sobre la rampa en los bordes de la canaleta de ancho (AC), la velocidad angular de la esfera metálica en el punto B de la rampa, se obtiene de la siguiente expresión, vea la Fig. 3.

$$W_B = \frac{V_B}{\sqrt{R^2 - (AC/2)^2}} \qquad (9)$$

De la ecuación (8) se despeja el calor Q liberado al medio ambiente, como consecuencia del trabajo realizado por las fuerzas de fricción.

$$Q = mgh - EC_B - ECR_B \qquad (10)$$

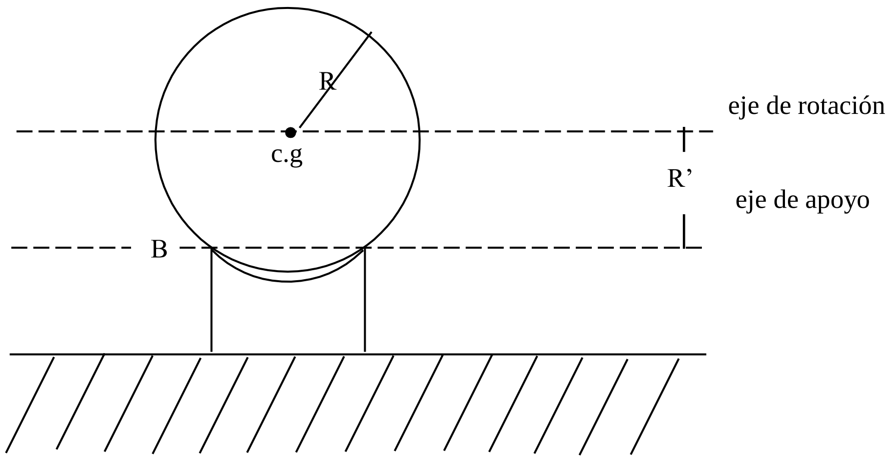


Fig. 3: Sección transversal de la esfera metálica sobre la rampa en el punto B

C) Tratamiento estadístico de errores aleatorios

C.1) Valor medio más probable

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (11)$$

<X>: valor medido más probable, (u).

Xi: i-ésimo valor medido, (u).

n : número de mediciones

u : unidad de medida de la magnitud

C.2) Desviación estándar de la muestra de medidas

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle X \rangle)^2}{n-1}} \qquad (12)$$

DE: desviación estándar de la muestra, (u)

C.3) Error Absoluto

$$EA = \frac{DE}{\sqrt{n}} \qquad (13)$$

EA: error absoluto aleatorio de la medición (μ)

C.4) Error porcentual

$$EP = \frac{EA\,x100(\%)}{\langle X \rangle} \qquad (14)$$

EP: Error aleatorio porcentual, (%)

C.5) Reporte de la medición

$$X = \langle X \rangle (u) \pm EA(u) \qquad (15)$$
$$X = \langle X \rangle (u) \pm EP(\%) \qquad (16)$$

IV. Procedimiento experimental

1. Instalar el equipo experimental al borde de la mesa de trabajo, como se muestra en la fig. 2, sujetando la rampa con la pinza.
2. Medir las distancias h y H, mostradas en la fig. 2, haciendo uso de la cinta métrica y la plomada.
3. Marcar con una tiza el origen del sistema de coordenadas X – Y, en el piso, haciendo uso de la plomada.
4. Medir el diámetro de la esfera metálica, y obtener luego el radio de la misma.
5. Medir el ancho de la canaleta de la rampa.
6. Medir la masa de la esfera.
7. Rodar la esfera metálica sobre la rampa, desde el punto A, partiendo desde el reposo. Ubicar aproximadamente el lugar donde impacta la esfera sobre el piso, y en ese lugar pegar con cinta adhesiva la hoja de papel bond, sobre la misma colocar la hoja de papel carbón con la cara mate hacia abajo.
8. Repetir cinco veces el rodamiento de la esfera metálica sobre la rampa, desde el punto A, partiendo desde el reposo.

9. Medir las posiciones X (ver esquema de la fig. 2), para cada punto de impacto, respecto al sistema de referencia ubicado en el piso.
10. Los datos de las mediciones deben ser llenados en los lugares correspondientes de la tabla de datos # 1.
11. Para estimar los errores aleatorios de la medición de los parámetros cinemáticos, utilizar la tabla de datos #2.

V. Datos

Tabla # 1
Radio de la esfera (R) = (cm)
Masa de la esfera (m) = (g)
Ancho de la canaleta de la rampa (AC) = (cm)
Altura de la rampa (h) = (cm)

I	Xi (cm)	V_Bi (cm/s)	W_Bi (rad/s)	EC_Bi (erg)	ECR_Bi (erg)	Qi (erg)
01						
02						
03						
04						
05						
$\sum$						

Tabla # 2

I	EC_Bi (erg)	EC_Bi - $\langle EC_B \rangle$ (erg)	$(EC_B\text{i} - \langle EC_B \rangle)^2$ (erg^2)
01			
02			
03			
04			
05			
$\sum$			

Tabla # 3

I	ECR_{Bi} (erg)	$ECR_{Bi} - <ECR_B>$ (erg)	$(ECR_{Bi} - <ECR_B>)^2$ (erg^2)
01			
02			
03			
04			
05			
$\sum$			

Tabla # 4

I	Qi (erg)	$Qi - <Q>$ (erg)	$(Qi - <Q>)^2$ (erg^2)
01			
02			
03			
04			
05			
$\sum$			

VI. Preguntas

1. Determine la velocidad tangencial de la esfera en el punto B de la rampa, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

2. Determine la velocidad angular de la esfera en el punto B de la rampa, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

3. Determine la velocidad angular de la esfera en el punto B de la rampa, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

4. Determine la energía cinética de la esfera en el punto B de la rampa, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

5. Determine la energía cinética rotacional de la esfera en el punto B de la rampa, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

6. Determine la cantidad de calor liberado al medio ambiente durante el rodamiento de la esfera, para cada caso. Reporte los datos en la tabla # 1.

7. Determine el valor más probable de la energía cinética de la esfera en el punto B (EC_B), la desviación estándar del conjunto de mediciones, el error absoluto, el error porcentual y reporte el resultado de la medición según la convención científica, reporte los datos en la tabla # 2.

8. Determine el valor más probable de la energía cinética rotacional en el punto B (ECR_B), la desviación estándar del conjunto de mediciones, el error absoluto, el error porcentual y reporte el resultado de la medición según la convención científica, reporte los datos en la tabla # 3.

9. Determine el valor más probable del calor liberado al medio ambiente (Q), la desviación estándar del conjunto de mediciones, el error absoluto, el error porcentual y reporte el resultado de la medición según la convención científica, reporte los datos en la tabla # 4.

10. Determine el valor más probable del trabajo mecánico realizado por las fuerzas de fricción durante el rodamiento de

la esfera (Wfr), la desviación estándar del conjunto de mediciones, el error absoluto, el error porcentual y reporte el resultado de la medición según la convención científica.

VII. Bibliografía

1. Serway R.: Física, tomo I, Edit. McGraw – Hill
2. Sears W., Semansky M.: Física general. Edit. Aguilar
3. Halliday D., Resnick F. Física para estudiantes de ciencia e Ingeniería, tomo I. Edit. CECSA
4. Halliday D., Resnick F. Fundamentos de física. Edit CECSA
5. Alonso M. Finn E. Física, tomo I. Edit. Fondo Educativo Interamericano.
6. Meiners: Experimentos de física. Edit. Limusa
7. Alvarenga Álvarez Beatriz. Física general con experimentos sencillos. Edit. HARLA
8. Langeman R.: Ciencia Física experimental. Edit NORMA.

UNIDAD IV: IMPETU Y CHOQUE DE PARTICULAS

COMPETENCIA GENERAL:

Comprende, analiza, plantea, resuelve casos de impulso, momento lineal, conservación del momento lineal de una partícula y de un sistema de partículas.

SESION DE APRENDIZAJE 4.1: IMPETU (I)

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:

1) Comprende el concepto impulso de una partícula, y resuelve ejercicios
haciendo participar dicho concepto.
2) Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con el concepto de momento lineal de una partícula.

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{V}$$

4.1.1) MOMENTO LINEAL DE UNA PARTICULA:

El momento lineal **P** de una partícula de masa "m" que se mueve con una velocidad **V** se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula.

El momento lineal es una cantidad vectorial que está en la dirección y sentido de la velocidad de la partícula, en el sistema Internacional de unidades se expresa en (Kg m/s). Newton denominó al momento lineal "cantidad de movimiento".
Podemos relacionar la segunda ley de la dinámica de Newton con la cantidad de movimiento, del siguiente modo.

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = m\,\frac{d}{dt}(\mathbf{V}) = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{V}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{P})$$

El momento lineal de una partícula también se relaciona con la energía cinética de una partícula del modo siguiente.

$$EC = \frac{m\ V^2}{2} = \frac{(m\ \mathbf{V})^2}{2\ m} = \frac{\mathbf{P}^2}{2\ m}$$

EJERCICIO:

Un electrón y un protón poseen la misma energía cinética igual 1, $5x10^{-13}$ (J). La masa del electrón es me = $9,11x10^{-31}$ (kg), y la masa del protón es mp = 1.67×10^{-27} (Kg).

A) Calcule el momento lineal del electrón.

$$Pe = \sqrt{2\ me\ Ee} = \sqrt{2 \times 9,11x10^{-31}(Kg)1,5x10^{-13}(J)} = 5,23x10^{-22}\left(\frac{Kgm}{s}\right)$$

B) Calcule el momento lineal del protón.

$$Pp = \sqrt{2\ mp\ Ep} = \sqrt{2x1,67x10^{-27}(Kg)1,5x10^{-13}\ (J)} = 2,24x10^{20}\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)$$

4.1.2) IMPULSO Y MOMENTO LINEAL:

Partiendo de la relación que expresa la Fuerza en función del momento lineal de una partícula podemos llegar a la conclusión que la acción de una fuerza

$$dP = F\ dt$$

durante un tiempo sobre una partícula puede cambiar el momento lineal de la misma.

El primer miembro de esta expresión representa una variación diferencial d**P** del momento lineal de la partícula. El segundo miembro representa la acción de la fuerza **F** durante un tiempo diferencial dt, que a su vez representa a un diferencial de impulso d**I.** Si integramos ambos miembros entre dos tiempos obtenemos.

$$\int_{\mathbf{P}i}^{\mathbf{Pf}} d\mathbf{P} = \int_{ti}^{tf} \mathbf{F}\ dt$$

Esta última expresión nos indica que el impulso I de una fuerza F que actúa sobre una partícula de masa “m” entre los tiempos Ti y Tf, es igual al cambio de momento lineal de la partícula. Este enunciado se conoce como el teorema del impulso y del momento lineal.

