DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS DISCRETAS

UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

TEXTO UNIVERSITARIO

DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS DISCRETAS

AUTORES

Mstro. TREJO LÓPEZ Mirtha Sussan

Mstro. CASTAÑEDA CARRIÓN Yolanda Marianela

Mo. VALVERDE FLORES Cosme Ulises

COLABORADOR

Ing. CRUZ CASTAÑEDA Carlos Manuel

Huacho - Perú

2012

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Elaborar un texto de Distribuciones Probabilísticas Discretas a nivel universitario que sirva como material bibliográfico en el transcurso de la formación profesional.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Contribuir a la buena formación básica profesional de los alumnos de las diferentes Escuelas Profesionales de la Universidad.
- Conocer los conceptos básicos en el estudio de las distribuciones probabilísticas discretas.
- Elaborar las distribuciones probabilísticas discretas, calculando sus medidas de resumen y aplicando las propiedades probabilísticas.

JUSTIFICACIÓN

La principal actividad de la Universidad debe ser enseñar a pensar, a comprender e interpretar el mundo de las operaciones intelectuales, contribuyendo con la elaboración de un texto que el alumno interaccione significativamente por medio de las actividades que induzcan a la comprensión, retención, la aplicación creativa del conocimiento y la solución de problemas.

RESULTADOS

- Reconocer la distribución probabilística discreta de un problema o situación dada.
- Determinar la probabilidad de una distribución binomial, poisson, geométrica e hipergeométrica mediante las fórmulas y tablas estadísticas.
- Satisfacer la necesidad de un material bibliográfico.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO III. DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA GEOMÉTRICA

CAPÍTULO IV. DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA HIPERGEOMÉTRICA

AGRADECIMIENTO

Reiteramos nuestra gratitud y reconocimiento a nuestros estudiantes por su constante estímulo y paciencia para que logremos escribir un texto universitario que es el desafío más noble de la cátedra universitaria y difundir ideas es hacer la vida eterna por que los hombres pasan y sus obras quedan. Que mejor satisfacción en nuestra vida dejarles este libro como testimonio de nuestro compromiso y aporte al desarrollo técnico y científico.

PROLOGO

Este texto de Distribuciones Probabilísticas Discretas tiene la finalidad de proporcionar temas que se imparten en el curso de Estadística y Probabilidades y está orientado a las aplicaciones de nuestro contexto social.

Estamos comprometidos a ayudar a los estudiantes para que se acerquen sin angustia a la Estadística. Esta orientación de la enseñanza – aprendizaje ha dado como resultado una gran cantidad de auxiliares efectivos para el aprendizaje. En cada capítulo se presentan problemas planteados para dar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con problemas semejantes a los desarrollados y que sirvan para reforzar la comprensión del material elaborado.

Después del análisis de cada concepto se presenta problemas y su solución. Al final de cada capítulo se incluye un breve resumen.

Al principio de cada capítulo se plantea un conjunto de objetivos, en ellos se indica lo que el estudiante será capaz de hacer al concluir el capítulo.

Los Autores

CAPÍTULO I

DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA BINOMIAL

OBJETIVOS:

1. Identificar una distribución probabilística binomial.
2. Utilizar correctamente la fórmula de la distribución probabilística Binomial.
3. Calcular las medidas de resumen de la distribución probabilística Binomial.
4. Manejar correctamente las tablas estadísticas de la distribución probabilística Binomial.

1.1. Nociones Preliminares

1.1.1. Notación Factorial

Se utiliza para representar las operaciones de multiplicación secuencial. Su desarrollo significa el producto ordenado de los números enteros positivos, desde el que indica el signo factorial, hasta llegar a 1.

Ejemplo:

Tres factorial $3! = (3)\,(2)\,(1) = 6$

Cinco factorial $5! = (5)\,(4)\,(3)\,(2)\,(1) = 120$

.

.

.

n factorial $n! = (n)\,(n-1)\ldots(3)\,(2)\,(1)$

Por definición: $0! = 1$

$1! = 1$

1.1.2. Expansión Binomial

Un binomio algebraico es la expresión formada por dos términos unidos por los signos más o menos y elevados a un exponente.

Ejemplo:

(X + Y) donde: X = Primer Término del Binomio

Y = Segundo Término del Binomio

2 = Exponente

El desarrollo de un binomio se le conoce con el nombre de Expansión Binomial. Esta expansión nos implica la distribución del binomio en todas sus formas o partes.

1.1.3. Combinaciones

Es un método que nos permite agrupar un conjunto de elementos en diferentes formas sin considerar el orden de colocación.

Combinación de x a n $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

donde:

n = Total de elementos

x = Cantidad de elementos a combinar

Ejemplo.

De un equipo multidisciplinario, formado por 1 economista, 1 sociólogo, 1 antropólogo. ¿Cuántos comités de dos profesionales pueden formarse?

$n = 3$, $x = 2$

Luego la cantidad de comités a formarse, serán:

Combinación de 2 a 3

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

Respuesta: Se pueden formar 3 comités, que serían:

Primer comité : Economista, Sociólogo

Segundo comité : Sociólogo, Antropólogo

Tercer comité : Economista, Antropólogo

1.2. Características de la Distribución Probabilística Binomial

1.2.1. Los datos recopilados son el resultado de conteos.

1.2.2. Se agrupa en dos clases o categorías

1.2.3. Las clases deben ser colectivamente exhaustivas por lo que no es posible obtener ningún otro resultado.

1.2.4. Las categorías deben ser mutuamente excluyentes.

1.3. Propiedades de la Distribución Probabilística Binomial

1.3.1. Existen n ensayos.

1.3.2. Cada ensayo tiene dos posibles resultados, uno llamado éxito y el otro fracaso.

1.3.3. Las probabilidades de éxito y fracaso se mantienen constantes para todos los ensayos.

1.3.4. Los resultados de los ensayos son independientes entre sí lo que significa que el resultado de algún ensayo en particular no es afectado por el resultado de cualquier otro ensayo.

1.4. Parámetros de la Distribución Probabilística Binomial

La distribución binomial tiene dos parámetros n y p. La fórmula binomial indica que la probabilidad para cualquier número dado de éxitos varía con dos factores: el número de ensayos $n,$ y la probabilidad de éxito en cualquier ensayo p. Cada combinación diferente de n y p produce entonces una distribución de probabilidad binomial diferente, aun cuando se aplique la misma fórmula para derivar la distribución. Es costumbre referirse a cualquier distribución de probabilidad binomial específica, como un miembro de la familia de distribuciones de probabilidad binomiales, quedando entendido que se pueden encontrar otra familia al hacer variar los valores de n o p. En el gráfico se puede observar tres formas:

Primero, dado cualquier número de ensayos, n, la probabilidad de una proporción alta de éxitos se eleva con la de alcanzar el éxito en un ensayo dado. Considérense, por ejemplo, en a y b, en los cuales intervienen dos ensayos de un experimento aleatorio. La probabilidad de alcanzar dos éxitos en dos ensayos se eleva de 0.04 a 0.25 cuando la probabilidad de éxito en un solo ensayo, p, se eleva de 0.2 a 0.5.

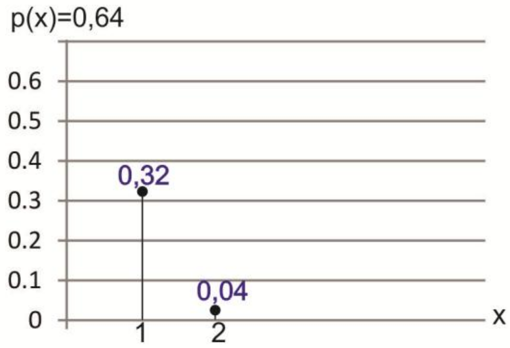
En segundo lugar, cualquier distribución de probabilidad binomial con probabilidad de éxito $p \neq 0.5$ es perfectamente simétrica cualquiera sea el valor de n, como se indica en d. Por otra parte, cualquier distribución con p < 0.5 y p> 0.5 está sesgada a la derecha o a la izquierda, según sea el caso, esto se ilustra en c y e.

Por último, dado cualquier valor de $p\neq 0.5$ y, por lo tanto, la presencia de sesgo, este se hace menos pronunciado a medida que n se eleva. Para valores altos de n, todas las distribuciones de probabilidad binomiales se aproximan a la simetría.

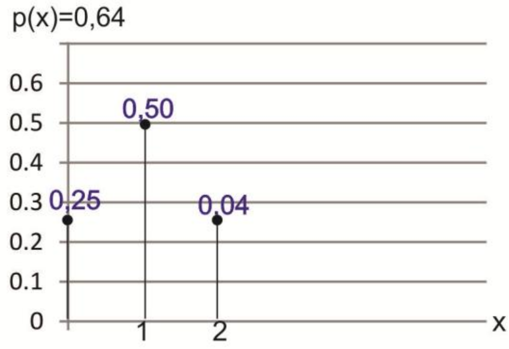
GRÁFICO Nº1.1

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD BINOMIALES CON DIFERENTES VALORES DE $n\ y\ p$

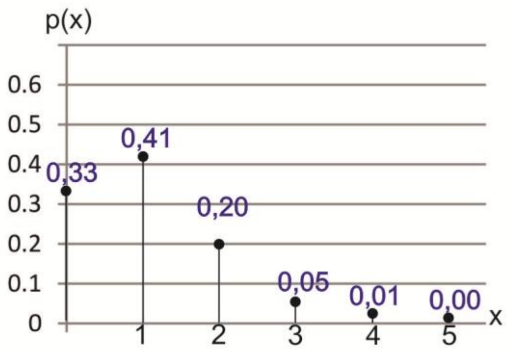
a. p=0,2; n=2



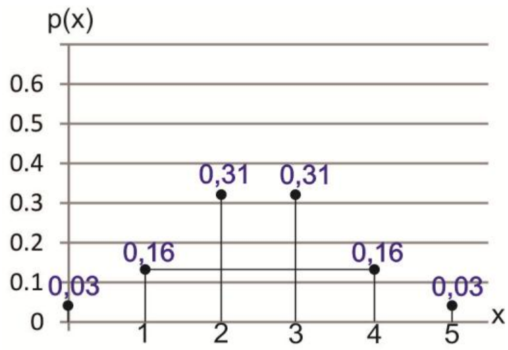
b. p=0,5; n=2



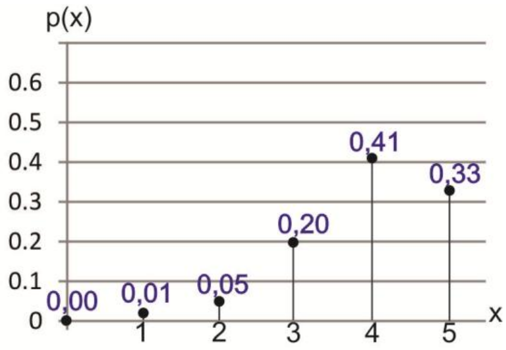
c. p=0,2; n=5



d. p=0,5; n=5



e. p=0,8; n=5



1.5. Distribución Probabilística Binomial

Es una de las distribuciones utilizadas ampliamente en estadística aplicada. La distribución se deriva de un procedimiento conocido como ensayo de Bernoulli, nombrado así en honor del matemático suizo James Bernoulli (1654-1785), quien realizó contribuciones importantes en el campo de la probabilidad, incluyendo particularmente, la distribución binomial.

Ejemplos:

EXPERIMENTO ALEATORIO	RESULTADOS POSIBLES
1. Lanzamiento de una moneda	Cara o sello
2. Nacimiento de un ser humano con respecto al sexo	Hombre o mujer
3. Estado de salud de una persona	Sano o enfermo
4. Situación ocupacional de una persona	Ocupado o desocupado
5. Sistema de calificación de los estudiantes	Aprobado o desaprobado
6. Respuestas de un examen	Verdadera o falsa
7. Evaluación de medicamentos	Caducados o no caducados
8. Control de calidad a un grupo de lotes	Defectuoso o no defectuoso
9. Resultados de la revocatoria a la Alcaldesa de Lima	Sí o no
10. Pronóstico de la Temperatura de un Distrito	Alta o Baja

Al llevar un cabo un experimento aleatorio, siempre estamos interesados en que suceda uno de los dos resultados, si el resultado que esperábamos efectivamente sucede, diremos que hubo ÉXITO. Si el resultado que esperábamos no sucede, entonces diremos que hubo FRACASO. Estos dos resultados, se designan en términos de probabilidad, como $p\ y\ 1-p$.