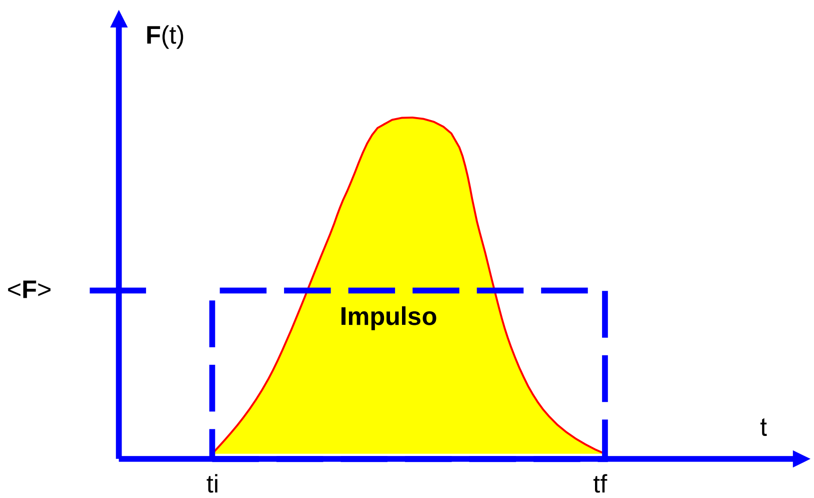
$$\mathbf{Pf} = \mathbf{Pi} + \int_{ti}^{tf} \mathbf{F}\ dt$$

De la definición anterior observamos que el impulso se interpreta geométricamente como el bajo la curva fuerza – tiempo. En la figura adjunta observa una fuerza que es diferente de cero en el intervalo de tiempo Δt = tf – ti. La dirección del vector impulso es la misma que el cambio de momento lineal de la partícula. Cuando afirmamos que se le da impulso a una partícula, queremos decir que un agente externo (fuerza) transfiere momento lineal a la partícula sobre la cual actúa.
En vista que la fuerza puede variar en el tiempo, como se ve en la figura adjunta, es conveniente definir una fuerza promedio en el tiempo <**F**>.

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{ti}^{tf} \mathbf{F}\ dt$$

Donde Δt = tf – ti, por consiguiente es posible expresar el teorema el impulso – momento lineal, de la manera siguiente.

$$dP = F\ dt$$



EJERCICIO: Una pelota de golf cuya masa es m = 50 (g) es golpeada con un palo de golf. La fuerza sobre la pelota varía desde cero cuando se realiza contacto hasta cierto valor máximo donde la pelota se deforma, volviendo a cero cuando la pelota se separa del palo. De este modo, la curva fuerza - tiempo se describe cualitativamente por la figura anterior. La pelota es lanzada con un ángulo de elevación α = 45° logrando un alcance horizontal R = 200 (m), si el palo de golf está en contacto con la pelota $4{,}5x10^{-4}$ (s), y la aceleración de la gravedad del lugar es g = 9,8 (m/s^2), calcule:

A) La velocidad inicial de la pelota, despreciando la resistencia del aire.

Despejando la velocidad inicial de la bola desde la ecuación para el alcance de un proyectil cuando se desprecia la resistencia del aire, obtenemos.

$$Vo = \sqrt{\frac{R\ g}{\operatorname{sen}(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{200\ (m)\ 9{,}8\ \left(\frac{m}{s^2}\right)}{\operatorname{sen}(2x45°)}} = 44{,}27\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

B) La magnitud del impulso impartido a la pelota de golf.

$$I = \Delta P = m\,(Vf - Vi) = 0{,}05\ (Kg)(44{,}27 - 0)\left(\frac{m}{s}\right) = 2{,}21\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)$$

C) La magnitud de la fuerza promedio ejercida por el palo de golf sobre la pelota.

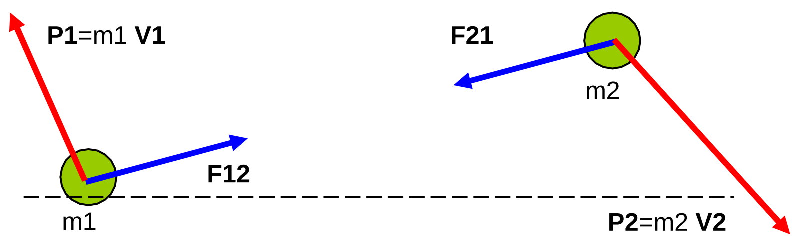
$$F = \frac{I}{t} = \frac{2{,}21\ \left(\frac{Kg\ m}{s}\right)}{4{,}5x10^{-4}\ (s)} = 4911\ (N)$$

SESION DE APRENDIZAJE 4.2: IMPETU (II) COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:

1) Comprende el concepto de conservación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula, y resuelve ejercicios haciendo participar dicho concepto.
2) Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con el concepto de conservación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula.

4.2.1) CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL PARA UN SISTEMA DE DOS PARTICULAS:

Consideramos dos partículas que interactúan entre sí y se encuentran aisladas de sus alrededores. Esto significa que cada partícula ejerce una fuerza sobre la otra pero que no existen fuerzas externas presentes. Aplicando la tercera ley de Newton, concluimos que ambas fuerzas, **F** y **F'**, son de la misma magnitud, actúan en la misma dirección, apuntan en sentidos opuestos y actúan en diferentes partículas



Suponemos que en algún instante el momento lineal de la partícula 1 es **P1** y que el momento lineal de la partícula 2 es **P2**. Si se aplica la segunda ley de Newton a cada partícula, podemos escribir.

$$\mathbf{F12} = \frac{d\,\mathbf{P1}}{dt} \quad \text{y} \quad \mathbf{F21} = \frac{d\mathbf{P2}}{dt}$$

Donde **F12** es la fuerza ejercida sobre la partícula 1 por la partícula 2 y **F21** es la fuerza ejercida sobre la partícula 2 por la partícula 1. La tercera ley de Newton nos dice que **F12** y **F21** son iguales en magnitud y dirección, se aplican en diferentes cuerpos y apuntan en sentidos opuestos, **F12** = - **F21**, condición que podemos expresar del siguiente modo.

$$\mathbf{F12} + \mathbf{F21} = \mathbf{0}$$

$$\frac{d\,\mathbf{P1}}{d\,t} + \frac{d\,\mathbf{P2}}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\mathbf{P}\,1 + \mathbf{P}\,\mathbf{2}\right) = \mathbf{0}$$

También podemos expresarla del modo siguiente.

En vista que la derivada respecto al tiempo del momento lineal total es cero, concluimos que el momento lineal total del sistema de dos partículas permanece constante en un espacio de tiempo en que la interacción de ambas partículas actúe. Indicando con subíndice i el estado inicial y con subíndice f el estado final, podemos expresar esta situación del siguiente modo.

$$\mathbf{Ptot} = \mathbf{P\,1} + \mathbf{P\,2} = \mathbf{constante}$$

$$\mathbf{P\,1\,i} + \mathbf{P\,2\,i} = \mathbf{P\,1\,f} + \mathbf{P\,2\,f}$$

La última expresión vectorial, representada en componentes cartesianas equivale a tres ecuaciones escalares, representado cada una de ellas, que los momentos lineales totales en las direcciones x, y , z se conservan de manera independiente.

$$P\,1\,x\,i + P\,2\,x\,i = P\,1\,x\,f + P\,2\,x\,f$$

$$P\,1\,y\,i + P\,2\,y\,i = P\,1\,y\,f + P\,2\,y\,f$$

$$P\,1\,z\,i + P\,2\,z\,i = P\,1\,z\,f + P\,2\,z\,f$$

Este resultado se conoce como la **ley de conservación del momento lineal**. Podemos enunciarla del modo siguiente: **"Siempre que dos partículas aisladas interactúan entre sí, su momento lineal total permanece constante".**

4.2.2) CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL PARA UN SISTEMA DE DOS PARTICULAS:

Cuando consideramos un sistema de N > 2 partículas, el cual está aislado de su medio externo, también cumple con el principio de conservación del momento lineal total. Considerando que las interacciones ocurren siempre entre cada posible par de partículas, la fuerza total **F** que actúa sobre el sistema es cero, por aplicación de la tercera ley de Newton a cada interacción particular entre dos partículas; esto conlleva a concluir que la suma de los momentos lineales de todas las partículas que equivale al momento lineal del sistema, permanece constante.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F12} + \mathbf{F21} + \mathbf{F13} + \mathbf{F31} + \dots + \mathbf{F1N} + \mathbf{FN1} + \dots + \mathbf{FN1} + \mathbf{F1N} + \dots = 0$$

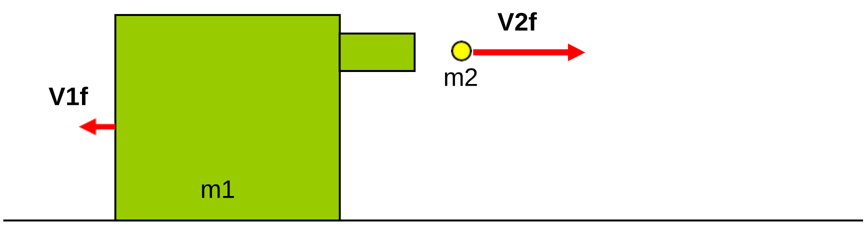
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{P1} + \mathbf{P2} + \dots + \mathbf{PN}\right) = 0$$

Esta última expresión nos conduce a afirmar que momento lineal total **P** de un sistema de N partículas, aislado de su medio externo, se conserva.

$$\mathbf{P1} + \mathbf{P2} + \dots + \mathbf{PN} = \textbf{constante}$$

EJERCICIO:

Un jugador de beisbol utiliza una máquina lanzadora de pelotas para ayudar a mejorar su promedio de bateo. Coloca la máquina de masa m1 = 50 (kg) sobre un estanque congelado, como se muestra en el esquema adjunto. La máquina dispara horizontalmente una bola de beisbol cuya masa es m2 = 0,15 (Kg), con una velocidad **V2f** = 36 **i** (m/s).



$$\mathbf{P2f} = m2 \quad \mathbf{V2f} = 0{,}15\ (Kg)\ 36\ \mathbf{i}\left(\frac{m}{s}\right) = 5{,}4\ \mathbf{i}\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)$$

A) Calcule el momento lineal de la bola, en el instante que despedida con velocidad **V2f**.

B) El momento de retroceso de la máquina en el instante que la bola sale disparada. Desprecie el rozamiento entre la máquina y la superficie de hielo.