1.6. Fórmula de la Distribución Probabilística Binomial

$$\text{B}(X = x/\, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \;\; n = 1,2,\cdots \quad x = 0,1,2,\cdots,n$$

donde:

$n =$ Número de ensayos o tamaño de muestra

$x =$ Número de éxitos

$p =$ Probabilidad de éxito en cada ensayo

$1-p =$ Probabilidad de fracaso en cada ensayo

Esta expresión recibe el nombre de Función de Probabilidad de una Distribución Binomial, ya que cumple con las **Leyes de Probabilidad:**

1. $p(X = x) \geq 0$

2. $\sum_{x=0}^{n} p(X = x) = 1$

1.7. Función de Distribución Acumulada de la Binomial

$$\boldsymbol{F(X)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{x < 0} \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{|n|} \binom{n}{x} \boldsymbol{p^x (1-p)^{n-x}}, & \boldsymbol{0 \le x < n} \\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{x \ge n} \end{cases}$$

1.8. Medidas de Resumen de la Distribución Probabilística Binomial

a. Media aritmética, Valor esperado o Esperanza matemática

E(X)= μ =np

b. Varianza

σ^2 = np$(1-p)$

c. Desviación Estándar

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

1.9. Tablas de la Distribución Probabilística Binomial

El cálculo de una probabilidad binomial empleando la fórmula puede ser una labor difícil si el tamaño de la muestra es grande. Las tablas de probabilidad ofrecen un método muy práctico para el análisis estadístico, proporciona probabilidades con muy poco esfuerzo. Hay dos tipos de tablas binomiales: Individuales y Acumulativas.

a. Tabla Binomial Individual (TABLA A del APÉNDICE)

Proporciona las probabilidades de los resultados únicos o individuales de una variable aleatoria. La estructura de la tabla binomial individual es la siguiente:

1. En la parte superior se encuentra los valores de p, los cuales varían en incrementos de 0.05
2. En la parte lateral de arriba hacia abajo, se localiza los tamaños de muestra "n" encontrando el número deseado de éxitos x en la lista de resultados respecto a ese subconjunto.
3. La probabilidad de x éxitos se encuentran en la intersección de la fila situada en la parte 2 y la columna de la parte 1.

b. Tabla Binomial Acumulativa (TABLA B del APÉNDICE)

Aquella que proporciona las probabilidades de un conjunto de valores de una variable aleatoria. Esta tabla puede emplearse en diferentes formas, para encontrar directamente la probabilidad de que x sea igual a cierto número de éxitos o menor a éste Y se puede utilizar indirectamente para obtener tanto la probabilidad de que x sea mayor que cierto número de éxitos o exactamente x éxitos.

La estructura de la tabla binomial acumulativa es idéntica a la tabla individual. Los valores de p probabilidad de éxito seleccionados se enumeran en la parte superior de la tabla, en tanto que el número de éxitos x para varios tamaños de muestras se indica en sentido descendente en uno de los lados de la misma. Las probabilidades son para x o menos éxitos.

1.10. Aproximación de la Distribución Binomial

a. Aproximación de la Distribución Binomial por la Distribución Poisson

Si X ~ Binomial (n, p) Si n > 20 y p < 0.05

Entonces X ≈ Poisson (λ = np)

b. Aproximación de la Distribución Binomial por la Distribución Normal

Moivre demostró que bajo determinadas condiciones para n grande y tanto p y 1 –p no estén próximos a cero, la distribución binomial se puede aproximar mediante una distribución normal. Debemos tener en cuenta que cuanto mayor sea el valor de n, y cuanto más próximo sea p a 0.5 tanto mejor será la aproximación realizada. Es decir, basta con que se verifique np > 5 y np (1 –p) > 5

El Teorema de Moivre lo podemos resumir:

X es B(n, p) ⟶Y es N (np,$\sqrt{np(1-p)}$)

Entonces:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{es N (0,1)}$$

Hay que tener en cuenta que para realizar esta transformación de una variable discreta en una variable continua es necesario hacer una corrección de continuidad.

Para aplicar la corrección de continuidad correspondiente se tiene en cuenta:

P(X=a) =P (a−0.5≤X≤a+0.5)

P(X<a) = P(X≤ a−0.5)

P(X≤a) = P(X≤a+0.5)

P (a≤ X≤b) = P (a−0.5≤X≤b+0.5)

P (a< X <b) = P (a+0.5≤ X≤ b −0.5)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El 65 % de los hogares de una zona urbana hay alguien en casa en una noche determinada. Un investigador que está haciendo una encuesta por teléfono selecciona al azar 15 hogares. Hallar las probabilidades siguientes:
   a. Exactamente 8 hogares haya alguien en casa
   b. Ningún hogar haya alguien en casa
   c. Todos los hogares haya alguien en casa

   SOLUCIÓN

$$p = 0,65$$
$$1 - p = 0,35$$
$$n = 15$$

a. B(X=8/15;0,65) $=\binom{15}{8}(0{,}65)^8(0{,}35)^{15-8}$

$=\frac{15!}{8!7!}(0{,}65)^8(0{,}35)^7$

$=0{,}1319$

b. B(X=0/15;0,65) $=\binom{15}{0}(0{,}65)^0(0{,}35)^{15-0}$

$=\frac{15!}{0!(15-0)!}(1)(0{,}35)^{15}$

$=0{,}00000014$

c. B(X=15/15;0,65) $=\binom{15}{15}(0{,}65)^{15}(0{,}35)^{15-15}$

$=\frac{15!}{15!(15-15)!}(0{,}65)^{15}(0{,}35)^0$

$=0{,}0016$

2. Un comerciante de verduras tienen conocimiento de que el 10 % de las cajas están descompuestas si un comprador elige 4 verduras al azar, encuentre la probabilidad de que:
   a. Todas estén descompuestas
   b. De 1 a 3 estén descompuestas

SOLUCIÓN

$p = 0{,}10$

$1 - p = 0{,}90$

$n = 4$

a. B(X=4/4;0,10) $=\binom{4}{4}(0{,}10)^4(0{,}90)^{4-4}$

$=\frac{4!}{4!(4-4)!}(0{,}10)^4(0{,}90)^0$

$=0{,}0001$

b. B(1$\leq X \leq$ 3/4;0,90) =B(X=1) + B(X=2) + B(X=3)

Entonces:

B(X=1/4; 0,90) $=\binom{4}{1}(0{,}10)^1(0{,}90)^{4-1}$

$=\frac{4!}{1!(4-1)!}(0{,}10)^1(0{,}90)^3$

$= 0{,}2916$

B(X=2/4; 0,90) $= \binom{4}{2}(0{,}10)^2(0{,}90)^{4-2}$

$= \frac{4!}{2!(4-2)!}(0{,}10)^2(0{,}90)^2$

$= 0{,}0486$

B(X=3/4; 0,90) $= \binom{4}{3}(0{,}10)^3(0{,}90)^{4-3}$

$= \frac{4!}{3!(4-3)!}(0{,}10)^3(0{,}90)^1$

$= 0{,}0036$

Luego:

B ($1 \leq X \leq$ 3/4; 0,90) $= 0{,}2916 + 0{,}0486 + 0{,}0036$

$= 0{,}3438$

3. Si de 6 de 18 proyectos de viviendas violan el código de construcción ¿Cuál es la probabilidad de que un inspector de viviendas, seleccione aleatoriamente a cuatro de ellas, encuentre que:
   a. Ninguna de las viola el código de construcción
   b. Una viola el código de construcción
   c. Dos violan el código de construcción
   d. Por lo menos dos violan el código de construcción

SOLUCIÓN

$p = 6/18 = 0{,}33$

$1 - p = 12/18 = 0{,}64$

$n = 4$

a. B(X=0/4;0,33) $= \binom{4}{0}(0{,}33)^0(0{,}67)^{4-0}$

$= \frac{4!}{0!(4-0)!}(1)(0{,}67)^4$

$=0{,}2015$

b. B(X=1/4;0,33) $= \binom{4}{1}(0{,}33)^1(0{,}67)^{4-1}$

$= \frac{4!}{1!(4-1)!}(0{,}33)^1(0{,}67)^3$

$=0{,}3970$

c. B(X=2/4;0,33) $=\binom{4}{2}(0{,}33)^2(0{,}67)^{4-2}$

$=\frac{4!}{2!(4-2)!}(0{,}33)^2(0{,}67)^2$

=0,2933

d. B(X≥2/4;0,33) =B(X=2) + B(X=3) + B(X=4)

Sabemos:

B(X=0) + B(X=1) + B(X=2) + B(X=3) + B(X=4) = 1

B(X≥2/4; 0, 33) = 1 – B(X=0) – B(X=1)

B(X≥2/4; 0, 33) = 1 – 0,2015 – 0,3970

= 0, 4015

4. En pruebas realizadas a un amortiguador para automóvil, se encontró que el 20 % presentaban fuga de aceite. Si se instalan 20 de estos amortiguadores, hallar la probabilidad de que
   a. Exactamente 4 presentaban fuga de aceite
   b. Más de 5 presentaban fugas de aceite
   c. De 3 a 6 presentaban fuga de aceite
   d. Determinar el promedio y la desviación estándar de amortizadores que presentaban fuga de aceite

SOLUCIÓN

$p = 0{,}2$

$1 - p = 0{,}8$

$n = 20$

a. B(X=4/20;0,2) $=\binom{20}{4}(0{,}2)^4(0{,}8)^{20-4}$

$=\frac{20!}{4!(20-4)!}(0{,}2)^4(0{,}8)^{16}$

=0,2182

b. B(X≥5/20;0,2) =B(X=5) + B(X=6) + … + B(X=20)

Sabemos:

B(X=0) + B(X=1) + B(X=2) +…. + B(X=20) = 1

B(X≥5/20; 0, 2) = 1 – B(X=0) + B(X=1) + B(X=2) + B(X=3) + B(X=4)

Entonces:

B(X=0/20;0,2) $=\binom{20}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^{20-0}$

$=\frac{20!}{0!(20-0)!}(1)(0{,}8)^{20}$

=0,0115

B(X=1/20;0,2) $=\binom{20}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^{20-1}$

$=\frac{20!}{1!(20-1)!}(0{,}2)^1(0{,}8)^{19}$

=0,0576

B(X=2/20; 0,2) $=\binom{20}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^{20-2}$

$=\frac{20!}{2!(20-2)!}(0{,}2)^2(0{,}8)^{18}$

=0,1369

B(X=3/20; 0,2) $=\binom{20}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^{20-3}$

$=\frac{20!}{3!(20-3)!}(0{,}2)^3(0{,}8)^{17}$

=0,2054

B(X=4/20; 0,2) = 0,2182

Luego:

B(X≥5/20; 0, 2) = 1 – (0, 0115 + 0, 0576 + 0, 1369 + 0, 2054 + 0, 2182)

= 0, 3704

c. B(3≤ X ≤6 / 20;0,2) = B(X=3) + B(X=4) + B(X=5) + B(X=6)

Entonces:

B(X=3/20; 0,2) = 0,2054

B(X=4/20; 0,2) = 0,2182

B(X=5/20; 0,2) =$\binom{20}{5}(0,2)^5(0,8)^{20-5}$

=$\frac{20!}{5!(20-5)!}(0,2)^5(0,8)^{15}$

=0,1746

B(X=6/20; 0,2) =$\binom{20}{6}(0,2)^6(0,8)^{20-6}$

=$\frac{20!}{6!(20-6)!}(0,2)^6(0,8)^{14}$

=0,1091

Luego:

B (3≤ X ≤6 / 20; 0,2)=0,2054+0,2182+0,1746+0,1091

=0, 7073

d. Promedio

$$E(X) = np = 20(0,2) = 4$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20(0,2)(0,8)} = 1,79 = 2$$

5. Un examen consta de 10 preguntas a las que hay que contestar SI o NO suponiendo que a las personas que se les aplica no saben a ninguna de las preguntas y en consecuencia, contestan al azar, hallar:
   a. Probabilidad de obtener cinco aciertos
   b. Probabilidad de obtener algún acierto
   c. Probabilidad de obtener al menos cinco aciertos

SOLUCIÓN

$p = 0,5$

$1 - p = 0,5$

$n = 10$

a. B(X=5/10;0,5) =$\binom{10}{5}(0,5)^5(0,5)^{10-5}$

=$\frac{10!}{5!(10-5)!}(0,5)^5(0,5)^5$

=0,2461

b. B(X≥1/10;0,5) =1 – B(X=0/10;0,5)

Entonces:

B(X=0/10;0,5) =$\binom{10}{0}(0{,}5)^{0}(0{,}5)^{10-0}$

=$\frac{10!}{0!(10-0)!}(0{,}5)^{10}$

=0,0010

Luego:

B(X≥1/10;0,5)=1 – 0,0010

=0,999

c. B(X≥5/10;0,5)=B(X=5) + B(X=6) + … + B(X=10)

Entonces:

B(X=5/10;0,5)=0,2461

B(X=6/10;0,5)= = $\binom{10}{6}(0{,}5)^{6}(0{,}5)^{10-6}$

=$\frac{10!}{6!(10-6)!}(0{,}5)^{6}(0{,}5)^{4}$

=0,02051

B(X=7/10;0,5)= =$\binom{10}{7}(0{,}5)^{7}(0{,}5)^{10-7}$

=$\frac{10!}{7!(10-7)!}(0{,}5)^{7}(0{,}5)^{3}$

=0,1172

B(X=8/10;0,5)= =$\binom{10}{8}(0{,}5)^{8}(0{,}5)^{10-8}$

=$\frac{10!}{8!(10-8)!}(0{,}5)^{8}(0{,}5)^{2}$

=0,0439

B(X=9/10;0,5)= =$\binom{10}{9}(0{,}5)^{9}(0{,}5)^{10-9}$

=$\frac{10!}{9!(10-9)!}(0{,}5)^{9}(0{,}5)^{1}$

=0,0098

B(X=10/10; 0,5)= =$\binom{10}{10}(0{,}5)^{10}(0{,}5)^{10-10}$

=$\frac{10!}{10!(10-10)!}(0{,}5)^{10}(0{,}5)^{0}$

=0,0010

Luego:

B(X≥5/10; 0,5)=0,2461+0,2051+0,1172+0,0439+0,0098+0,0010

=0,6231

6. El administrador de un restaurante encontró que el 70% de sus nuevos clientes regresan. En una semana que hubo 80 consumidores nuevos ¿Cuál es la probabilidad de que 60 o más regresen en otra ocasión?

SOLUCIÓN

X ∼ Binomial(n=80, p=0,7)⇒ Y ∼N (μ=56, $\sigma = 4{,}1$)

P(X≥60)=1-P(X≤59)≈1-P(Y≤59,5)

P(Y≤ 59,5)=p(z≤ $\frac{59{,}5-56}{4{,}1}$)= P(z≤ $0{,}85$)

= 0, 8023

P(X≥60)=1 – 0,8023

7. En un banco, la probabilidad de recibir un cheque sin fondos es del 4% si durante un día reciben 100 cheques ¿Cuál es la probabilidad de encontrar más de cinco cheques?

SOLUCIÓN

X ∼ Binomial(n=100, p=0,04) n> 20 y p<0,05 entonces

X ≈ Poisson($\lambda = 4$)

P(X>5) =1 – P(X≤5)

Entonces:

$$P(X = 0\ /\ 4) = \frac{e^{-4}4^{0}}{0!} = 0{,}0183$$

$$P(X = 1 / 4) = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!} = 0{,}0732$$

$$P(X = 2 / 4) = \frac{e^{-4}4^{2}}{2!} = 0{,}1464$$

$$P(X = 3/ 4) = \frac{e^{-4}4^{3}}{3!} = 0{,}1952$$

$$P(X = 4 / 4) = \frac{e^{-4}4^{4}}{4!} = 0{,}1952$$

$$P(X = 5 / 4) = \frac{e^{-4}4^{5}}{5!} = 0{,}1562$$

Luego:

P(X>5) = 1-(0,0183 + 0,0732 + 0,1464 + 0,1952 + 0,1952 + 0,1562)

= 1 – 0,7845

=0,2155

8. Un cirujano tiene 25% de probabilidad de fracasar en una operación. Si opera 4 veces. Hallar la probabilidad de que:
   a. Fracase en 2 operaciones
   b. Por lo menos 1 operación fracase
   c. Más de la mitad de las operaciones fracase
   d. Si al mes opera 20 veces ¿En cuántas operaciones se espera que tenga éxito?

SOLUCIÓN

$p = 0{,}25$

$1 - p = 0{,}75$

$n = 4$

a. B(X=2/4;0,25) $=\binom{4}{2}(0{,}25)^2(0{,}75)^{4-2}$

$=\frac{4!}{2!(4-2)!}(0{,}25)^2(0{,}75)^2$

=0,2109

b. B(X≥1/4;0,25) =B(X=1) + B(X=2) + B(X=3) + B(X=4)

Sabemos:

B(X=1) + B(X=2) + B(X=3) + B(X=4)=1

B(X≥1/4; 0,25)= 1 – B(X=0)

Entonces:

B(X=0/4; 0, 25) $=\binom{4}{0}(0{,}25)^0(0{,}75)^{4-0}$

$=\frac{4!}{0!(4-0)!}(1)(0{,}75)^4$

=0, 3164

Luego:

B(X≥1/4; 0, 25) = 1 – 0, 3164 = 0, 6836

c. B(X>2 / ;0,25)=B(X=3) + B(X=4)

Entonces:

B(X=3/4; 0, 25)$=\binom{4}{3}(0{,}25)^3(0{,}75)^{4-3}$

$=\frac{4!}{3!(4-3)!}(0{,}25)^3(0{,}75)^1$

=0,0469

B(X=4/4; 0, 25) $=\binom{4}{4}(0{,}25)^4(0{,}75)^{4-4}$

$=\frac{4!}{4!(4-4)!}(0{,}25)^4(0{,}75)^0$

=0,0039

Luego:

B(X>2/4; 0,25)=0,0469 + 0,0039

=0,0508

d. E(X)= 20(0,75)=15

9. Un vendedor observa que el 80 % de autos vendidos son regresados al departamento de servicio corregir diversos defectos de fabricación en los primeros 25 días después de su compra. De los 11 autos vendidos en un periodo de cinco días. Determinar las probabilidades siguientes:

   a. Todos regresen
   b. Solo uno no regrese

   SOLUCIÓN

$$p = 0{,}80$$

$$1 - p = 0{,}20$$

$$n = 11$$

a. B(X=11/11;0,80) $=\binom{11}{11}(0{,}80)^{11}(0{,}20)^{11-11}$

$=\frac{11!}{11!(11-11)!}(0{,}80)^{11}(0{,}20)^{0}$

=0,0859

b. B(X=10/11;0,80) $=\binom{11}{10}(0{,}80)^{10}(0{,}20)^{11-10}$

$=\frac{11!}{10!(11-10)!}(0{,}80)^{10}(0{,}20)$

=0,2362

10. El 8% de los sándwiches que se venden en un estado se piden sin mayonesa. Se toma una muestra aleatoria de siete personas encontrar las probabilidades siguientes:

    a. Todas lo quieren con mayonesa
    b. Solo una lo quiere con mayonesa

    SOLUCIÓN

$$p = 0{,}08$$

$$1 - p = 0{,}72$$

$$n = 7$$

a. B(X=0/7;0,08) $=\binom{7}{0}(0{,}08)^{0}(0{,}92)^{7-0}$

$=\frac{7!}{0!(7-0)!}(1)(0{,}92)^{7}$

=0,5578

b. B(X=6/7;0,08) $=\binom{7}{6}(0{,}08)^{6}(0{,}92)^{7-6}$

$=\frac{7!}{6!(7-6)!}(0{,}08)^6(0{,}92)$

$=0{,}000002$

11. El 12% de los que hacen reservaciones para un vuelo en avioneta no llegan a tiempo para abordarla. Dicha avioneta tiene capacidad para 15 pasajeros.
    a. Hallar la probabilidad que todas las personas que hicieron reservaciones aborden la avioneta
    b. Si se anotaron 16 reservaciones encuentre la probabilidad de que:
        i. Se quede una persona
        ii. No se quede ninguna persona
        iii. Se quede más de una persona

SOLUCIÓN

a. $p = 0{,}12$

$1 - p = 0{,}88$

$n = 15$

$B(X=0/15;\ 0{,}12) = \binom{15}{0}(0{,}12)^0(0{,}88)^{15-0}$

$=\frac{15!}{0!(15-0)!}(1)(0{,}88)^{15}$

$=0{,}1470$

b. i. $p = 0{,}88$

$1 - p = 0{,}12$

$n = 16$

$B(X=16/16;\ 0{,}88) = \binom{16}{16}(0{,}88)^{16}(0{,}12)^{16-16}$

$=\frac{16!}{16!(16-16)!}(0{,}88)^{16}(1)$

$=0{,}1293$

ii. $B(X\leq 15/16;\ 0{,}88) = B(X=0) + B(X=1) + \ldots + B(X=16)$

Entonces:

$B(X=0) + B(X=1) + \ldots + B(X=16) = 1$

$B(X\leq 15/16;\ 0{,}88) = 1 - B(X=16)$

$=1 - 0{,}1293$

$=0{,}8707$

iii. Imposible

12. Utilice la tabla binomial individual o acumulativa para determinar la probabilidad de x éxitos

N° de observaciones n	p(éxitos)	x
5	0.05	2
6	0.10	3
5	0.25	x≤2
4	0.50	x≥2
7	0.40	x>4
6	0.35	x<3
1	0.40	0
3	0.15	1
7	0.85	x<5
4	0.60	x>1
6	0.80	x≤ 5
7	0.30	6

SOLUCIÓN

- B(X=2/5;0,05) =0,0214
- B(X=3/6;0,10) = 0,0146
- B(X≤2/5;0,25) = 0,8965
- B(X≥2/4;0,50) =1 – B(X≤1/4;0,50)
  =1 – 0, 3125
  =0, 6875
- B(X>4/7;0,40)=1 – B(X≤4/7;0,40)
  =1 – 0, 9037
  =0, 0963
- B(X< 3/6;0,35) =0,6000
- B(X=0/1;0,40) = 0,6500

- $B(X=1/3;0,15) = 0,3251$
- $B(X<5/7;0,85) = 0,0738$
- $B(X>1/4;060) = 1 - B(X\leq 1/4; 0,60)$

  $= 1 - 0,1792$

  $= 0,8208$
- $B(X\leq 5/6; 0,80) = 0,7379$
- $B(X=6/7; 0,30) = 0,0036$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. La probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Hallar la probabilidad de que transcurridos 30 años; vivan:
   a. Por lo menos tres personas
   b. Exactamente dos personas
   c. A lo más una persona

2. La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es 0,02. Se ha producido un cargamento de 10000 artículos a unos almacenes. Hallar el numero esperado de artículos defectuosos, la varianza y desviación estándar

3. Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proposición de tres cada cien pacientes. Pata constatar esta afirmación, otro laboratorio elige aleatoriamente a cinco pacientes a los que aplica la droga. Hallar la probabilidad:
   a. Ningún paciente tenga efectos secundarios
   b. Por lo menos dos tengan efectos secundarios
   c. ¿Cuál es el número medio de pacientes que sufran efectos secundarios si se elige al azar 100 pacientes?

4. Se admite que un número de teléfono de cada cinco se está comunicando de tres a cuatro de la tarde ¿Cuál es la probabilidad de que, cuando se marquen 10 números de teléfonos al azar, solo comuniquen dos?

5. El 40%, de la población del Perú están a favor del proyecto de ley del inquilinato ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 25 peruanos? :
   a. Exactamente 8 estén a favor del proyecto
   b. Todos estén a favor del proyecto

c. A lo más dos estén a favor del proyecto

6. Un experimento binomial contiene n =6; 1 – p= 6/8. Hallar:
   a. La distribución de probabilidad para este experimento
   b. La media y la desviación estándar de la distribución binomial

7. El 30 % de los recién nacidos en la Maternidad de Lima, nacen con bajo peso ¿Cuál es la probabilidad de que 10 nacimientos que tienen lugar cierto día?
   a. Dos tengan bajo peso
   b. Todos tengan bajo peso
   c. Entre 4 y 6 tengan bajo peso
   d. Menos de 5 tengan bajo peso

8. El 75% de los establecimientos comerciales en el Distrito de Huacho no entregaba factura al momento de efectuar una transacción económica ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de 16 empresas?:
   a. Ninguna entregue factura
   b. A lo más la mitad entreguen factura
   c. Entre 8 y 12 entreguen factura
   d. Calcular el promedio y desviación estándar de las empresas que entregan factura

9. Se ha elaborado un examen de selección múltiple consistente en 10 preguntas. Hay cuatro respuestas posibles para cada pregunta. Suponga que ninguno de los estudiantes que van a rendir el test concurrió a clase o que no estudió para el examen. El profesor que toma la prueba ha establecido que para aprobar debe contestar correctamente al menos 6 preguntas. Si hubiese 100 alumnos en la clase. ¿Cuántos alumnos aprobarían?

10. Dos personas juegan a cara o sello y se han puesto de acuerdo en continuar la partida hasta que tanto cara como sello hayan aparecido por lo menos tres veces. Hallar la probabilidad que el juego no se acabe cuando se han realizado 10 tiradas.

RESUMEN

La distribución probabilística binomial es la más importante para variables discretas, muestra las probabilidades relacionadas con valores posibles de una variable aleatoria que son generadas por un proceso de Bernoulli. Dicho proceso es una secuencia de n ensayos idénticos en un experimento aleatorio, tal que cada ensayo:

a) produce uno de dos resultados posibles uno llamado éxito y otro fracaso. b) es independiente de cualquier otro ensayo, de manera que la probabilidad de éxito o de fracaso es constante de ensayo en ensayo.

La probabilidad para cualquier número dado de éxitos varía con el número de ensayos, n y la probabilidad de éxito p cualquier ensayo. Por lo tanto, existe una distribución de probabilidad binomial diferente para cada combinación de n y p.

El cálculo de las probabilidades binomiales mediante la fórmula puede resultar increíblemente laborioso cuando n es grande, se han preparado tablas de probabilidades binomiales y entonces no es necesario el uso directo de la fórmula. Solamente necesitamos utilizar una tabla con los valores dados de n, p y x para obtener la probabilidad deseada.

La tabla binomial individual se emplea para determinar un número específico de éxitos mientras que la tabla binomial acumulativa es útil cuando es necesario conocer la probabilidad menor, menor o igual, mayor, mayor o igual o exactamente x éxitos.

CAPÍTULO II

DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA DE POISSON

OBJETIVOS:

1. Identificar una distribución probabilística de Poisson.
2. Utilizar correctamente la fórmula de la distribución probabilística de Poisson.
3. Calcular las medidas de resumen de la distribución probabilística de Poisson.
4. Manejar correctamente las tablas estadísticas de la distribución probabilística de Poisson.