El peso de la máquina y la fuerza normal que ejerce el suelo sobre ella, están en la dirección vertical (Y) y su suma es nula, por lo tanto, el sistema máquina - bola durante el disparo (interacción interna) no está aislado del medio externo pero el momento lineal en la dirección Y se conserva por ser la suma de fuerzas externas en esta dirección cero. En la dirección X por ausencia de fuerzas externas el sistema máquina - bola también conserva el momento lineal en la dirección X.

$$P1yi + P2yi = P1yf + P2yf$$

$$P1xf = P1xi + P2xi - P2xf = (0 + 0 - 5{,}4)\left(\frac{Kg\ m}{s}\right) = -5{,}4\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)$$

$$P1xi + P2xi = P1xf + P2xf$$

$$P1yf = P1yi + P2yi - P2yf = 0 + 0 - 0 = 0\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)$$

Por lo tanto, el momento de retroceso de la máquina es **P1f** = -5,4 **i** (Kg m/s).

C) Calcule la velocidad de retroceso de la máquina.

$$\mathbf{P1f} = m1\ \mathbf{V1f}$$

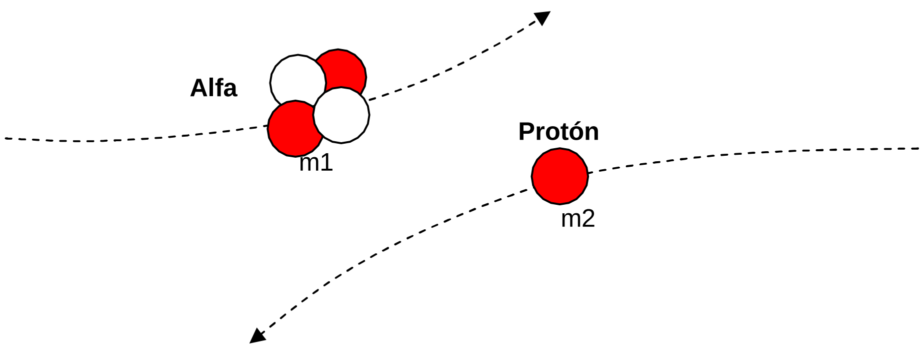
$$\mathbf{V1f} = \frac{\mathbf{P1f}}{m1} = \frac{-5{,}4\ \mathbf{i}\left(\frac{Kg\ m}{s}\right)}{50\ (Kg)} = -0{,}108\ \mathbf{i}\left(\frac{m}{s}\right)$$

SESION DE APRENDIZAJE 4.3: CHOQUE DE PARTICULAS (I)
COMPETENCIAS ESPECIFICAS:

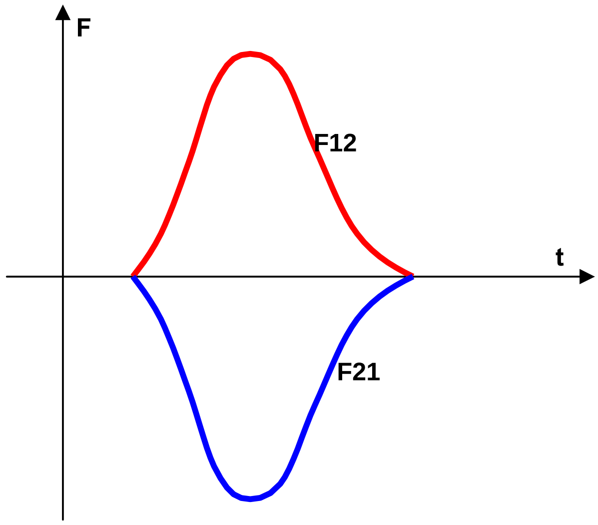
1) Comprende la ley de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía mecánica total durante el choque de partículas en una dimensión, y resuelve ejercicios haciendo participar dicha ley y conceptos relacionados.
2) Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con las leyes de conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía mecánica total durante el choque de partículas en una dimensión.

4.3.1) CHOQUE DE PARTICULAS:

Se utiliza el término choque para representar el evento de dos partículas que se aproximan entre si durante un breve instante de tiempo y que debido a la interacción entre ellas producen fuerzas impulsivas una sobre la otra. La fuerza debido al choque se supone mucho mayor que las otras fuerzas externas que pudieran experimentan las partículas
Para explicar y describir un fenómeno de choque de partículas, consideremos un choque en escala atómica como el choque entre un protón y una partícula alfa (núcleo de Helio). Como las dos partículas poseen carga eléctrica positiva, durante el acercamiento de las partículas durante el choque, estas se repelen fuertemente debido a la interacción electrostática, y nunca llegan a juntarse, sino que llegan a un punto de acercamiento máximo en que la fuerza de repulsión es más intensa. Cuando dos partículas de masas m1 y m2 chocan como lo muestra la figura adjunta.



Las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo de forma complicada, una de las cuales se describe en el gráfico siguiente



Si **F12** es la fuerza ejercida sobre m1 por m2, y si suponemos que no actúan fuerzas externas sobre las partículas, entonces el cambio en la cantidad de movimiento lineal de m1 debido al choque está dado por la ecuación.

$$\Delta \mathbf{P1} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F12}\, dt$$

Del mismo modo, si F21 es la fuerza ejercida sobre m2 por la partícula de masa m1, el cambio en la cantidad de movimiento lineal que experimenta la partícula m2 es dado por la expresión.

$$\Delta \mathbf{P2} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F21}\, dt$$

La tercera ley de Newton establece que la fuerza **F12**, ejercida sobre m1 por m2 y la fuerza **F21** ejercida sobre m2 por m1, son de igual módulo y dirección, pero son de sentidos opuestos y están aplicadas a diferentes cuerpos. Consecuentemente, concluimos que.

$$\Delta \ \mathbf{P1} = - \ \Delta \mathbf{P2}$$

Dado que el momento total del sistema es **Ptot** = **P1** + **P2,** concluimos que el cambio en la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas debido al choque es cero.

$$Ptot = P1 + P2 = constante \; \Delta P1 + \Delta P2 = 0$$

Dado que las fuerzas impulsivas consecuencia del choque son internas, no cambian la cantidad de movimiento total del sistema (solo las fuerzas externas pueden hacer esto). La conclusión general es: **"la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas antes del choque es igual a la cantidad de movimiento lineal total después de producido el choque"**.

4.3.2) CHOQUES ELASTICOS E INELASTICOS EN UNA DIMENSION:

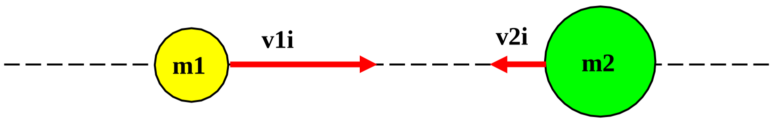
Las colisiones se clasifican considerando el criterio de conservación de la energía cinética del sistema.

Una **colisión inelástica** es aquella en la cual la energía cinética total del sistema no se conserva (no permanece constante antes y después del choque). Cuando una pelota choca con el piso pierde algo de energía cinética cuanto se deforma y está en contacto con el suelo, esta energía perdida se transfiere al medio ambiente en forma de calor, este es un caso de choque inelástico. Cuando un neutrón choca contra un núcleo de hidrógeno H - 1, durante el cual el neutrón es capturado por el núcleo de hidrogeno, convirtiéndose en un núcleo de H - 2, parte de la energía del sistema se transforma en energía potencial interna del sistema resultante, en este caso el choque es perfectamente inelástico.

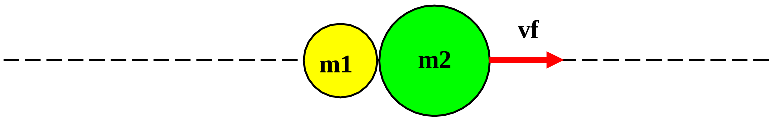
Una colisión elástica es aquella en la cual la energía cinética del sistema se conserva (permanece constante antes y después del choque). Los choques de bolas de billar y aquellos que ocurren entre las moléculas de un gas y las paredes del recipiente que las contiene, son muy elásticos.

A) COLISIONES PERFECTAMENTE INELASTICAS:

Considere dos partículas de masas m1 y m2, que se mueven con velocidades iniciales **v1i** y **v2i**, a lo largo de una línea recta, como se aprecia en la figura adjunta. Las dos partículas chocan de frente, se mantienen unidas y se mueven con cierta velocidad **vf** después del choque. En este caso, el choque es perfectamente inelástico. Podemos asegurar que se conserva el momento lineal, más no podemos decir lo mismo acerca de la energía cinética del sistema de partículas.



a) Antes del choque



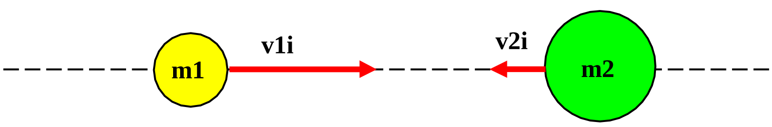
b) Después del choque

$$m1\,\mathbf{v1i} + m2\,\mathbf{v2i} = (m1 + m2)\,\mathbf{vf}$$

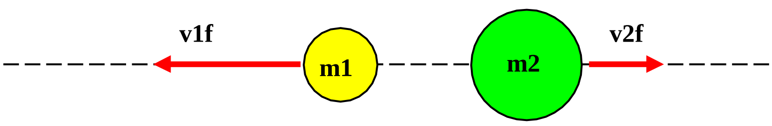
$$\mathbf{vf} = \frac{m1\,\mathbf{v1i} + m2\,\mathbf{v2i}}{m1 + m2}$$

B) CHOQUES ELASTICOS:

Consideremos las mismas partículas del caso descrito anteriormente, que experimentan un choque elástico frontal. En este caso, tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema de partículas se conserva (permanece constante antes y después del choque).



a) Antes del choque



b) Después del choque

$$m_1 \mathbf{v_{1i}} + m_2 \mathbf{v_{2i}} = m_1 \mathbf{v_{1f}} + m_2 \mathbf{v_{2f}}$$

$$\frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}$$

C) COEFICIENTE DE ELASTICIDAD:

Cuando resolvemos simultáneamente las ecuaciones correspondientes al caso elástico, podemos encontrar que las velocidades relativas de las partículas antes y después del choque se conservan.

De la ecuación correspondiente a la conservación de la energía cinética obtenemos:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

De la ecuación correspondiente a la conservación del momento lineal, obtenemos:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Dividiendo estas expresiones miembro a miembro, obtenemos:

$$1 = -\frac{(v_{1f} - v_{2f})}{(v_{1i} - v_{2i})}$$

Esta última expresión, la podemos interpretar del modo siguiente:

Para el caso, del choque perfectamente inelástico, esta razón es igual a cero, dado que las partículas se mueven conjuntamente con la misma velocidad después del choque.