2.1. Definición de la Distribución Probabilística de Poisson

La distribución de Poisson, su nombre se debe al matemático Simeón Denis Poisson que la dio a conocer en 1838 en su trabajo Rechercher sur la probabilité des jugements en matiéres criminilles etmatieré civil (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles), un trabajo importante en el cual describe la probabilidad como un acontecimiento fortuito ocurrido en un tiempo o intervalo de espacio bajo las condiciones que la probabilidad de un acontecimiento ocurre es muy pequeña pero el número de intento es muy grande, entonces el evento ocurre algunas veces ya había sido introducida por Abraham De Moivre, como una forma límite de la distribución binomial que surge cuando se observa un evento después de un número grande de repeticiones.

2.2. Características de la Distribución Probabilística de Poisson

2.2.1. Describe el número de veces que ocurre un evento en un intervalo específico.
2.2.2. La probabilidad de un "éxito" es proporcional a la extensión del intervalo.
2.2.3. Los intervalos que no se sobreponen son los independientes.
2.2.4. Es una forma límite de la distribución binomial cuando el número total de ensayos es grande.
2.2.5. La probabilidad de éxito es pequeña.

2.3. Utilidad de la Distribución Probabilística de Poisson

2.3.1. En situaciones donde los sucesos son impredecibles o de ocurrencia aleatoria.
2.3.2. Permite determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso con resultado discreto.
2.3.3. Cuando la muestra n es grande y la probabilidad de éxitos es muy pequeña.
2.3.4. Cuando la probabilidad del evento que nos interesa se distribuye dentro de un segmento n dado como: distancia, área, volumen o tiempo definido.

La distribución de Poisson surge cuando un evento raro ocurre aleatoriamente en un intervalo o un espacio continuo, por lo tanto, es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros de 0 en adelante (0,1,2,…). El concepto de evento raro o poco frecuente debe ser entendido en el sentido de que la probabilidad de observar k eventos decrece rápidamente a medida que k aumenta.

2.4. Aplicaciones de la Distribución Probabilística de Poisson

Esta distribución tiene muchas aplicaciones en el mundo de los negocios y la economía como en los problemas de líneas de espera o "colas", políticas de inventario y control de calidad. Un restaurante o banco, deben saber algo sobre la distribución de probabilidad de llegadas de clientes en una hora determinada, ¿podría haber 2 clientes, 20 o 299? ¿Debería haber 5 empleados listos para servir o en todo caso sería mejor tener 25? Es claro que aquí hay un conflicto entre el tiempo de espera posible de empleados y el de los clientes.

Pagar a empleados inactivos es costoso, pero perder clientes molestos que no gustan de esperar también lo es.

Si son muy grandes los inventarios en un departamento de automotrices en relación a los pedidos, todos los clientes siempre estarán satisfechos por no esperar, pero los costos de inventario son altos.

Cuando los inventarios son muy bajos se perderán muchos clientes molestos porque no gustan de esperar. Tener un inventario que está demasiado "ocupado" también es costoso.

En cierto sentido, estos ejemplos pueden verse como casos en que interviene el control de calidad de varios tipos de servicios.

Citaremos otras aplicaciones como: llegada de un cliente al negocio durante una hora, las llamadas telefónicas que se reciben en un día, número de pacientes que llegan a un consultorio en una hora, número de llamadas que recibe un servicio de atención de emergencia durante un día, el número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta durante un período definido de tiempo, fugas en un oleoducto, nombres mal escrito en un directorio telefónico, los defectos en una alfombra, como hallar bacterias en un caldo, los incendios en un bosque ocasionados por rayos, pensemos en minas, meteoritos o yerbas en un campo,etc.

2.5. Propiedades de la Distribución Probabilística de Poisson

2.5.1. La esperanza de ocurrencia de un evento en un intervalo es la misma que la esperanza de ocurrencia del evento en otro intervalo cualesquiera, sin importar donde empiece el intervalo.

2.5.2. Que las ocurrencias de los eventos son independientes, sin importar donde ocurran.

2.5.3. Que la probabilidad de que ocurran un evento en un intervalo de tiempo depende de la longitud del intervalo.

2.5.4. Que las condiciones del experimento no varían.

2.5.5. Que nos interesa analizar el número promedio de ocurrencias en el intervalo.

2.6. Fórmula de la Distribución Probabilística de Poisson

$$\boldsymbol{p(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}}; \quad x = 0,1,2,\ldots$$

donde:

p$(x, \lambda) =$ Probabilidad de que ocurran x éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es λ.

λ = Media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto.

e = Constante matemática aproximada por 2,71828.

x = Variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra.

2.7. Aproximación de la Distribución Probabilística de Poisson a la Distribución Normal

La distribución de Poisson se puede expresar en forma gráfica, que consiste en un diagrama de barras, con asimetría positiva como la distribución binomial. Sin embargo al ir aumentando los valores de λ, va adquiriendo la típica forma de campana de Gauss, pudiendo deducirse, que a medida que aumenta el valor de λ, las variables de Poisson van a aproximarse a la distribución normal, por el **Teorema del Límite Central**. Se aproxima a la distribución normal con una media igual a λ y varianza igual a λ cuando $\lambda \geq 10$ y se empleará la fórmula siguiente:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

2.8. Medidas de Resumen de la Distribución Probabilística de Poisson

a. Media aritmética, Valor esperado o Esperanza matemática

E(X)= $\mu = \lambda$

b. Varianza

$\sigma^2 = \lambda$

c. Desviación Estándar

$\sigma = \sqrt{\lambda}$

2.9. Propiedad Reproductiva de la Distribución Probabilística de Poisson

La propiedad reproductiva de algunas distribuciones de probabilidad consiste en que, si dos o más variables aleatorias con distribución de probabilidad del mismo tipo se suman, la variable aleatoria resultante tiene una distribución del mismo tipo que los sumandos.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente., entonces:

$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

2.10. Tablas de la Distribución Probabilística de Poisson

Las tablas de la distribución de Poisson se encuentran tabuladas para los diferentes valores de λ que nos representa la media o promedio de éxitos por unidad de tiempo o área y los valores de x que es el número de éxitos. Existen dos clases de tablas individuales (TABLA C del APÉNDICE) y acumuladas (TABLA D del APÉNDICE)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El director de un hospital analiza los casos diarios de urgencia durante un periodo de varios años y concluyen que se distribuyen de acuerdo a la ley de Poisson. Los archivos del hospital revelan que los casos de urgencia promedian tres por día durante ese periodo. Si el director tiene razón respecto a la distribución de Poisson. Calcular la probabilidad de que:

   a. Ocurran exactamente dos casos de urgencia en un día dado.

   b. No ocurra un solo caso de urgencia en un día dado.

c. Ocurran tres o cuatro casos de urgencia en un día dado.

SOLUCIÓN:

a. $.\lambda = 3\,,\ \ x = 2$

$$p(x = 2, \lambda = 3) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}225$$

b. $\lambda = 3\,,\ \ x = 0$

$$p(x = 3, \lambda = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0{,}05$$

c. $\lambda = 3\,,\ \ x = 3\,,\ \ x = 4$

$$p(x = 3, \lambda = 3) + p(x = 4, \lambda = 4) = \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0{,}225 + 0{,}16875 = 0{,}39$$

2. El administrador de un banco que debe decidir de cuántas cajeras ha de disponerse durante las horas de mayor actividad en la tarde del viernes, si los clientes llegan un promedio de 6 clientes por minuto, mediante la distribución de Poisson. Encontrar las probabilidades siguientes:
   a. Llegan exactamente tres cliente al banco.
   b. Ningún cliente llega al banco.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 6,\ x = 3$

$$p(x = 3, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^3}{3!} = 0{,}089$$

b. $\lambda = 6,\ x = 0$

$$p(x = 0, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} = 0{,}002$$

3. Se está investigando la seguridad de una peligrosa intersección de calles, los registros policiales indican un promedio de 5 accidentes mensuales en esta intersección. El número de accidentes está distribuido de acuerdo con una distribución de Poisson y el departamento de seguridad vial desea que calculemos las probabilidades siguientes:
   a. Exactamente dos accidentes.
   b. Por lo menos un accidente.
   c. Ningún accidente.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 5,\ x = 2$

$$p(x = 2, \lambda = 5) = \frac{e^{-5}5^2}{2!} = 0{,}084$$

b. $\lambda = 5,\ x \geq 1$

$$p(x \geq 1, \lambda = 5) = 1 - p(x = 0, \quad \lambda = 5) = 1 - \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0{,}9933$$

c. $\lambda = 5, \ x = 0$

$$p(x = 0, \lambda = 5) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0{,}006$$

4. Los mensajes recibidos por el tablero de anuncios es una variable aleatoria de Poisson con un promedio de ocho mensajes por hora.
   a. Cuál es la probabilidad de que se reciban cinco mensajes por hora.
   b. Hallar la probabilidad de que reciba por una hora 10 mensajes en 1,5 horas.
   c. Determinar la probabilidad de que reciba menos de 3 mensajes en media hora.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 8, \ x = 5$

$$p(x = 5, \lambda = 8) = \frac{e^{-8}8^5}{5!} = 0.0916$$

b. $\lambda = 1{,}5(8) = 12, \ x = 10$

$$p(x = 10, \lambda = 12) = \frac{e^{-12}12^{10}}{10!} = 0.1048$$

c. $\lambda = 0{,}5\ (8) = 4, \ x < 3$

$$p(x \leq 2, \lambda = 4) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} + \frac{e^{-4}4^1}{1!} + \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 0{,}0183 + 0{,}0732 + 0{,}1464 = 0{,}2379$$

5. Las personas llegan aleatoriamente a la ventanilla de un banco en promedio de 15 por hora en un cierto día. Calcular las probabilidades siguientes:
   a. Exactamente lleguen 5 personas en una hora.
   b. Exactamente lleguen 2 personas en un período de tiempo de 12 minutos.
   c. A lo más una persona llega en un período de 8 minutos.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 15, \ x = 5$

$$p(x = 5, \lambda = 15) = \frac{e^{-15}15^5}{5!} = 0.0019$$

b. $\lambda = \frac{12(15)}{60} = 3, \ x = 2$

$$p(x = 2, \lambda = 3) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.2240$$

c. $\lambda = \frac{8(15)}{60} = 2, \ x \leq 1$

$$p(x \leq 1, \lambda = 2) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0{,}1353 + 0{,}2707 = 0{,}4060$$

6. Se sabe que un líquido particular contiene ciertas bacterias con un promedio de 4 bacterias por cm^3 durante una inspección determinada. Encuentre las probabilidades siguientes:

   a. No contenga bacteria alguna.

   b. Haya por lo menos una bacteria en $\frac{1}{2}cm^3$

   SOLUCIÓN

   a. . $\lambda = 4,\ x = 0$

   $$p(x = 0, \lambda = 4) = \frac{e^{-4}5^0}{0!} = 0{,}0183$$

   b. . $\lambda = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ ,\ x \geq 1$

   $$p(x \geq 1, \lambda = 2) = 1 - p(x = 0, \lambda = 2) = 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$$

7. En una fábrica el número de accidentes por semana sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Determine las probabilidades siguientes:

   a. Ocurra 4 accidentes en el transcurso de tres semanas.

   b. Ocurra 2 accidentes en una semana, y otros 2 accidentes en la semana siguiente.

   c. Es lunes, y ya ocurrido un accidente. La probabilidad que en aquella semana no haya más de 3 accidentes.

   SOLUCIÓN

   a. Definimos las variables aleatorias de Poisson con parámetro $\lambda_i = 2\ (i = 1,2,3)$ respectivamente.

   X_1 = Número de accidentes en la primera semana.

   X_2 = Número de accidentes en la segunda semana.

   X_3 = Número de accidentes en la tercera semana.

   Las tres variables aleatorias son independientes. La variable aleatoria $X_1 + X_2 + X_3 = X$, número de accidentes en las tres semanas, también sigue una distribución de Poisson con parámetro: $2+2+2 = 6$.

   $\lambda = 6,\ x = 4$

   $$p(x = 4, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^4}{4!} = 0{,}1339$$

   b. Si X_1 y X_2 son las variables definidas en la parte a. debemos calcular,

   $$p(x = 2, \lambda = 2) \cap p(x = 2, \lambda = 2) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} \cdot \frac{e^{-2}2^2}{2!} = 0{,}0733$$

   c. Sea X = Número de accidentes en una semana. Es una variable de Poisson con parámetro $\lambda = 2$.