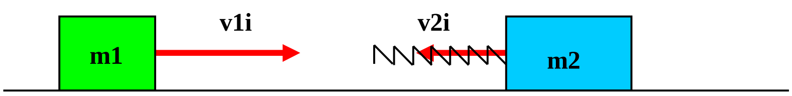
$$0 = -\frac{(v_{1f} - v_{2f})}{(v_{1i} - v_{2i})}$$

Entre los casos extremos de choque frontal perfectamente inelástico y choque frontal elástico, existen casos intermedios, por esta razón se ha definido el coeficiente de restitución elástico de un choque frontal "e", como el negativo de la razón entre los valores de las velocidades relativas de las partículas después del choque entre las velocidades de las partículas antes del choque. Este parámetro toma valores entre cero (0) y uno (1).

$$e = -\frac{(v1f - v2f)}{(v1i - v2i)}$$

EJERCICIO:

Un bloque de masa m1 = 1,5 (kg) se mueve inicialmente hacia la derecha con una velocidad de v1i = 4,0 (m/s) sobre una pista horizontal sin fricción, choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa m2 = 2,0 (Kg) que se mueve hacia la izquierda con una velocidad v2i = 2,5 (m/s). El resorte posee una constante elástica K = 600 (N/m).



A) En el instante que m1 se mueve hacia la derecha con una velocidad v1f' = 3 m/s), determine la velocidad v2f' de m2

Aplicando el principio de conservación del momento lineal, obtenemos:

$$m1\ v1i + m2\ v2i = m1\ v1f' + m2\ v2f'$$

$$v2f' = \frac{(1{,}5Kg)(4m/s) + (2Kg)(-2{,}5m/s) - (1{,}5Kg)(3\ m/s)}{2\ Kg} = -1{,}75(m/s)$$

B) determine que distancia x se ha comprimido el resorte en ese instante.

Usamos el principio de conservación de la energía.

$$\frac{m_1 \; v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 \; v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 \; v_{1f}'^2}{2} + \frac{m_2 \; v_{2f}'^2}{2} + \frac{K \; x^2}{2}$$

Reemplazando valores y despejando x, obtenemos:

$$x = \sqrt{\left[\frac{(1{,}5Kg)(4\,m/s)^2 + (2Kg)(-2{,}5\,m/s)^2 - (1{,}5Kg)(3\,m/s)^2 - (2Kg)(-1{,}75\,m/s)^2}{600(N/m)}\right]} = 0{,}1677(m)$$

C) Después del choque, el resorte acoplado a la masa m2 queda deformado una distancia Xf = 0,15 (m), debido a un seguro que se activó al momento de recuperar su longitud. Determine las velocidades finales de las masas m1 y m2.

Aplicando la ley de conservación del momento lineal y conservación de la energía, del sistema, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$m_1 v_{1i} + m_2 \; v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{m_1 \; v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 \; v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 \; v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 \; v_{2f}^2}{2} + \frac{K \; x_d^2}{2}$$

Si reemplazamos datos en estas ecuaciones, resulta el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$1{,}5 \; v_{1f} + 2 \; v_{2f} = 1$$

$$1.5 \; v_{1f}^2 + 2 \; v_{2f}^2 = 23$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, resulta:

$$v1f = -\,3{,}096\ (m/s)$$
$$v2f = 2{,}822\ (m/s)$$

D) Determine el coeficiente de restitución elástico para el choque frontal.

$$e = -\frac{v1f - v2f}{v1i - v2i} = -\frac{(-\,3{,}096\ m/s) - (2{,}822\ m/s)}{(4\ \ m/s) - (-\,2{,}5\ \ m/s)} = 0{,}912$$

SESION DE APRENDIZAJE 4.4: CHOQUE DE PARTICULAS (II)
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS:

1) Comprende la ley de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía mecánica total durante el choque de partículas en dos dimensiones, y resuelve ejercicios haciendo participar dicha ley y conceptos relacionados.

2) Comprende, analiza, plantea y resuelve ejercicios relacionados con las leyes de conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía mecánica total durante el choque de partículas en dos dimensiones.

4.4.1) CHOQUE DE PARTICULAS EN DOS DIMENSIONES:

Se trata del cuando dos partículas (1) y (2), de masas m1 y m2 que pueden moverse en un plano, chocan.

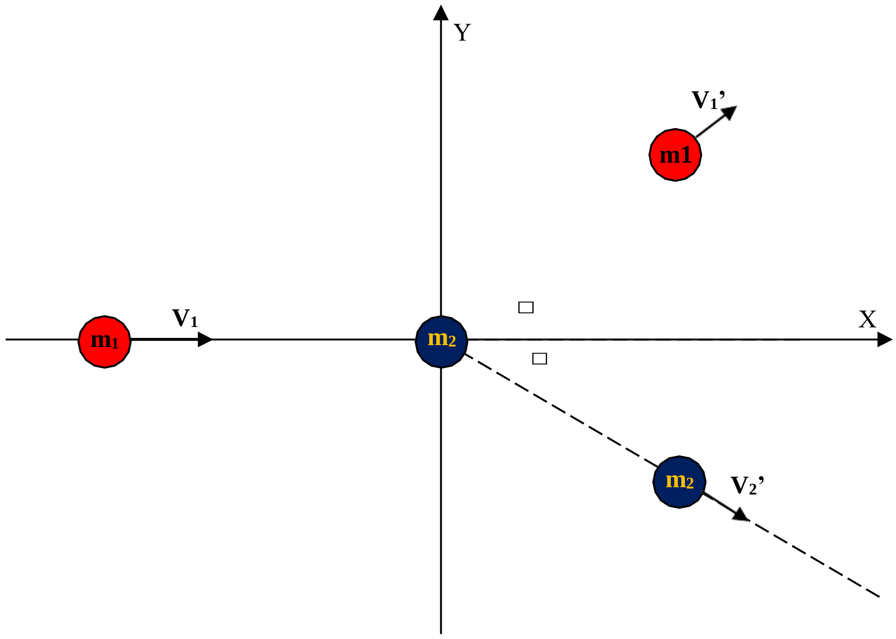


Fig. 04: esquema del choque de dos esferas de masas m1 y m2 que se mueven en un plano.

4.4.2) CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

Durante el choque se conserva la cantidad de movimiento o momentun lineal. Esto significa que la cantidad de movimiento total antes y después del choque deben ser iguales. En vista que se trata de una magnitud física de naturaleza vectorial, esta ley de conservación nos proporciona dos condiciones de naturaleza escalar que deben satisfacerse durante el choque.

Los símbolos primados son aquellos que corresponden a magnitudes de las partículas después del choque, el subíndice 1 o 2, identifica la partícula.

Definiendo un sistema de coordenadas cartesiano X-Y sobre el plano donde se realiza el choque de las partículas, la ecuación de conservación anterior produce las siguientes restricciones.
Conservación de la cantidad de movimiento total en la dirección X.

$$m_1 V_1 x + m_2 V_2 x = m_1 V_1' x + m_2 V_2' x$$

Conservación de la cantidad de movimiento total en la dirección Y.

$$m_1 V_1 y + m_2 V_2 y = m_1 V_1' y + m_2 V_2' y$$

4.4.3) CONSERVACION DE LA ENERGIA MECANICA:

Partimos del hecho de que el trabajo mecánico realizado por la energía interna de un sistema de partículas durante un choque es igual al cambio de energía cinética, más el cambio en cada una de las energías potenciales con que interactúan las partículas y que son causantes de las fuerzas externas que actúan ellas, menos el trabajo realizado por las fuerzas de fricción.

$$Wsist = \Delta EC + \sum_{i=1}^{n} \Delta EP_i - W_{fric}$$

Para la interacción entre dos partículas que chocan, de las cuales se puede medir sus velocidades y masas, es necesario reagrupar la expresión anterior en base a las energías de las partículas antes y después del choque.

$$EC1 + EC2 = EC1' + EC2' + \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta EPi - Wsist - W_{fric} \right]$$

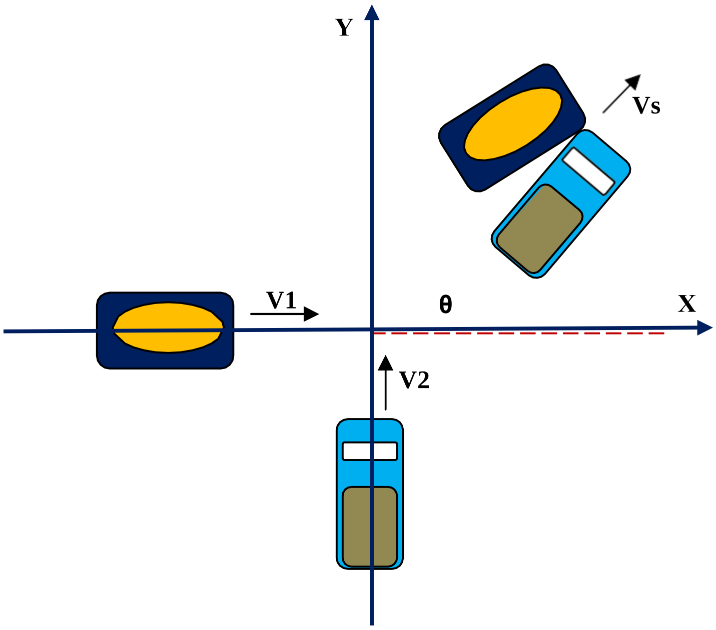
Las variables primadas representan el estado después del choque.

Si representamos la expresión entre paréntesis por la variable Q, obtenemos la expresión siguiente.

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} + Q'$$

Para choques perfectamente elásticos, la energía cinética del sistema de partículas antes del choque debe ser igual a su energía cinética después del choque y Q debe ser cero.
La energía Q es el balance del trabajo realizado por las fuerzas de fricción, la energía potencial almacenada en las esferas, el trabajo de deformación permanente realizado sobre las esferas durante la interacción, el trabajo mecánico realizado por la energía interna de las partículas.

EJERCICIO:
Un automóvil de masa m1 = 1500 (Kg) viaja en la dirección X^+ con una velocidad **V1** = 25 **i** + 0 **j** (m/s), choca en un cruce con una camioneta de masa m2 = 2500 (Kg) que viaja en dirección Y^+ con una velocidad V2 = 0 **i** + 20 **j** (m/s). El choque resulta perfectamente inelástico (los carros se mantienen unidos después del choque y un nivel se cambia una cantidad ΔZ = -2 (m), durante y después de la colisión los motores permanecieron apagados.



a) Calcule las componentes vectoriales cartesianas y el módulo de la velocidad del sistema de los carros enganchados después del impacto.