   Debemos calcular,

$$p(x \leq 3 \,/\, x \geq 1, \lambda = 2) = \frac{p(1 \leq x \leq 3)}{p(x \geq 1)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!}}{1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!}} = \frac{0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804}{1 - 0{,}1353} = 0{,}8347$$

8. En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0,2 imperfecciones en promedio por minuto. Hallar la probabilidad de identificar:
   a. Una imperfección en 3 minutos.
   b. Al menos dos imperfecciones en 5 minutos.
   c. Más de una imperfección en 15 minutos

   SOLUCIÓN

   a. . $\lambda = 0{,}2(3) = 0{,}6,\; x = 1$

   $$p(x = 1, \lambda = 0{,}6) = \frac{e^{-0{,}6}0{,}6^1}{1!} = 0{,}3293$$

   b. $\lambda = 0{,}2(5) = 1,\; x \geq 2$

   $$p(x \geq 2, \lambda = 1) = 1 - p(x \leq 1, \lambda = 1) = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} + \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 1 - (0{,}3679 + 0{,}3679) = 0{,}2642$$

   c. $\lambda = 0{,}2(15) = 3,\; x \geq 1$

   $$p(x \geq 1, \lambda = 3) = 1 - p(x = 0, \lambda = 3) = 1 - \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 1 - 0{,}0498 = 0{,}9502$$

9. Un cajero automático es utilizado cada 20 minutos por un promedio de 6 personas. Se desea saber cuál es la probabilidad:
   a. Que el cajero sea utilizado por 5 personas en 20 minutos.
   b. Que el cajero sea utilizado por 10 personas en 20 minutos.
   c. Que el cajero sea utilizado por 5 personas o más en 20 minutos.

   SOLUCIÓN

   a. $\lambda = 6,\; x = 5$

   $$p(x = 5, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^5}{5!} = 0{,}162$$

   b. $\lambda = 6,\; x = 10$

   $$p(x = 10, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^{10}}{10!} = 0{,}0412$$

   c. $\lambda = 6,\; x \leq 5$

$$p(x \leq 5, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \frac{e^{-6}6^2}{2!} + \frac{e^{-6}6^3}{3!} + \frac{e^{-6}6^4}{4!} + \frac{e^{-6}6^5}{5!}$$

$$= 0{,}0025 + 0{,}015 + 0{,}045 + 0{,}09 + 0{,}135 + 0{,}162 = 0{,}4495$$

10. La empresa MOVISTAR emplea 5 operadores de información que reciben solicitudes independiente una de otra con un promedio de 2 solicitudes por minuto. Encontrar las probabilidades siguientes:

    a. Que reciba 3 solicitudes de información por minuto.
    b. Que reciba 6 solicitudes de información en 3 minutos.
    c. Que reciba 2 solicitudes de información por minuto.

    SOLUCIÓN

    a. . $\lambda = 2, \ x = 3$

    $$p(x = 3, \lambda = 2) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0{,}1804$$

    b. $\lambda = 2(3) = 6, \ x = 6$

    $$p(x = 6, \lambda = 6) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} = 0{,}1606$$

    c. $\lambda = 2, \ x = 6$

    $$p(x = 6, \lambda = 2) = \frac{e^{-2}2^6}{6!} = 0{,}0120$$

11. En la Bolsa de Comercio se ha estudiado el comportamiento de las compras y ventas de acciones en un día normal se van produciendo transacciones mediante la distribución de Poisson con un promedio de 10 operaciones por hora. Calcular las probabilidades siguientes:

    a. Se realiza 5 operaciones por hora.
    b. Se realiza 3 operaciones en 30 minutos.
    c. Se realiza a lo más una operación por hora.
    d. Hallar la media aritmética y varianza.

    SOLUCIÓN

    a. . $\lambda = 10, \ x = 5$

    $$p(x = 5, \lambda = 10) = \frac{e^{-10}10^5}{10!} = 0{,}00000125$$

    b. $\lambda = 10\left(\frac{30}{60}\right) = 5 \ , \ x = 3$

    $$p(x = 3, \lambda = 5) = \frac{e^{-5}5^3}{3!} = 0{,}1404$$

    c $\lambda = 10 \, , \ x \leq 1$

    $$p(x \leq 1, \lambda = 10) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} + \frac{e^{-10}2^1}{1!} = 0{,}000045 + 0{,}000091 = 0{,}000136$$

    d. Media o Esperanza matemática

    $E(X) = \mu = \lambda = 10$

    Varianza

$\sigma^2 = \lambda = 10$

12. En un hospital la demanda de pacientes con dolor abdominal que son atendidos tienen un promedio de 16 por día. Hallar la probabilidad de que un día determinado haya más de 25 pacientes con dolor abdominal.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 16$, teniendo en cuenta que $\lambda \geq 10$ se puede hacer una aproximación a una normal con: $\mu = 16 \quad \sigma = 4$.

Entonces:

$$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25)$$

Al realizar la aproximación a la normal hay que hacer la corrección por continuidad, por lo tanto, la probabilidad anterior queda de la siguiente manera:

$$P(X > 24{,}5) = P\left(z \leq \frac{24.5 - 16}{4}\right) = P(Z \leq 2{,}13) = 0{,}0166$$

13. En un determinado punto de una calle del centro de una ciudad se instala un control pasando un promedio de 4 vehículos por minutos. Encontrar las probabilidades siguientes:

a. Pasan exactamente 2 vehículos por minuto.

b. No pasan ningún vehículo por minuto.

c. Pasan exactamente 10 vehículos por minuto.

SOLUCIÓN

a. $\lambda = 4,\ x = 2$

$$p(x = 2, \lambda = 4) = \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 0{,}1465$$

b. $\lambda = 4,\ x = 0$

$$p(x = 0, \lambda = 4) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0{,}0183$$

c. $\lambda = 4,\ x = 10$

$$p(x = 10, \lambda = 4) = \frac{e^{-4}4^{10}}{10!} = 0{,}0053$$

14. El número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un período específico es una variable aleatoria con una distribución de Poisson. Si la probabilidad de ninguna emisión es igual a $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 2 o más emisiones?

SOLUCIÓN

X = Número de partículas emitidas por la fuente radiactiva en el período.

X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y tal que

$$P(x=0)=e^{-\lambda}=\frac{1}{3}$$

de donde

$$\lambda=ln3$$

Luego,

$$P(x\geq 2)=1-[P(x=1)+P(x=0)]$$
$$=1-\left[\frac{ln3.e^{-ln3}}{1!}+e^{-ln3}\right]$$
$$=1-\left[\frac{ln3}{3}+\frac{1}{3}\right]$$
$$=\frac{2-ln3}{3}$$

15. Supóngase que la probabilidad de que un artículo producido por una máquina especial sea defectuoso es igual a 0,2. Si los artículos producidos, se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no se encuentre más de un artículo defectuoso? Use las distribuciones Binomial y Poisson compare las respuestas.

SOLUCIÓN

X: Número de artículos defectuosos seleccionados.

$R_X=\{0,1,2,\ldots,10\}$

a. X tiene distribución binomial con p = 0,2 y n = 10

Entonces

$$P[X\leq 1]=P[X=0]+P[X=1]$$
$$=\binom{10}{0}(0,2)^0(0,8)^{10}+\binom{10}{1}(0,2)^1(0,8)^9$$
$$=0,2684+0,1074=0,3758$$

b. Aproximemos la distribución binomial de X por una distribución de Poisson con parámetro: λ = 0,2(10) = 2. Luego,

$$P[X_0=x]\cong P\left[X_p=x\right]=\frac{2^x e^x}{x!}\ ,\quad x = 0, 1,2,\ldots,10$$

y $P[X_P\leq 1]=1-P\left[X_p\geq 2\right]=1-0,59399=0,4060$

16. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro β, y si $P(X=0)=0,2$. Calcular $P(X>2)$.

SOLUCIÓN

X, es una variable aleatoria con función de distribución de Poisson de parámetro β, entonces

$P[X = x] = \frac{\beta^x e^{-\beta}}{x!}$ $\qquad x = 0,1,2, \ldots$

Luego, $P(X = 0) = e^{-\beta} = 0,2$
o sea $-\beta = ln(0,2)$ de donde $\beta = 1,609$.

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de X es:

$P[X = X] = \frac{(1,609)^x e^{-1,609}}{x!}$, $x = 0,1,\ldots$

y $P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2]$
$= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2])$
$= 1 - [0,259 + 0,332 + 0,20]$
$= 0,219$

16. Utilice las tablas de la distribución de Poisson individual o acumulativa y encuentre las probabilidades siguientes:
   a. $\lambda = 0,3$ $x = 2$ $p(x = 2, \lambda = 0,3) = 0,0333$
   b. $\lambda = 1,8$ $x = 5$ $p(x = 5, \lambda = 1,8) = 0,0216$
   c. $\lambda = 4,7$ $x = 9$ $p(x = 9, \lambda = 4,7) = 0,0281$
   d. $\lambda = 1,2$ $x = 2$ $p(x = 2, \lambda = 1,2) = 0,2169$
   e. $\lambda = 0,9$ $x = 0$ $p(x = 0, \lambda = 0,9) = 0,4066$
   f. $\lambda = 2,6$ $x = 3$ $p(x = 3, \lambda = 2,6) = 0,2176$
   g. $\lambda = 2,0$ $x = 4$ $p(x = 4, \lambda = 4,0) = 0,0902$
   h. $\lambda = 2,4$ $x = 3$ $p(x = 3, \lambda = 4,4) = 0,2090$
   i. $\lambda = 1,0$ $x = 1$ $p(x = 1, \lambda = 1,0) = 0,3679$
   j. $\lambda = 0,5$ $x = 2$ $p(x = 2, \lambda = 3,5) = 0,0758$
   k. $\lambda = 0,6$ $x < 3$ $p(x < 3, \lambda = 0,3) = 0,9769$
   l. $\lambda = 1,1$ $x < 3$ $p(x \leq 5, \lambda = 1,1) = 0,9990$
   ll. $\lambda = 0,7$ $x < 3$ $p(x > 3, \lambda = 0,7) = 1 - p(x \leq 3) = 1 - 0,9942 = 0,0058$
   m. $\lambda = 1,8$ $x \geq 4$ $p(x \leq 3, \lambda = 1,8) = 1 - p(x \leq 3) = 1 - 0,8913 = 0,1087$
   n. $\lambda = 2,4$ $x < 7$ $p(x \leq 6, \lambda = 2,4) = 0,9884$
   ñ. $\lambda = 3,0$ $x \geq 6$ $p(x \geq 6, \lambda = 3,0) = 1 - p(x \leq 5) = 1 - 0,9160 = 0,0840$
   o. $\lambda = 1,9$ $x \geq 3$ $p(x \geq 3, \lambda = 1,9) = 1 - p(x \leq 2) = 1 - 0,7037 = 0,2963$
   p. $\lambda = 1,0$ $x > 6$ $p(x > 6, \lambda = 1,0) = 1 - p(x \leq 5) = 1 - 0.9994 = 0,0006$
   q. $\lambda = 2.,2$ $x < 2$ $p(x < 2, \lambda = 2,2) = 0,3546$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Suponga que hay 300 errores de impresión distribuidos aleatoriamente a lo largo de un libro de 500páginas. Encuentre la probabilidad de que en una página dada presente dos errores de impresión.

2. Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día. Cuál es la probabilidad de que reciba:
   a. Cuatro cheques sin fondo en un día determinado.
   b. Diez cheques sin fondo en cualquiera de dos días consecutivos.

3. La probabilidad de que un estudiante presente problemas en la columna vertebral es de 0,004. Se examina aleatoriamente 1900 estudiantes, hallar la probabilidad de que:
   a. Menos de 6 presenten problemas de columna vertebral.
   b. 8,9 o 10 presenten problemas en la columna vertebral.

4. Según estudios realizados por el Ministerio de Trabajo, se ha determinado que el número de pequeños negocios que quiebran al mes presenta una distribución de Poisson con una media de 2,6. Hallar la probabilidad de que:
   a. Ninguno se declare en quiebra el próximo mes.
   b. Tres se declaren en quiebra el próximo mes.
   c. Ocurran menos de tres bancarrotas el siguiente mes.
   d. Uno o más negocios se declaren en quiebra el próximo mes.

5. Supóngase que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de tales partículas emitidas durante el período de una hora tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Se emplea un instrumento para contar y para anotar el número de las partículas emitidas. S i más de 30 partículas llegan durante cualquier período de una hora, el instrumento para anotar es incapaz de controlar el exceso y simplemente anota 30. Si Y es la variable aleatoria definida como el número de partículas anotadas por el instrumento que cuenta, obtenga la distribución de probabilidades de Y.

6. El número de buques tanques, digamos N, que llegan cada día a cierta refinería tiene una distribución de Poisson con parámetro λ = 2. Las actuales instalaciones portuarias pueden despachar tres buques al día. Si más de tres buques tanques llegan en un día, los que están en exceso deben enviarse a otro puerto.
   a. En un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de tener que hacer salir buques tanques?
   b. ¿En cuánto deben aumentarse las instalaciones actuales para permitir la atención a todos los buques tanques aproximadamente el 90% de los días?
   c. ¿Cuál es el número esperado de buques tanques que llegan al día?

d. ¿Cuál es el número más probable de buques tanques que llegan diariamente?

e. ¿Cuál es el número esperado de buques tanques atendidos diariamente?

f. ¿Cuál es el número esperado de buques tanques devueltos diariamente?

7. Cierto alimento produce una reacción alérgica en un 0,015 de una población grande. Si 100000 personas comen este alimento diario en promedio.

   a. ¿Cuál es el número esperado de personas con reacción alérgica?

   b. ¿Cuál es la función de probabilidad del número de personas en este grupo de 100000 son alérgicos a este alimento?

8. Se ha observado que las cajas de cerveza se toman de los estantes de un supermercado a razón de 10 cajas por hora durante el período de mayor venta.

   a. ¿Cuál es la probabilidad que se saque al menos una caja durante los primeros 6 minutos de un período de mayor venta?

   b. ¿Cuál es la probabilidad que se tome del estante al menos una caja durante cada uno de 3 intervalos consecutivos de 6 minutos?

9. Los accidentes de trabajo, que se producen por semana en una fábrica, siguen una distribución de Poisson con un promedio de 5 accidentes por día. Calcular las probabilidades siguientes:

   a. Dos accidentes por día.

   b. Tres accidentes por día.

   c. A lo más dos accidentes por día.

   d. Encuentre el número esperado y la desviación estándar.

RESUMEN

En una distribución probabilística de Poisson se refiere al número de acontecimientos de un evento específico dentro de un tiempo o espacio especificado. En un proceso de Poisson, ocurre una serie de eventos de un tipo dado de una manera aleatoria y por lo tanto impredecible, en el espacio o en el tiempo, tal que: (a) la variable aleatoria Poisson puede ser igual a cualquier entero entre cero e infinito, (b) el número de acontecimientos en una unidad de tiempo o espacio es independiente de cualquiera otra unidad y,(c) la probabilidad de acontecimientos es la misma en todas sus unidades. Las probabilidades asociadas con valores alternativos de la variable aleatoria de Poisson se pueden determinar con la ayuda de la formula Poisson. Se puede derivar una distribución de probabilidad Poisson diferente para cada valor de λ, que es el número medio de acontecimientos, se han tabulado en tablas de probabilidad Poisson para valores individuales y acumulativos de la variable Poisson. Una vez más, hay fórmulas simplificadas para calcular medidas de resumen para la variable aleatoria Poisson.

CAPÍTULO III

DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA GEOMÉTRICA

OBJETIVOS:

1. Identificar una distribución probabilística geométrica.
2. Utilizar correctamente la fórmula de la distribución probabilística geométrica.
3. Calcular las medidas de resumen de la distribución probabilística geométrica.

3.1. Definición de la Distribución Probabilística Geométrica

La variable aleatoria X definida como la distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la consecución del éxito o resultado deseado y tiene interesantes aplicaciones en las muestras realizadas. También implica la existencia de una dicotomía de posibles resultados y la independencia de las pruebas entre sí.

Esta distribución es un caso especial de la, distribución binomial ya que desea que ocurra un éxito por primera y única vez en el último ensayo que se realiza el experimento.

3.2. Características de la Distribución Probabilística Geométrica

3.2.1. El proceso consta de un número no definido de pruebas o experimentos separados o separables. El proceso concluirá cuando se obtenga por primera vez el resultado deseado (éxito).

3.2.2. Cada prueba puede dar dos resultados mutuamente excluyentes A y no A.

3.2.3. La probabilidad de obtener un resultado A en cada prueba es p y la de obtener un resultado no A es q siendo $p + q = 1$..

3.2.4. Las probabilidades $p\ y\ q$ son constantes en todas las pruebas, por tanto, las pruebas son independientes.

3.3. Propiedades de la Distribución Probabilística Geométrica

3.3.1. Una interesante y útil propiedad de la distribución geométrica es que no tiene memoria, esto es:

$$P[X > x + r\ /\ X > r] = P[X > x]$$

3.3.2. La distribución geométrica es decreciente, es decir,

$$p(x) < p(x-1), \qquad para \quad x = 2,3, \ldots$$

3.4. Fórmula de la Distribución Probabilística Geométrica

La variable aleatoria X definida como la distribución geométrica,$G(p,q)$ presenta la distribución de probabilidad de la siguiente forma.

$$p(1) \ = P[X = 1] = P[E] \ = p$$
$$p(2) \ = P[X = 2] = P[FE] \ = p$$
$$p(3) = P[X = 3] = P[FFE] = pq^2$$

La fórmula de la distribución geométrica:

$$p(x) = G(p,q) = q^{x-1}p \qquad x = 1,2,3, \ldots$$

donde:

$p(x) =$ Probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo por primera y única vez.

$p =$ Probabilidad de éxito

$q =$ Probabilidad de fracaso.

Cumpliendo con los siguientes axiomas de probabilidad:

a) $\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = 1$ y

$b)$ $p(x) \geq 0$ para todo x

3.5. Función de Distribución Acumulada Geométrica

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - q^{\|x\|}, & x \geq 1 \end{cases}$$

3.6. Medidas de Resumen de la Distribución Probabilística Geométrica

a. Media aritmética, Valor esperado o Esperanza matemática

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{p}$$

b. Varianza

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

c. Desviación Estándar

$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que aparezca cara es $\frac{2}{3}$, mientras que la probabilidad de que aparezca sello es de $\frac{1}{3}$. Determine la probabilidad de que en el último lanzamiento aparezca cara.

SOLUCIÓN

Si trazamos un diagrama de árbol que nos represente los 8 lanzamientos de la moneda, observaremos que la única rama de ese árbol que nos interesa es aquella en donde aparecen 7 sellos seguidos y por último cara, como se muestra a continuación:

SSSSSSSC

Si denotamos,

x =Número de repeticiones del experimento necesarios para que ocurra un éxito por primera y única vez = 8 lanzamientos.

p =Probabilidad de que aparezca una cara =$p(éxito) = \frac{2}{3}$

q =Probabilidad de que aparezca un sello$= p(fracaso) = \frac{1}{3}$

Entonces la probabilidad sería:

P (aparezca una cara en el último lanzamiento)= $p(s)p(s)p(s)p(s)p(s)p(s)p(s)p(c)$

$$= qqqqqqqp = q^{x-1}p$$

donde $x = 8$ lanzamientos necesarios para que aparezca por primera vez una cara.

$p = \frac{2}{3}$ probabilidad de que aparezca una cara.

$q = \frac{1}{3}$ probabilidad de que aparezca un sello.

$$p(x = 8) = \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}0003048$$

2. Si la probabilidad de que un cierto dispositivo de medición muestre una desviación excesiva es de 0,05. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. el sexto de estos dispositivos de medición sometidos a prueba sea el primero en mostrar una desviación excesiva.

b. el séptimo de estos dispositivos de medición sometidos a prueba, sea el primero que no muestre una desviación excesiva.

SOLUCIÓN

a. x = 6

p = 0,05

q = 0,95

$p(x = 6) = (0{,}95)^{6-1}(0{,}05) = 0{,}03869$

b. x = 5

p = 0,95

q = 0,05

$p(x = 5) = (0{,}05)^{5-1}(0{,}95) = 0{,}0000059$

3. Los registros de una compañía constructora de pozos, indican que la probabilidad de que uno de sus pozos nuevos, requiera de reparaciones en el término de un año es de 0,20–. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto pozo construido por esta compañía en un año dado sea el primero en requerir reparaciones en un año?

SOLUCIÓN

. x = 5

p = 0,20

q =0,80

$$p(x = 5) = (0{,}88)^{5-1}(0{,}20) = 0{,}08192$$

4. Se lanza un dado hasta que aparece el número 6. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de lanzamientos sean 3.

SOLUCIÓN

En este problema el éxito es la aparición del número 6 y la probabilidad de que salga el número 6 al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$, por lo que $p = \frac{1}{6}\ y\ q = \frac{5}{6}$ Como nos interesa calcular la probabilidad de que el 6 aparezca en el tercer lanzamiento, entonces:

$$p(x = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2}\left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}1157$$

5. La probabilidad de que cierto análisis clínico dé una reacción positiva es 0,4. Los resultados de los análisis son independientes unos de otros. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera reacción positiva ocurra antes del tercer análisis?

SOLUCIÓN

El éxito es que salga una reacción positiva, por lo que $p = 0{,}4\ y\ q = 0{,}6$ Si la primera reacción positiva debe aparecer antes del tercer análisis, entonces:

$$p(x < 3) = p(x = 1) + p(x = 2) = (0{,}6)^{1-1}(0{,}4) + (0{,}6)^{2-1}(0{,}4) = 0{,}64$$

6. Se tienen 4 llaves de las cuales sólo una abre un candado. Se prueban las llaves una tras otra, con reemplazo hasta encontrar la que abre el candado. Calcular la probabilidad de que el candado se abra después del segundo intento

SOLUCIÓN

Si seleccionamos una llave al azar, la probabilidad de que éste abra el candado es $\frac{1}{4}$ y como el éxito es que se abra el candado, entonces $p = \frac{1}{4} = 0{,}25\ y\ q = 0{,}75.$ Deseamos encontrar $p(x > 2)$

Sabemos que $p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2)$ y que:

Por lo tanto:

$$p(x > 2) = 1 - 0{,}4375 = 0{,}5625$$

7. Tres personas lanzan una moneda y el disparejo paga el café. Si los tres resultados son iguales, las monedas se lanzan nuevamente. Encontrar la probabilidad de que se necesiten menos de 4 intentos para saber quién paga el café.

SOLUCIÓN

El éxito consiste en sacar el disparejo. Lo primero es encontrar el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de 3 monedas:

$$E = \{ccc, ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss\}$$

El espacio muestral está conformado por 8 elementos o sucesos y que es un espacio equiprobable.

El número de resultados en que aparece el disparejo es 6, por lo que $p = \frac{6}{8} = 0{,}75\ y\ q = 0{,}25$

Si queremos obtener la probabilidad de que se necesiten menos de 4 intentos para saber quién paga el café, entonces:

$$\begin{aligned} p(x < 4) &= p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) \\ &= (0{,}25)^{1-1}(0{,}75) + (0{,}25)^{2-1}(0{,}75) + (0{,}25)^{3-1}(0{,}75) \\ &= 0{,}9844 \end{aligned}$$

8. Se lanzan dos dados hasta que la suma de los números que aparecen sea 7. Calcular:
   a. La esperanza del número de lanzamientos que se necesiten.
   b. La varianza del número de lanzamientos que se necesiten.

   SOLUCIÓN

   El éxito consiste es que la suma de los números que aparecen sea 7, por lo que el primer paso es el cálculo de su probabilidad. El espacio muestral está conformado por 36 elementos o sucesos. Ahora calculamos el número de formas posibles en que aparece el 7. Los posibles resultados son: $\{(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)5,2(6,1)\}$ y aplicando la función del conjunto aditivo encontramos que son 6 resultados, por lo que $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ y $q = \frac{5}{6}$

   a. Sabemos que para calcular el valor esperado utilizamos:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

   b. La varianza del número de lanzamientos se calcula:

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$$

9. Una compañía petrolera perforará varios pozos en cierta área para encontrar uno que sea productivo. La probabilidad de tener éxito en una prueba dada es 0,2
   a. Hallar la probabilidad de que el tercer pozo sea el primer pozo productivo
   b. Si la compañía solo puede perforar a lo más 10 pozos. ¿Cuál es la probabilidad que ninguno sea productivo.

   SOLUCIÓN

   a. Sea Y= Número de pozos perforados hasta encontrar uno productivo

$$p(Y = 3) = qqp = (0{,}8)(0{,}8)(0{,}2) = 0{,}128$$

b. $p(ninguno\ sea\ productivo) = qqqqqqqqqq = q^{10} = 0{,}8^{10} = 0{,}1078$

10. Los dos tercios de los niños de un colegio están ausentes por causa de una epidemia. En una clase de 25 estudiantes, el profesor pasa lista. Defina X como el número de estudiantes llamados hasta que uno responda.

a. Hallar la probabilidad que el décimo niño llamado sea el primero que respondas presente.

b. Determine el valor esperado y la desviación estándar.

SOLUCIÓN

a. Definimos X = Número de estudiantes llamados hasta que uno responda presente.

$$R_X = \{1,2,3,\ldots,24,25\}$$

$p(x) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $q(x) = \frac{2}{3}$

Luego: $p(x = 10) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}008671$

b. Valor esperado:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Desviación estándar:

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{(3)^2} = 6$$

$$\sigma = 2{,}449 = 2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La probabilidad de éxito al lanzar un cohete es 0,8 suponga que el ensayo del lanzamiento ha ocurrido. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente sean necesarios 6 ensayos?

2. Un matrimonio desea tener una hija, y por ello deciden tener hijos hasta el nacimiento de un hijo. Calcular:
   a. El número esperado de hijos que tendrá el matrimonio.
   b. La pareja acabe teniendo tres hijos o más.

3. Se dispone de un aparato que fabrica objetos de plástico. Este aparato se utiliza hasta que aparece el primer objeto defectuoso. Se sabe que la probabilidad que el objeto sea no defectuoso es $\frac{8}{9}$ la probabilidad de que el objeto sea defectuoso es $\frac{1}{9}$. Sea X la variable aleatoria que da el número de objetos que produce el aparato hasta antes de darle de baja. Determine la función de probabilidad de X.

4. Un locutorio realiza llamadas telefónicas sucesivas con probabilidad de éxito de 0,1. Las llamadas cuestan s/ 0,50 cada una. ¿Cuál es el costo esperado para obtener la primera venta exitosa?

5. Una compañía constructora de motores, indica que la probabilidad de que un motor nuevo requiera de reparación en un año es de 0,22. ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto motor construido por esta compañía en un año dado sea el primero en requerir reparación?