Considerando la conservación del momento lineal, obtenemos:

$$VSx = \frac{m1V1x + m2V2x}{m1+m2} = \frac{1500(Kg)\,25\left(\frac{m}{s}\right) + 2500\,(Kg)\,0\left(\frac{m}{s}\right)}{1500(Kg\,) + 2500(Kg)} = 9{,}3750\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$VSy = \frac{m1V1y + m2V\,2y}{m1+m2} = \frac{1500(Kg)\,0\left(\frac{m}{s}\right) + 2500(Kg)\,20\left(\frac{m}{s}\right)}{1500(Kg) + 2500(Kg)} = 12{,}50\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$VS = \sqrt{VS_x^2 + VS_y^2} = \sqrt{\left(9{,}3750^2 + 12{,}5^2\right)\left(\frac{m^2}{s^2}\right)} = 15{,}6250\left(\frac{m}{s}\right)$$

b) Calcule el ángulo θ de la dirección en que los carros se movilizan después del choque.

$$\Theta = ar\cos\left(\frac{VSx}{\sqrt{VS_x^2+VS_y^2}}\right) = ar\cos\left(\frac{9{,}3750\left(\frac{m}{s}\right)}{\sqrt{\left(9{,}3750^2+12{,}5^2\right)\left(\frac{m^2}{s^2}\right)}}\right) = 53(o)$$

c) Calcule los módulos de los momentos lineales de los vehículos antes y después del choque.

$$P1 = m1V1 = 1500(Kg)\,25\left(\frac{m}{s}\right) = 37500\left(\frac{Kg\,m}{s}\right)$$

$$P2 = m2V2 = 2500(Kg)\,20\left(\frac{m}{s}\right) = 50000\left(\frac{Kg\,m}{s}\right)$$

$$PS = (m1+m2)VS = 4000(Kg)\,15{,}625\left(\frac{m}{s}\right) = 62500\left(\frac{Kg\,m}{s}\right)$$

d) Calcule el cambio de energía cinética que experimentan los vehículos durante el choque.

$$\Delta EC = \frac{PS^2}{2\,m_S} - \frac{P1^2}{2m1} - \frac{P2^2}{2m2}$$

$$\Delta EC = \frac{62500^2\left(\frac{Kg^2 m^2}{s^2}\right)}{2x4000(Kg)} - \frac{37500^2\left(\frac{Kg^2 m^2}{s^2}\right)}{2x1500(Kg)} - \frac{50000^2\left(\frac{Kg^2 m^2}{s^2}\right)}{2x2500(Kg)} = -480468{,}75(J)$$

e) Calcule el cambio en energía potencial gravitatoria que experimentan los vehículos durante el choque.

$$\Delta EPG = (m1 + m2)\, g\, \Delta Z = 4000(Kg) 9{,}8 \left(\frac{m}{s^2}\right)(-\,2\ m) = -\,78400(J)$$

f) ¿Qué trabajo mecánico realizan los motores de los vehículos durante el choque?

En vista que los motores se apagaron el trabajo mecánico es Wsist = 0 (J).

g) Calcule la energía Q liberada en forma de calor (trabajo de las fuerzas fricción) y deformaciones permanentes de materiales.

Aplicando el principio de conservación de la energía.

$$Wsist = \Delta EC + \Delta EPG + Q$$
$$Q = 0(J) - (-480468{,}\ 75\ J) - (-\ 78400\ J) = 558868{,}\ 75(J)$$

4.4.4) CENTRO DE MASA:

El vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas se define como.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{r}_i}{\boldsymbol{M}}$$
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

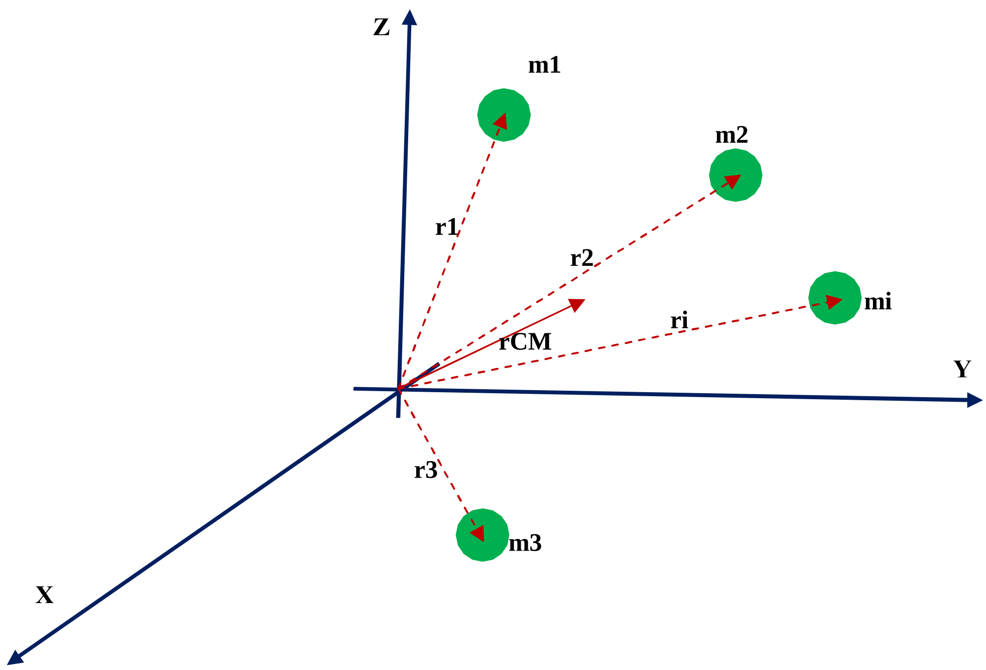
Donde,

$\mathbf{r}_{CM}$: vector de posición del centro de gravedad del sistema de partículas, (m).

m_i: masa de la i-ésima partícula, (Kg).

ri: vector de posición de la i-ésima partícula, (m).

M: masa total del sistema de partículas, (Kg).



El vector de posición de un cuerpo rígido puede obtenerse de la expresión integral.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\, dm$$

EJERCICIO:

Tres partículas cuyas masas y posiciones se indican en la tabla adjunta

i	mi (Kg)	Xi (m)	Yi (m)
01	3	0	0,5
02	5	1	0,5
03	4	0,5	0,75

a) Calcule las coordenadas del centro de gravedad del sistema de partículas.

Elaboramos la tabla siguiente:

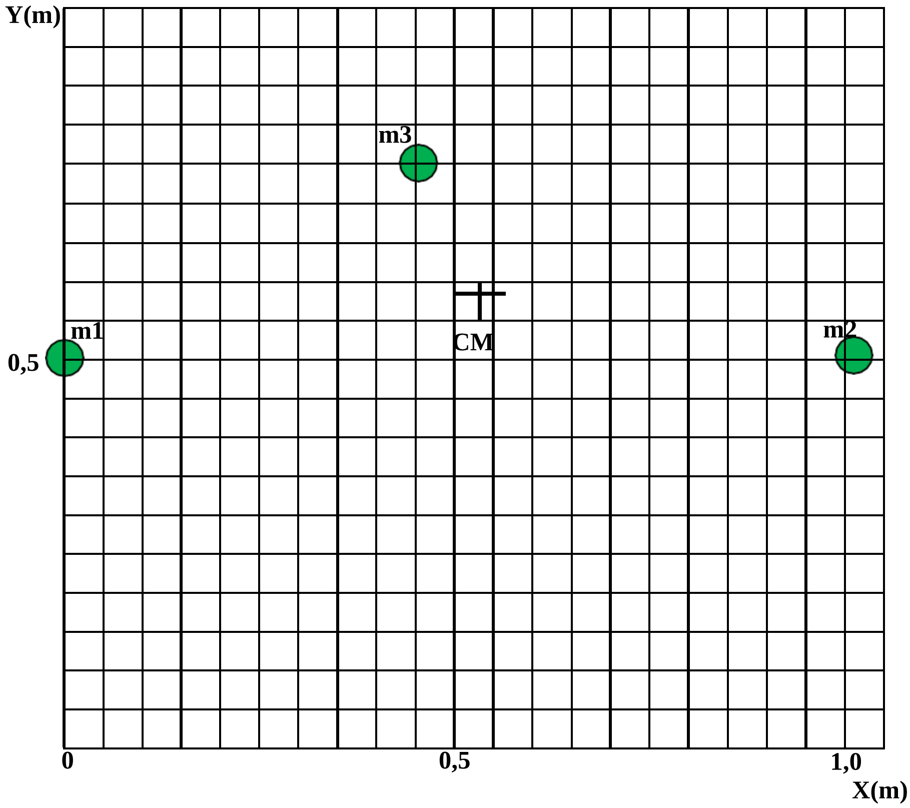
i	mi (Kg)	Xi (m)	Yi (m)	mi Xi (Kg m)	mi Yi (Kg m)
01	3	0	0,5	0	1,5
02	5	1	0,5	5	2,5
03	4	0,5	0,75	2	3
Σ	12			7	7

Realizamos las siguientes operaciones.

$$X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i X_i}{M} = \frac{7\ (Kg\ m)}{12(Kg)} = 0{,}5833(m)$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i Y_i}{M} = \frac{7\ (Kg\ m)}{12(Kg)} = 0{,}5833(m)$$

b) Confeccione una gráfica que represente las partículas y el centro de gravedad del sistema en el plano cartesiano.



4.4.5) MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS:

Si tomamos la derivada respecto al tiempo del vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas, obtenemos la expresión para la velocidad del centro de masa.

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{d\,\boldsymbol{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\,\boldsymbol{r}_i}{d\,t}$$

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i}{\boldsymbol{M}}$$

Donde,

Vi: velocidad de la i-ésima partícula, (m/s).

Si reacomodamos la ecuación anterior, obtenemos la expresión.

$$M\,\boldsymbol{V}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_{tot}$$

De la cual se concluye que el momento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa. El momento lineal del sistema es igual al de una partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\mathbf{V_{CM}}$.

Si derivamos respecto al tiempo la expresión para la velocidad del centro de masa, obtenemos la aceleración del centro de masa del sistema de partículas.

$$\boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{V}_{CM}}{d\,t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{V}_i}{d\,t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i$$

La recomposición de la ecuación anterior y el empleo de la segunda ley de Newton, producen la expresión.

$$M\,\boldsymbol{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

Donde,

Fi: fuerza que actúa sobre la i-ésima partícula, (N).

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema incluyen tanto fuerzas internas como externas. Por la tercera ley de Newton las fuerzas de interacción entre dos partículas son de igual módulo y sentidos opuestos, de modo tal que al sumar las se anulan entre si por pares, y la fuerza neta sobre el sistema se debe únicamente a las fuerzas externas. Por lo tanto, la ecuación previa se pude expresar del modo siguiente.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ext} = M\, \boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\,\boldsymbol{P}_{tot}}{\boldsymbol{d\,t}}$$

La fuerza externa resultante sobre un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa del sistema de partículas. El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema de partículas.

Cuando la fuerza externa resultante es nula, entonces, de acuerdo con la ecuación anterior.

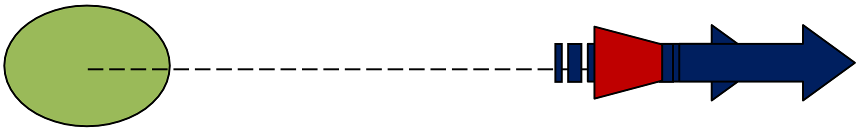
$$\frac{d\,\boldsymbol{P}_{tot}}{\boldsymbol{d\,t}} = M\, \boldsymbol{a}_{CM} = 0$$

Resultando que el momento total de un sistema de partículas es constante si no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema.

$$\boldsymbol{P}_{tot} = M\, \boldsymbol{V}_{CM} = cons\tan te \quad (cuando \sum \boldsymbol{F}_{ext} = 0)$$

EJERCICIO:

Un cohete que se mueve en el espacio libre tiene una velocidad Vi = $3x10^3$ (m/s) en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y expulsan combustible en dirección opuesta al movimiento del cohete y a velocidad Ve = $5x10^3$ (m/s) respecto al cohete.



a) Si la masa original del cohete incluida la del combustible es Mi, y en un tiempo δt se expulsa una cantidad de combustible δm, obtenga la expresión para la suma de momentos lineales del sistema cohete combustible**,** si la resultante de las fuerzas externas es nula**.**

$$\delta \boldsymbol{P}_{cohete} + \delta \boldsymbol{P}_{comb} = 0$$

$$M\,\delta\,\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_e\,\delta\,m = 0$$

Además se sabe que

$$\delta\,m = -\,\delta\,M$$

Por lo tanto,

$$M\,\delta\,\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{Ve}\,\delta\,M$$

b) Obtenga la expresión para la velocidad final del cohete, cuando su masa total final es Mf.

$$\int_{Vi}^{Vf} dV = -Ve \int_{Mi}^{Mf} \frac{dM}{M}$$

$$Vf = Vi + Ve\, Ln\left(\frac{Mf}{Mi}\right)$$

c) ¿Cuál es la velocidad del cohete, una vez que la masa del cohete se ha reducido a la mitad.

$$Vf = Vi + Ve\, Ln\left(\frac{Mf}{Mi}\right)$$

$$Vf = 3x10^3\left(\frac{m}{s}\right) + 5x10^3\left(\frac{m}{s}\right) Ln\left(\frac{Mi}{0{,}5Mi}\right) = 6465{,}74\left(\frac{m}{s}\right)$$

d) Determine la expresión para la fuerza de empuje que experimenta el cohete.

$$Empuje = M\frac{dV}{dt} = \left|Ve\frac{dM}{dt}\right|$$

e) ¿Cuál es el empuje que experimenta el cohete, si se quema combustible a razón de dM/dt = 70 (Kg/s).

$$Empuje = \left|Ve\frac{dM}{dt}\right|$$

$$Empuje = \left|5x10^3\left(\frac{m}{s}\right) 70\left(\frac{Kg}{s}\right)\right| = 350000(N)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

E:01) Si dos partículas tienen energías cinéticas iguales, ¿sus momentos lineales son necesariamente iguales? Explique.

E:02) Explique cómo se conserva el momento lineal cuando una pelota rebota en el piso.

E:03) Un tirador experto dispara un rifle mientras permanece de pie con la culata del rifle contra su hombro. Si el momento lineal hacia adelante de la bala es el mismo que el momento lineal hacia atrás del rifle, ¿porqué no es tan peligroso ser impactado por el rifle que por la bala?

E:04) Un saltador de garrocha cae desde una altura de 6 (m) sobre una colchoneta de hule espuma.

a) ¿Puede usted calcular su velocidad justo antes de llegar a la colchoneta? Explique.

b) ¿Puede usted calcular la fuerza ejercida sobre él por el choque? Explique.

E:05) Un albañil lanza un puñado de mezcla cemento y arena contra un muro de ladrillos y queda pegado a él.

a) ¿Qué sucede con el momento lineal del lodo? Explique.

b) ¿Se conserva el momento lineal? Explique.

E:06) Una patinadora se encuentra se encuentra se encuentra en una pista de hielo sin fricción. Su amiga le lanza un disco directamente.

a) ¿En cuál de los siguientes procesos de choque se transfiere el mayor momento lineal a la patinadora?

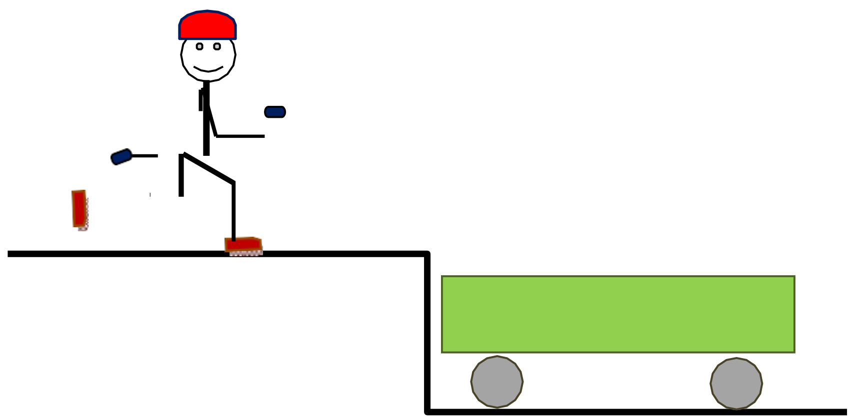
- La patinadora atrapa el disco y lo sostiene.
- La patinadora atrapa el disco momentáneamente y lo deja caer.
- La patinadora atrapa el disco y luego lo lanza de regreso a su amiga.

b) ¿En cuál de los siguientes procesos de choque se transfiere la mayor energía cinética a la patinadora?

- La patinadora atrapa el disco y lo sostiene.
- La patinadora atrapa el disco momentáneamente y lo deja caer.
- La patinadora atrapa el disco y luego lo lanza de regreso a su amiga.

E:07) Un huevo crudo se deja caer sobre el piso, se rompe con el impacto. Sin embargo, un huevo crudo que se deja caer sobre un hule grueso desde una altura de aproximadamente 1 (m) rebota sin romperse. ¿Porqué? (En esta demostración asegúrese de atrapar el huevo después del primer rebote).

E:08) Una persona de masa total m = 60 (Kg) que corre a una velocidad inicial Vp = 4 (m/s) salta sobre un carrito de masa mc = 120 (Kg) que se encuentra inicialmente en reposo Vc =0 (m/s). La persona se desliza sobre la superficie del carro y por último se detiene respecto al carro. El coeficiente cinético de fricción entre la persona y el carro es µc = 0,4 y la fricción entre el carro y el piso puede ignorarse.



a) Determine la velocidad final de la persona y del carro en relación con la Tierra.

b) Encuentre la fuerza de fricción ejercida sobre la persona mientras se desliza sobre la superficie del carro.

c) ¿Qué aceleración respecto al carro experimenta la persona durante el deslizamiento?

d) ¿Qué distancia se desliza la persona sobre la superficie del carro?

e) ¿Cuánto tiempo tarda el deslizamiento de la persona sobre el carro?

f) Calcule el trabajo mecánico realizado por la fuerza de fricción durante el deslizamiento de la persona.

g) ¿Qué fuerza actúa sobre el sistema carro – persona durante el deslizamiento de la persona sobre el carro.

h) ¿Qué aceleración respecto a la Tierra experimenta el sistema carro – persona.

i) Encuentre la velocidad del carro respecto a la Tierra.

- **j)** Encuentre la velocidad de la persona respecto al carro.
- **k)** Encuentre la velocidad de la persona respecto a la Tierra.
- **l)** Encuentre la posición de la persona respecto a la Tierra durante y después del deslizamiento de la persona.
- **m)** Encuentre la posición del carro respecto a la Tierra durante y despés del deslizamiento de la persona.
- **n)** Encuentre el cambio en los momentos lineales de la persona y el carro durante el deslizamiento de la persona.
- **o)** Encuentre el cambio en las energías cinéticas de la persona y el carro durante el deslizamiento.
- **p)** Explique porqué difieren las energías cinéticas evaluadas en el numeral (o).
- **q)** ¿Qué tipo de choque es este y qué explica la pérdida en la energía mecánica?

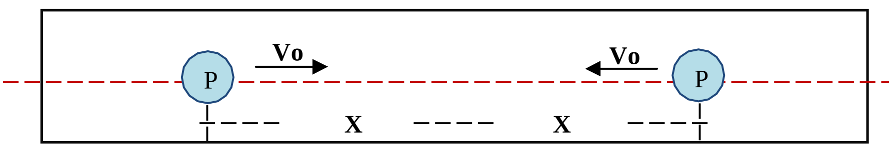
E:09) Un núcleo inestable de masa m = $170x10^{-27}$ (Kg) inicialmente en reposo se desintegra en tres partículas. Una de ellas, de masa m1 = $70x10^{-27}$ (Kg) se mueve a lo largo del eje Y con una velocidad **V1** = $6x10^{6}$ **j** (m/s). Otra partícula de masa m2 = $93,2x10^{-27}$ (Kg) se mueve a lo largo del eje X con velocidad **V2** = 4,5x106 **i** (m/s). Calcule:

- **a)** La masa de la tercera partícula. Considere que la masa permanece constante durante la reacción nuclear.
- **b)** La componente X del momento lineal de la tercera partícula.
- **c)** La componente Y del momento lineal de la tercera partícula.
- **d)** El módulo del momento lineal de la tercera partícula.
- **e)** Las componentes X y Y de la velocidad de la tercera partícula.
- **f)** El módulo de la velocidad de la tercera partícula.

- **g)** La energía total emitida en el proceso.
- **h)** La masa relativista equivalente a la energía emitida en el proceso.
- **i)** La masa de la partícula tercera, corregida restándole la masa invertida en la reacción.
- **j)** Repetir el proceso hasta obtener correcciones menores a $1x10^{-25}$ (Kg)

  SUGERENCIA: haga uso de una hoja de cálculo.