6. En el salón de clases hay 8 alumnos de ojos cafés, 9 de ojos azules, 7 de ojos negros y 10 de ojos verdes, si extraemos 6 alumnos. Calcular la probabilidad de que este último tenga los ojos claros.

7. Una máquina detecta fallas en los productos que elabora una fábrica. Si la probabilidad de falla es del 5%, determine la probabilidad que la máquina encuentre su primer producto defectuoso en la octava ocasión que selecciona un producto para su inspección.

8. En la selección del personal de una empresa se sabe que solo el 20% de los aspirantes a un puesto de trabajo cumplen los requisitos exigidos. Se seleccionan al azar los aspirantes y se les entrevista uno a uno. Hallar la probabilidad de que el primer aspirante que cumple los requisitos sea el cuarto entrevistado.

9. La probabilidad de que en una muestra de aire contenga una molécula rara es 0,01. Si se supone que las muestras son independientes respecto a la presencia de la molécula. Hallar la probabilidad de que sea necesario analizar 125 muestras antes de detectar molécula rara.

10. La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es de 0,9. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 de los próximos 7 pacientes que se sometan a esta intervención sobrevivan?

11. Un agricultor que siembre fruta afirma que $\frac{2}{3}$ de su cosecha de duraznos han sido contaminada por la mosca. Encuentre la probabilidad de que al inspeccionar 4 duraznos.
    a. Los 4 estén contaminados por la mosca.
    b. Entre 1 y 3 duraznos estén contaminados por la mosca.

RESUMEN

La distribución probabilística geométrica está relacionada con una secuencia de ensayos de Bernoulli, excepto que el número de ensayos no es fijo. En consecuencia, la distribución geométrica hereda las características de la distribución binomial, a excepción del concepto del cual se quiere calcular la probabilidad. Se define como el número de ensayos requeridos para lograr el primer éxito. Es obvio que para obtener el primer éxito se debe realizar el experimento cuando me4nos una vez, por lo que los valores que puede tomar la variable aleatoria X son 1, 2,3,…, n, esto es, no puede tomar el valor cero.

CAPÍTULO IV

DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA HIPERGEOMÉTRICA

OBJETIVOS:

1. Identificar una distribución probabilística hipergeométrica.
2. Utilizar correctamente la fórmula de la distribución probabilística hipergeométrica.
3. Calcular las medidas de resumen de la distribución probabilística hipergeométrica.

4.1 Definición de la Distribución Probabilística Hipergeométrica

La distribución hipergeométrica se presenta en procesos muestrales sin reemplazo en lo que se investiga la presencia o ausencia de cierta característica. Por ejemplo, en un procedimiento de control de calidad en una empresa farmacéutica, durante el cual se extraen muestras de cápsulas fabricadas y se someten a análisis para determinar su composición. Durante las pruebas, las cápsulas son destruidas y no pueden ser devueltas al lote del que provienen. En esta situación, la variable que cuenta el número de cápsulas que no cumplen con los criterios de calidad establecidos sigue una distribución hipergeométrica. Por tanto, esta distribución es equivalente a la binomial, pero cuando el muestreo se hace sin reemplazo.

4.2. Características de la Distribución Probabilística Hipergeométrica

4.2.1. La población o conjunto donde debe hacerse el muestreo consta de número de individuos o elementos a seleccionar.

4.2.2. Cada individuo puede ser caracterizado como un éxito (E) o fracaso (F).

4.2.3. Se selecciona una muestra de n individuos de entre los k individuos marcados con éxito y los N-K restantes como fracaso..

4.2.4. Las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados no son constantes.

4.2.5. Cada ensayo o repetición del experimento no es independiente de los demás.

4.2.6. El número de repeticiones del experimento (n) es constante.

4.3. Utilidad de la Distribución Probabilística Hipergeométrica

La distribución hipergeométrica es especialmente útil en todos aquellos casos en los que se extraiga muestras o se realizan experiencias repetidas sin devolución del elemento extraído o sin retornar a la situación experimental inicial. Se realiza en situaciones en las que se repite un número determinado de veces una prueba dicotómica de manera que con dada sucesivo resultado se ve alterada la probabilidad de obtener en la siguiente prueba uno u otro resultado. Es una distribución fundamental en el estudio de muestras pequeñas de poblaciones pequeñas y en el cálculo de probabilidades de, juegos de azar y tiene grandes aplicaciones en el control de calidad en otros procesos experimentales en los que no es posible retornar a la situación de partida.

4.4. Fórmula de la Distribución Probabilística Hipergeométrica

Supongamos que se tiene una población finita de tamaño N, en donde los elementos solo tienen dos características, digamos éxito y fracaso, hombres y mujeres, aprobados y desaprobados, buenos y malos, empleados y desempleados, enfermos y sanos, etc. Esto significa que de acuerdo a las características, la población se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos: los que cumplen y los que no cumplen con la característica estudiada. Supongamos también que en esta población existe a elementos de cierta característica que nos interesa analizar, por lo que N-k elementos no la tienen.

Si el tamaño muestral n es muy pequeño en relación al número total de elementos N, las probabilidades hipergeométricas son muy parecidas a las binomiales, y puede usarse la distribución binomial en lugar de la hipergeométrica.

La fórmula de la distribución hipergeométrica:

$$p(x) = H(x, N, n, K) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

donde:

N = Número de elementos de la población

n = Número de elementos de la muestra

k = Número de éxitos en la población

x = Número de éxitos en la muestra

4.5. Función de Distribución Acumulada de la Hipergeométrica

$$\boldsymbol{F(x) = P[X \leq x] = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[\![x]\!]} \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & 0 \leq x < min(k, n) \\ 1, & x \geq min(k, n) \end{cases}}$$

4.6. Medidas de Resumen de la Distribución Probabilística Hipergeométrica

a. Media aritmética, Valor esperado o Esperanza matemática

$\mathrm{E(X)} = n\left[\frac{k}{N}\right]$

b. Varianza

$\sigma^2 = n\left[\frac{k}{N}\right]\left[1 - \frac{k}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$

4.7. Aproximación de la Hipergeométrica a la Binomial

Si el tamaño n de la muestra sin reemplazo es pequeña con relación a N, la probabilidad de cada extracción varía muy levemente.

En la práctica cuando n es menor que el 10% de N, (es decir, $\frac{n}{N} < 0{,}1$) se aproxima la distribución hipergeométrica a la distribución binomial con $p = \frac{k}{N}$ y n. Entonces:

$$\boldsymbol{H(x, N, n, K) = B\left(x, n, \frac{k}{N}\right) = \binom{n}{x}\left(\frac{k}{N}\right)^{x}\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-x}}$$

La media y la varianza se aproximan por:

$$\mu = np = n\left[\frac{k}{N}\right]$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = n\left[\frac{k}{N}\right]\left[1-\frac{k}{N}\right]\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

4.8. Distribución Hipergeométrica Multivariada

Sea una población finita de N objetos que contiene k_1 objetos de primer tipo, k_2 objetos de segundo tipo,…, y k_r objetos del r-ésimo tipo, de tal manera que $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = N$. Consideremos, el experimento aleatorio de “extraer una muestra sin reposición de tamaño n de la población”. Entonces:

a. Cada extracción tiene r posibles resultados

b. El resultado de cada extracción es afectado por los resultados de las extracciones previas. Es decir, los resultados de los ensayos no son independientes.

Definimos la variable aleatoria X_I $(i = 1,2,\dots,r)$ de la siguiente manera

$X_i =$ Número de objetos del i-ésimo tipo

$R_{X_I} = \{0,1,2,\dots,\min(k_i, n\ )\}$

Ahora nos interesa, la probabilidad que en la muestra se obtenga x_1 objetos del primer tipo, x_2 objetos del segundo tipo,…, y x_k, representaremos esta probabilidad por

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k;\ N, n\ ) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_r = x_r; N, n]$$

1. El número de muestras posibles de tamaño n que pueden formarse con los N objetos es $\binom{N}{n}$

2. El número de formas de selección x_1 objetos de los k_1 del primer tipo es $\binom{k_1}{x_1}$, para cada una de éstas se puede tomar x_2 objetos de los k_2 del segundo tipo de $\binom{k_2}{x_2}$ formas. Por lo tanto, el número de formas de escoger x_1 objetos del primer tipo y x_2 objetos del segundo tipo es $\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}$. Continuando de ésta forma, podemos escoger x_1 objetos del primer tipo, x_2 objetos del segundo tipo,…, y x_r objetos del r-ésimo tipo de $\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\dots\binom{k_r}{x_r}$ formas.

3. De (1) y (2) la probabilidad requerida está definida por:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k; N, n) = \frac{\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\dots\binom{k_r}{x_r}}{\binom{N}{N}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerando que en la urna hay un total de 100 objetos, 3 de los cuales son defectuosos, si se seleccionan 4 objetos al azar. ¿Cuál es la probabilidad que 2 sean defectuosos?

SOLUCIÓN

$N = 10 \;\; k = 3 \;\; n = 4 \;\; x = 2$

$$p(x = 2) = H(2{,}10{,}4{,}3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{10-3}{4-2}}{\binom{10}{4}}$$

$$p(x = 2) = H(2{,}10{,}4{,}3) = 0{,}30$$

2. En un lote de 10 proyectiles se disparan 4 al azar si el lote contiene 5 proyectiles que no disparan.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro disparan?
   b. ¿Cuántos de los cuatro se espera que disparan?

SOLUCIÓN

a. $N = 10 \; k = 5 \;\; n = 4 \;\; x = 0$

$$p(x = 0) = H(0{,}10{,}4{,}5) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10-5}{4-0}}{\binom{10}{4}}$$

$$p(x = 0) = H(0{,}10{,}4{,}5) = 0{,}0238$$

b. $E(X) = n\left[\frac{k}{N}\right] = 4\left[\frac{5}{10}\right] = 2$

3. Un lote contiene 100 piezas de un proveedor de tubería local y 200 unidades de un proveedor de tubería del estado vecino. Si se seleccionan 4 piezas al azar y sin reemplazo.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea de proveedor local?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

SOLUCIÓN

$N = 300 \; k = 100 \;\; n = 4$

a. $$p(x = 4) = H(4{,}300{,}4{,}100) = \frac{\binom{100}{4}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}}$$

$$p(x = 4) = H(4{,}300{,}4{,}100) = 0{,}0119$$

b.

$$p(x \geq 2) = \frac{\binom{100}{2}\binom{300-100}{4-2}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{3}\binom{300-100}{4-3}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{4}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}}$$

$$p(x \geq 2) = 0{,}298 + 0{,}098 + 0{,}0119 = 0{,}408$$

c. $p(x \geq 1) = 1 - p(x = 0)$

$$= 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}}$$

$$= \ 0{,}196$$

4. Se sabe que de un lote3 de 40 semillas no está en buenas condiciones la cuarta parte. Se toman al azar 8 semillas y se analiza en el laboratorio. ¿Cuál es la probabilidad que 3 de las analizadas estén en malas condiciones?

SOLUCIÓN

$N \ = \ 40 \ \ k \ = 40\left(\frac{1}{4}\right) = 10 \ \ \ n \ = \ 8 \ \ x \ = \ 2$

$$p(x = 3) = H(3{,}40{,}8{,}10) = \frac{\binom{10}{3}\binom{40-10}{8-3}}{\binom{40}{8}}$$

$$p(x = 3) = H(3{,}40{,}8{,}10) = 0{,}222$$

5. Una caja contiene 12 tornillos de los cuales 9 están en buen estado, si se escogen al azar sin sustitución 5 tornillos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que tornillos sean buenos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que 1 tornillo sea inservible?

SOLUCIÓN

a. $N = 12 \quad k = 9 \quad n = 5$

$$p(x = 3) = H(3{,}12{,}5{,}9) = \frac{\binom{9}{3}\binom{12-9}{5-3}}{\binom{12}{5}}$$

$$p(x = 3) = H(3{,}12{,}5{,}9) = 0{,}3182$$

b. $N = 12 \ \ k = 3$

$$p(x=1)=H(1,12,5,3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{12-3}{5-1}}{\binom{12}{5}}$$

$$p(x=1)=H(1,12,5,3)=0,4773$$

6. Una persona recibe un conjunto de 25 lámparas, donde 5 de las lámparas son defectuosas. Extrae del conjunto 4 lámparas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad que obtenga:
   a. 3 lámparas defectuosas
   b. Las 4 lámparas sean defectuosas

   SOLUCIÓN

   $N=25 \quad k=5 \quad n=4$

   a.

$$p(x=3)=H(3,25,4,5)=\frac{\binom{5}{3}\binom{25-5}{4-3}}{\binom{25}{4}}$$

$$p(x=3)=H(3,25,4,5)=0,01581$$

   b.

$$p(x=4)=H(4,25,4,5)\ =\frac{\binom{5}{4}\binom{25-5}{4-4}}{\binom{25}{4}}$$

$$p(x=4)=H(4,25,4,5)\ =0,4773$$

7. Entre las 12 casas que hay para venta en un fraccionamiento, 9 tienen aire acondicionado, si se seleccionan 4 de las casas para un desplegado en un periódico. ¿Cuál es la probabilidad que 3 de estas tengan aire acondicionado?