E:10: Dos protones cuyas energías cinéticas a gran distancia son ECP = 10 (MeV) respecto al sistema de referencia laboratorio, se hacen chocar frontalmente en un tubo de vacío adjunto a un acelerador de partículas. Calcule:



- **a)** El módulo de la velocidad de los protones. La masa de un protón es mp = $1,67x10^{-27}$ (Kg) y 1 MeV = $1,6x10^{-13}$ (J).
- **b)** Haciendo uso de consideraciones energéticas, obtenga el mínimo acercamiento (dmim = 2 Xmin), de los protones durante el choque frontal. Considere que los protones se acercan desde gran distancia. La energía potencial eléctrica de los protones es dada por la expresión

$$EPE = \frac{K e_{p} Q^{2}}{(2X)^{2}}$$

Donde:

EPE: energía potencial eléctrica entre los dos protones, (J).

Qp: carga eléctrica del protón, (C).

2X: distancia entre los protones, (m)

Ke: constante electrostática, ($9x10^9$ N m^2/C^2).

c) Obtenga la energía potencial eléctrica (EPE), velocidad (V), y energía cinética de los protones (ECP), durante el choque frontal, para distancias entre los protones d = dmin, 10 dmin, 100 dmin y 1000 dmin. Confeccione gráficas para: EPE(d), V(d) y ECP(d).

E:11)una barra metálica de longitud L, posee una densidad $\rho(x) = \rho_o$ + bx, donde x es la posición sobre la barra desde el extremo de menor densidad, ρ_o es la densidad en el extremo de menor densidad (x=0), b es un parámetro constante característico del material de la barra.

a) Obtenga la expresión para coordenada x del centro de masa de barra.

b) Obtenga la coordenada x del centro de masa de una barra metálica tal que L = 2 (m), ρ_o = 2500 (Kg/m^3) y b = 500 (Kg/m^4).

E:12) Aplicando la conservación del momento lineal al movimiento de un cohete, encontramos

$$M\frac{dV}{dt} = Ve\left|\frac{dM}{dt}\right| \square \quad F_{ext}$$

Donde $Ve\left|dM/dt\right|$ es el empuje del cohete y M es su masa. Si el cohete se lanza verticalmente hacia arriba desde la Tierra, tenemos que $F_{ext} = -M\,g(z)$. Al dividir la ecuación anterior entre la masa del cohete obtenemos.

$$V = \frac{dZ}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$a = \frac{Ve}{M}\left|\frac{dM}{dt}\right| - g\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

Donde,

g: es la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra. ($9{,}8 m/s^2$)

R: radio de la Tierra, ($6{,}3662x10^6$ m).

Utilice los siguientes datos: Mi = $2{,}5x10^6$ (Kg), $\left|dM/dt\right|$ = 1,35x104 (Kg/s), Ve = $1{,}85x10^3$ (m/s).

a) Calcule la aceleración inicial que experimenta el cohete estando sobre la superficie de la Tierra.

b) Si el cohete parte con una velocidad inicial Vo = 100 (m/s), antes de arrancar los motores, estime la velocidad después del tiempo δt = 1 (s).

c) Si el cohete parte desde la posición $Z_o = 0$, estime su nueva posición después de un tiempo $\delta t = 1$ (s).

d) Estime la masa del cohete después de transcurrido un tiempo $\delta t = 1$ (s).

e) Con los datos obtenidos en (a), (b), (c) y (d), Repita los cálculos realizados para los tiempos t = 2, 3, 4, 5,…..,180 (s), empleando un procedimiento de escalamiento.

SUGERENCIA: Utilice una hoja de cálculo.

PRACTICA DE LABORATORIO # 04: CHOQUE DE DOS PARTICULAS Y RODAMIENTO EN RAMPAS

I. Objetivo:

Aplicar el principio de conservación de la energía, movimiento bidimensional, para determinar parámetros cinemáticos de movimiento translacional y rotacional de esferas que ruedan sobre rampas.

Evaluar los errores experimentales aleatorios del experimento, usando métodos estadísticos.

II. Material y equipo

Una rampa para rodamiento de esferas, (a).

Dos esferas metálicas, $\phi = 1 - 2$ cm, (b).

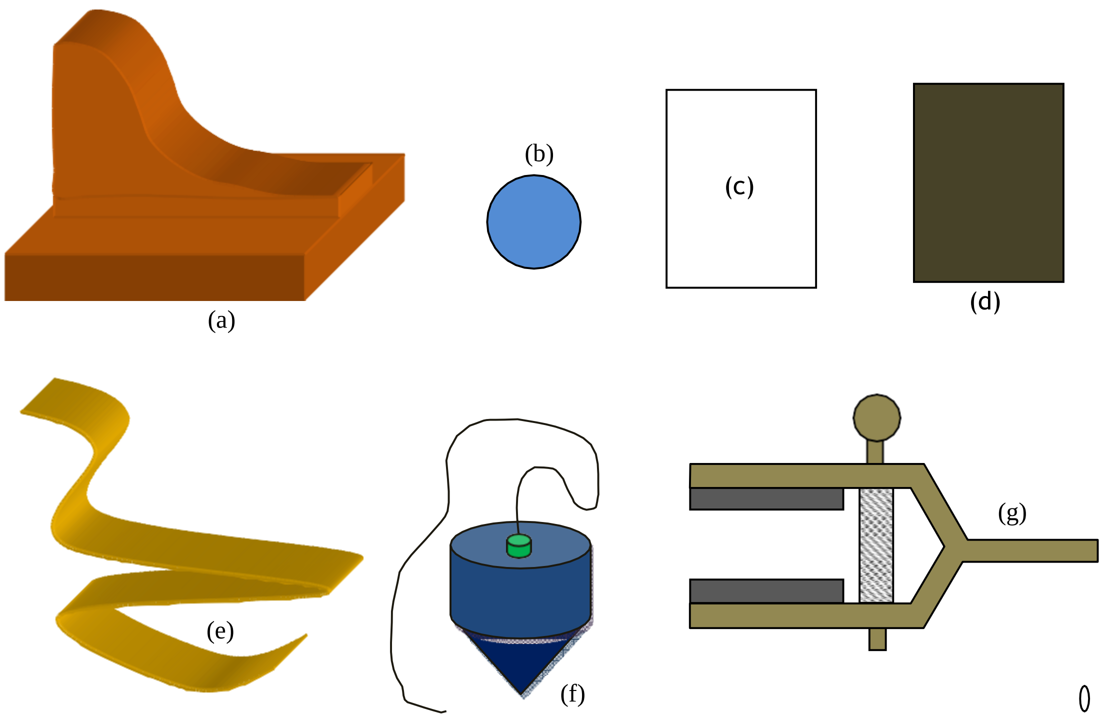
Una hoja de papel bond, A – 4, (c).

Una hoja de papel carbón, (d).

Una Wincha o cinta métrica, (e).

Una plomada, (f).

Una pinza sujetadora, (g).



III. Fundamento Teórico

A) Movimiento Parabólico:

Cuando la esfera metálica se separa de la rampa en el punto B, posee una velocidad V_B, y describe una trayectoria parabólica hasta que impacta en el suelo a una distancia X medida desde el punto 0, cuando se desprecia el efecto de la fricción que ejerce el aire sobre la esfera.

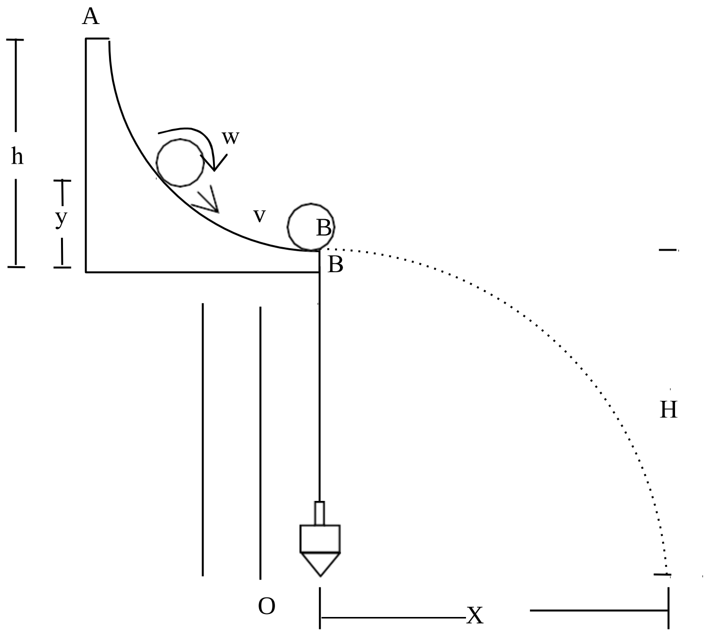


Fig. 2: Esquema de la instalación del equipo experimental

Las ecuaciones que describen el movimiento de la esfera son:

$$H = \frac{g\,t^2}{2} \quad (1)$$

$$X = V_B t \quad (2)$$

Eliminando la variable tiempo entre las ecuaciones (1) y (2), y despejando luego la velocidad tangencial V_B, resulta la expresión:

$$V_B = \sqrt{\frac{g\,X^2}{2\,H}} \quad (3)$$

B) Conservación de la energía total:

Cuando la esfera rueda sobre la rampa a lo largo de los puntos A y B esta posee:

Energía potencial:

$$Ep = m_1 gy \quad (4)$$

Energía cinética translacional

$$Ec = \frac{m_1 v^2}{2} \quad (5)$$

Energía cinética rotacional respecto a su centro de gravedad.

$$Ecr = \frac{I\,W^2}{2} = \frac{m_1 R^2\,W^2}{5} \quad (6)$$

El principio de conservación de la energía mecánica establece que la suma de las tres energías en el punto A equivale a la suma de las mismas en el punto B, más una energía Q emitida al medio que rodea a la rampa, que es el calor producido por la fricción durante el rodamiento de la esfera.

$$(Ep + Ec + Ecr)_A = (\,Ep + Ec + Ecr)_B + Q \qquad (7)$$

Si la esfera parte desde el reposo en el punto A, $Ec_A = 0$ y $Ecr_A = 0$.

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_{1B}^2}{2} + \frac{m_1 R^2 W_{1B}^2}{5} + Q \qquad (8)$$

En vista que la esfera se apoya sobre la rampa en los bordes de la canaleta, la distancia R' desde el eje de rotación que pasa por su centro al eje de apoyo de la esfera, se obtiene relacionando la velocidad tangencial y la velocidad angular a través de la ecuación.

$$V_{1B} = R' W_{1B}$$

Despejando W de la ecuación (9) y reemplazando en (8), obtenemos la expresión siguiente.

$$m_1 gh = \left[\frac{5 + 2\left(R / R'\right)^2}{10} \right] m_1 v_{1B}^2 + Q \qquad (10)$$

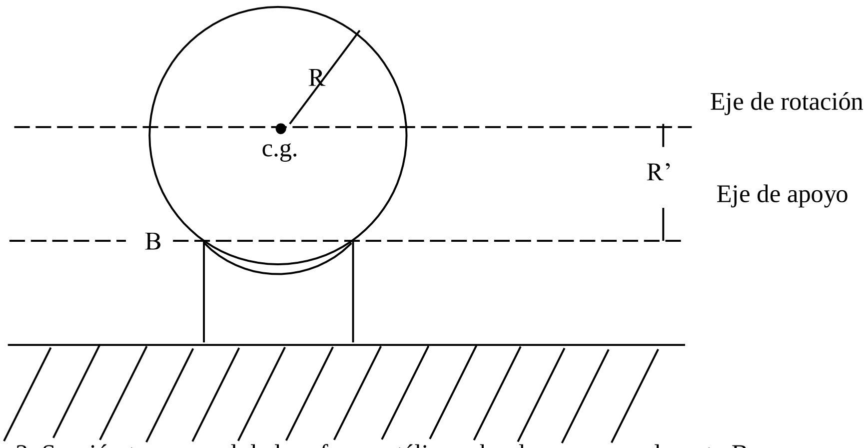


Fig. 3: Sección transversal de la esfera metálica sobre la rampa en el punto B.

|

C) Choque de partículas en dos dimensiones:

Cuando dos partículas (1) y (2), de masas m1 y m2 que pueden moverse en un plano horizontal, chocan, se conserva durante el choque el momentun lineal. La energía cinética del sistema de partículas antes del choque debe ser igual a la energía cinética después del choque más una energía Q' equivalente al trabajo realizado por las fuerzas de fricción o a la energía potencial almacenada en las esferas o al trabajo de deformación permanente realizado sobre las esferas durante la interacción. Estos dos principios de conservación producen tres ecuaciones. Las variables sin prima corresponden a condiciones antes del choque y las variables primadas corresponden a situaciones después del choque.

Conservación del momentun lineal en la dirección X.

$$m_1 V_1 x + m_2 V_2 x = m_1 V_1^{'} x + m_2 V_2^{'} x \quad (10)$$

Conservación del momentun lineal en la dirección Y.

$$m_1 V_1 y + m_2 V_2 y = m_1 V_1^{'} y + m_2 V_2^{'} y \quad (11)$$

Conservación de la energía mecánica.

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1^{'2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{'2}}{2} + Q' \ (12)$$

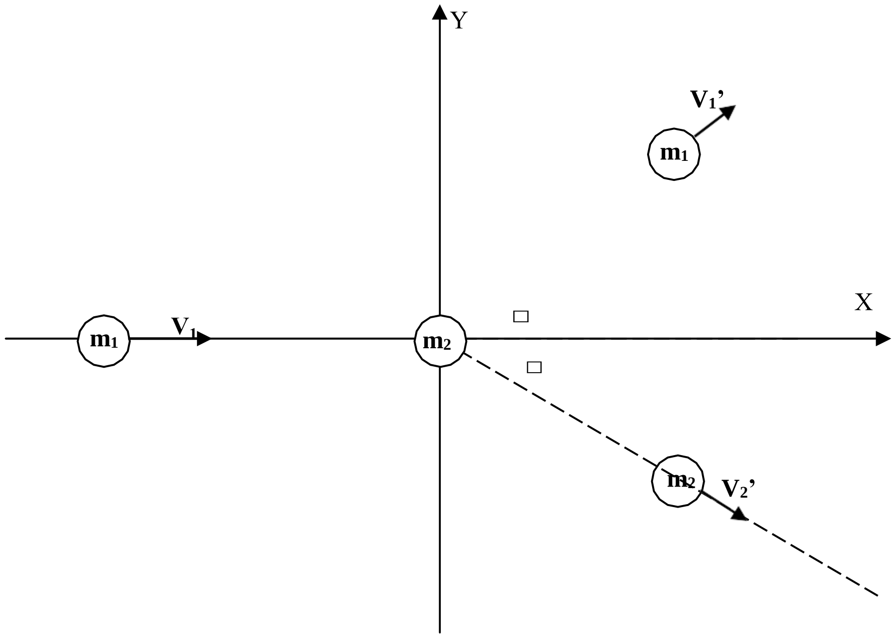


Fig. 04: esquema del choque de dos esferas de masas m1 y m2.

D) Tratamiento estadístico de errores aleatorios

1. Valor medio mas probable

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (13)$$

<X>: valor medido más probable, (u).

Xi: i-ésimo valor medido, (u).

n : número de mediciones

u : unidad de medida de la magnitud

2. Desviación estándar de la muestra de medidas

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle X \rangle)^2}{n-1}} \quad (14)$$

DE: desviación estándar de la muestra , (u)

3. Error Absoluto

$$EA = \frac{DE}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

EA: error absoluto aleatorio de la medición (μ)

4. Error porcentual

$$EP = \frac{EA x 100(\%)}{\langle X \rangle} \quad (16)$$

EP: Error aleatorio porcentual, (%)

5. Reporte de la medición

$$X = \langle X \rangle (u) \pm EA(u) \quad (17)$$

o

$$X = \langle X \rangle (u) \pm EP(\%) \quad (18)$$

IV. Procedimiento experimental

1. Instalar el equipo experimental al borde de la mesa de trabajo, como se muestra en la fig. 2, sujetando la rampa con la pinza.
2. Medir las distancias h y H, mostradas en la fig. 2, haciendo uso de la cinta métrica y la plomada.
3. Marcar con una tiza el origen del sistema de coordenadas X – Y, en el piso, haciendo uso de la plomada.
4. Medir el diámetro de las esferas metálicas (1) y (2) que rueda sobre la rampa y obtener luego el radio de las esferas.
5. Medir las masas de las esferas metálicas.
6. Ubicar la esfera (2) en el punto B, un poco fuera de la dirección de la rampa.
7. Rodar la esfera metálica (1) sobre la rampa, desde el punto A, partiendo desde el reposo.
8. Ubicar aproximadamente el lugar donde impactan las esferas sobre el piso y en ese lugar, pegar con cinta adhesiva la hoja de papel bond, sobre la misma colocar la hoja de papel carbón con la cara mate hacia abajo.
9. Repetir el choque de las esferas descrito en los numerales (6) y (7).
10. Medir las coordenadas X y Y (ver esquema de las figuras 2 y 4), para cada punto de impacto de las esferas, respecto al sistema de referencia ubicado en el piso.
11. Repetir cinco veces el procedimiento indicado en los numerales (9) y (10).

12. Los datos de las mediciones deben ser llenados en los lugares correspondientes de la tabla de datos # 1.
13. Para estimar los errores aleatorios de la medición de los parámetros cinemáticos, utilizar la tabla de datos #2.

V. **Datos**

h = (cm); H = (cm)

R1 = (cm); R2 = (cm)

R

m1 = (g); m2 = (g)

Tabla # 1

I	**X1i (cm)**	**Y1i (cm)**	**X2i (cm)**	**Y2i (cm)**	**V1B'xi (cm/s)**	**V1B'yi (cm/s)**	**V1B'i (cm/s)**
01							
02							
03							
04							
05							
$\sum$							

Tabla # 2

I	**V2B'xi (cm/s)**	**V2B'yi (cm/s)**	**V2B'i (cm/s)**	**V1Bi (cm/s)**	**W1Bi (rad/s)**	**Q' (erg)**	**Q (erg)**
01							
02							
03							
04							
05							
$\sum$							

VI. Preguntas

1. Obtenga la medición de la componente X de la velocidad de la esfera (1) después del choque, para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{1Bx} = \sqrt{\frac{g\,X1^2}{2\,H}}$$

2. Obtenga la medición de la componente Y de la velocidad de la esfera (1) después del choque, para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{1By} = \sqrt{\frac{g\,Y1^2}{2\,H}}$$

3. Obtenga la medición del módulo de la velocidad de la esfera (1) después del choque. Para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{1B} = \sqrt{V'^2_{1Bx} + V'^2_{1By}}$$

4. Obtenga la medición de la componente X de la velocidad de la esfera (2) después del choque, para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{2Bx} = \sqrt{\frac{g\,X\,2^2}{2\,H}}$$

5. Obtenga la medición de la componente Y de la velocidad de la esfera (2) después del choque, para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{2By} = \sqrt{\frac{g\,Y2^2}{2\,H}}$$

6. Para cada caso. Utilice la ecuación

$$V'_{2B} = \sqrt{V'^2_{2Bx} + V'^2_{2By}}$$

7. Obtenga la velocidad de la esfera (1) antes del choque en el punto B, para cada caso. Utilice la expresión de conservación del momento lineal en la dirección X en el choque de las esferas, y el hecho que la esfera (2) está en reposo antes del choque.

$$m_1 V_{1Bx} + m_2 V_{2Bx} = m_1 V'_{1Bx} + m_2 V'_{2Bx}$$

$$V_{1B} = V_{1Bx}$$

$$V_{2Bx} = 0$$

8. Obtenga la velocidad angular de la esfera 1 en el punto B antes del choque, para cada caso. Utilice la expresión.

$$V_{1B} = R' W_{1B}$$

9. Obtenga la energía Q’ equivalente al trabajo realizado por las fuerzas de fricción o trabajo de deformación permanente realizado sobre las esferas o cambio de energía potencial de las esferas durante el choque, para cada caso. Utilice la ecuación de conservación de la energía cinética.

$$\frac{m_1 V_{1B}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2B}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1B}'^2}{2} + \frac{m_2 V_{2B}'^2}{2} + Q'$$

10. Obtenga la energía Q liberada al medio ambiente en forma de calor, igual al trabajo realizado por las fuerzas de fricción durante el rodamiento de la esfera entre los puntos A y B sobre la rampa, para cada caso. Utilice el principio de conservación de la energía mecánica durante el rodamiento durante el rodamiento, ecuación (8).

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_{1B}^2}{2} + \frac{m_1 R^2 W_{1B}^2}{5} + Q$$

11. Analice estadísticamente cada una de las mediciones de las magnitudes físicas obtenidas en la tabla de datos. Obtenga de cada una de ellas, el valor más probable, la desviación estándar, el error absoluto, el error porcentual y reporte la medición según la convención científica.

VII. Bibliografía

1. Serway R. : Física, tomo I, Edit. McGraw – Hill
2. Sears W., Semansky M.: Física general. Edit. Aguilar
3. Halliday D., Resnick F. Física para estudiantes de ciencia e Ingeniería, tomo I. Edit. CECSA
4. Halliday D., Resnick F. Fundamentos de física. Edit CECSA
5. Alonso M. Finn E. Física, tomo I. Edit. Fondo Educativo Interamericano.
6. Meiners: Experimentos de física. Edit. Limusa
7. Alvarenga Alvarez Beatriz. Física general con experimentos sencillos. Edit HARLA
8. Lageman R.: Ciencia Física experimental. Edit NORMA.