   SOLUCIÓN

   $N\ =\ 40\ \ k\ =40\left(\frac{1}{4}\right)=10\ \ n\ =\ 8\ \ x\ =\ 2$

$$p(x=3)=H(3,40,8,10)=\frac{\binom{10}{3}\binom{40-10}{8-3}}{\binom{40}{8}}$$

$$p(x=3)=H(3,40,8,10)=0,222$$

8. Entre 16 camiones de entrega de una tienda, 5 emiten cantidades excesivas de contaminantes. Si se seleccionan al azar 8 de los camiones para una inspección. ¿Cuál es la probabilidad de que esta muestra incluya por lo menos 3 de los camiones que emiten cantidades excesivas de contaminantes?

   SOLUCIÓN

   $N\ =\ 16\ \ k\ =5\ \ n\ =\ 8\quad x\ \geq 3$

$$p(x \geq 3) = 1 - p(x \leq 2)$$

$$= 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{16-5}{8-0}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{16-5}{8-1}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{16-5}{8-2}}{\binom{16}{8}}$$

$$= 1 - (0{,}0128 + 0{,}1282 + 0{,}3590)$$

$$= \ 0{,}5$$

9. En un depósito hay 20 arandelas de las cuales 10 son de $^1/_4$ pulgada de diámetro, 6 de $^1/_8$ pulgadade diámetro y los 4 restantes con $^3/_8$ pulgada de diámetro. Se eligen al azar 10 arandelas, ¿cuál es la probabilidad de que haya 5 de $^1/_4$ pulgada de diámetro, 3 de $^1/_8$ pulgada y 2 de $^3/_8$ pulgada de diámetro?

SOLUCIÓN

$N = 20$, $k_1 = 10$, $k_2 = 6$ y $k_3 = 4$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 2$. Entonces:

$$p(5,3,2{:}\,20,10) = \frac{\binom{10}{5}\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{20}{10}}$$

$$= 0{,}1637$$

10. Un auditor del departamento de impuesto sobre la renta está seleccionando una muestra de seis declaraciones de impuestos de personas de una profesión particular, para una posible auditoría
Si dos o más de ellas indican deducciones "no autorizadas", se auditará a todo el grupo (población) de 100 declaraciones. Si el 25% de las declaraciones es incorrecta, determinar:
   a. La verdadera distribución de probabilidad del número de declaraciones incorrectas en la muestra. ¿Cuáles son los parámetros? Halle la probabilidad de una auditoría más detallada.
   b. Utilice una aproximación a la verdadera distribución de probabilidad para hallar la probabilidad de una auditoría más detallada.

SOLUCIÓN

a. Definimos la variable aleatoria X como sigue:

X (w) = Número de declaraciones incorrecta en la muestra de 6.

$$R_x = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$N = 100$ $\quad k = 25$ $\quad n = 6$ $\quad N - k = 75$

El muestreo es sin reemplazamiento.

Se cumplen las condiciones de un experimento geométrico. Luego X es una variable aleatoria hipergeométrica. Por lo tanto, la verdadera distribución de probabilidad es la hipergeométrica.

$$H(x; 100,6,25) = \frac{\binom{25}{x}\binom{75}{6-x}}{\binom{100}{6}}, \quad x = 0,1,2,3,4,5,6.$$

Los parámetros son:

$$\mu = 6\left[\frac{25}{100}\right] = 1,5 \quad y \quad \sigma^2 = 6\left[\frac{25}{100}\right]\left[1 - \frac{25}{100}\right]\left[\frac{94}{99}\right] = 1,0682$$

Se haría una auditoría más detallada, si X toma valores mayores o iguales que 2. Es decir:

$$P(X \geq 2) = 1 - P[X \leq 1] = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \frac{\binom{75}{6}+\binom{25}{1}\binom{75}{5}}{\binom{100}{6}} = 0,4691$$

b. $\frac{n}{N} = \frac{6}{100} = 0,06$ es pequeño $\left(\frac{6}{100} < 0,1\right)$, aproximamos la distribución hipergeométrica a la binomial con $p = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Es decir:

$$\text{H}(x; 100,6,25) = B\left(x; 6, \frac{1}{4}\right) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1, \dots, 6$$

Luego,

$$P(X \geq 2 \ / \ 6,0,25) = 0,4661$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se debe seleccionar 2 miembros de un comité, entre 5 para que asistan a una convención en Trujillo. Suponga que el comité está formado por 3 mujeres y 2 hombres. Determine la probabilidad de seleccionar 2 mujeres al azar.

2. Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcótico en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina que son similares en apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 3 tabletas aleatoriamente para analizarlas.
   a. Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos.
   b. Cuál es la probabilidad de que no sea arrestado por posesión de narcótico.

3. Un inspector de aduanas decide revisar 3 de 16 embarques provenientes de Colombia por la vía aérea. Si la selección es aleatoria y 5 de los embarques contienen contrabando. Hallar la probabilidad de que el inspector de aduanas:
   a. Encuentre uno de los embarques con contrabando.
   b. Encuentre dos de los embarques con contrabando.
   c. Encuentre tres de los embarques con contrabando.

4. En una oficina donde se ensamblan computadora, en una mesa hay 20 chips de los cuales 6 están malogrados, primero llega el Profesor Valverde y recoge 8 chips y más tarde llega el Profesor Gallardo y se lleva los restantes. Hallar la probabilidad de que solamente uno de ellos se haya llevado todos los chips defectuosos.

5. Entre las 20 celdas solares que se presentan en una exposición comercial, 12 son celdas planas y las otras son celdas de concentración. Si una persona que visita la exposición selecciona al azar 6 de las salas solares para revisarlas. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de estas sean planas?

6. Entre 12 hombres que soliciten un trabajo en el servicio postal, las esposas de los 9 trabajan. Si se selecciona aleatoriamente a 2 de los solicitantes para una consideración adicional, cuáles son las probabilidades de que:
   a. La esposa de ninguno trabaje.
   b. Solo la esposa de uno trabaje.
   c. Las esposas de ambos trabajen.

7. Para pasar una inspección de control de calidad, se seleccionan al azar 2 piezas de cada lote de 12 acumuladores para automóvil, y se acepta el lote solo si ningún acumulador tienen ningún defecto; de otra manera se revisan todos los acumuladores del lote. Si la selección de los acumuladores es aleatoria, obtenga las probabilidades de que un lote:
   a. Pase la inspección con uno de los 12 acumuladores defectuosos.
   b. No pase la inspección con 3 de los acumuladores con defectos.
   c. No pase la inspección con 6 de los acumuladores con defectos.

8. Un embarque de 200 alarmas contra robo contiene 10 piezas defectuosas. Se selecciona al azar 5 alarmas contra robo para enviarlas a un cliente.
   a. Use la distribución geométrica para encontrar la probabilidad de que el cliente reciba exactamente una alarma contra robo defectuosa.
   b. Use la aproximación binomial para la distribución hipergeométrica para obtener la probabilidad de que el cliente reciba exactamente una alarma contra robo defectuosa.

9. Un lote de 100 tubos de televisión a color está sujeto a un procedimiento de prueba de aceptación. El procedimiento consiste en extraer cinco tubos aleatoriamente, sin reemplazamiento, y probarlos.

Si dos o menos tubos fallan, se acepta el lote. En caso contrario se rechaza el lote. Asumiendo que el lote contiene cuatro tubos defectuosos. Determinar:

a. La distribución de probabilidad del número de tubos defectuosos en la muestra. ¿Cuáles son los parámetros? Halle la probabilidad exacta de aceptar el lote.

b. Utilice una aproximación a la verdadera distribución para hallar la probabilidad exacta de aceptar el lote. Compare las respuestas.

10. El cuerpo secretarial de un importante bufete de abogados cuenta con 25 secretarias, 10 de las cuales han estado con la empresa más de 5 años. Un ejecutivo desea seleccionar al azar cuatro secretarias para asignarlas un nuevo asunto.

a. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de secretarias con más de 5 años en la empresa?

b. ¿Qué modelo discreto representa?

c. Hallar la probabilidad que ninguna de las secretarias tendrá más de 5 años en la empresa.

d. Encuentre la probabilidad que las cuatro secretarias tendrá más de 5 años en la empresa.

e. Calcule la media y la varianza del número de secretarias con más de 5 años en la empresa.

RESUMEN

La distribución probabilística hipergeométrica proporciona probabilidades asociadas con valores posibles de una variable aleatoria discreta, en situaciones en que estos valores se generen al muestrear una población finita donde el muestreo se hace sin reemplazamiento, de manera que la probabilidad de éxito cambia de un ensayo al siguiente. El número de éxitos alcanzado cuando una muestra aleatoria de n se extrae sin reemplazo de una población N dentro de la que hay k unidades con la característica que denota éxito es la distribución hipergeométrica, cuyas probabilidades para sus valores diferentes se pueden calcular con la ayuda de la fórmula hipergeométrica. Una vez más, varias fórmulas simplificadas se pueden derivar para calcular las medidas de resumen.

La distribuciones de probabilidad binomial se semejan cercanamente a las hipergeométricas cuando el tamaño de la muestra es pequeño en relación al de la población, bajo tales circunstancias, por tanto, se pueden usar las tablas de probabilidad binomial para hacer aproximaciones de distribuciones de probabilidad hipergeométrica o se puede emplear la aproximación de la hipergeométrica a la binomial con las medidas de resumen propuestas.

GLOSARIO

1. **Aleatorio,** que ocurre al azar o en forma impredecible, fortuito.

2. **Distribución probabilística discreta,** es una distribución con un número finito de valores.

3. **Esperanza matemática o valor esperado,** es el promedio o valor central de la variable o distribución probabilística.

4. **Éxitos,** es la ocurrencia del evento o suceso de interés como cantidad de defectos, llamadas recibidas, servicios completados.

5. **Experimento de Bernoulli,** es un experimento con dos posibles resultados (éxito o fracaso).

6. **Experimento independiente,** es cuando el resultado de un experimento no tiene influencia en el resultado de otro experimento

7. **Factorial,** es una expresión matemática, y que aplicada a un número entero, equivale a multiplicar ese número por todos los que le preceden hasta la unidad.

8. **Fracasos,** es el complemento de los éxitos, es la ocurrencia del evento que no es de interés.

9. **Función de distribución acumulada,** es el acumulado de la función de probabilidad y se representa por $F(x)$.
10. **Función de probabilidad,** es una lista de las probabilidades asociadas con cada posible valor de la variable.

11. **Muestreo sin reposición,** es cuando cada elemento no es devuelto para después ser examinado.

12. **Parámetro,** número que caracterice o describe una población.

13. **Parámetro de una distribución,** son unos números calculados a partir de los datos dados, que proporcionan una información sobre algún punto o característica de la distribución.

14. **Propiedad de Harkov,** o falta de memoria, que implica que la probabilidad de tener que esperar un tiempo t no depende del tiempo que haya transcurrido.

15. **Resultados mutuamente excluyentes,** son resultados que no pueden ocurrir al mismo tiempo.

16. **Segmento,** es un intervalo, porción, fragmento o tamaño de muestra, ya sea en cantidades, unidades de distancia, área, volumen, tiempo o cualquier otra medida.

17. **Sucesos raros,** es un proceso estocástico de tiempo continuo que consiste en contar eventos raros que ocurren a lo largo del tiempo.

18. **Variable aleatoria,** conocida también como variable estocástica o probabilística. Es la característica considerada en un experimento aleatorio cuyo valor de ocurrencia sólo puede saberse con exactitud una vez observado.

LISTADO DE ABREVIATURAS

$\approx$	: Casi igual a
$\binom{n}{x}$	: Combinación de n en x.
σ	: Desviación estándar.
B $(X = x/n\,, p)$	: Distribución Binomial
G (p, q)	: Distribución Geométrica
$H(x, N, n, k)$	: Distribución Hipergeométrica
$p(\lambda, x)$	: Distribución Poisson
$E(X)$	: Esperanza Matemática.
$F(x)$	: Función de distribución acumulada.
$p(x)$	: Función de probabilidad.

λ	: Lambda es la media o promedio de éxitos por unidad de tiempo.
$n!$	: n Factorial
P (E)	: Probabilidad de éxito
P (F)	: Probabilidad de fracaso
$\sim$	: Semejante
X	: Variable aleatoria.
σ^2	: Varianza.

EPÍLOGO

El presente trabajo de investigación texto universitario Distribuciones Probabilísticas Discretas, tiene como finalidad poner al alcance de estudiantes de las diversas carreras profesionales de nuestra Universidad, un material bibliográfico, útil y práctico, que será utilizado en el transcurso de su formación profesional.

El contenido ha sido sistematizado con el propósito que estudiantes y lectores logren una mayor comprensión y aplicación de la Estadística, utilizando un vocabulario sencillo y preciso, reforzado con problemas prácticos facilitando el proceso de enseñanza aprendizaje.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos. El primer capítulo, trata de la distribución probabilística binomial, el segundo capítulo se presenta la distribución probabilística de poisson, el tercer capítulo se refiere a la distribución probabilística geométrica, el cuarto capítulo se aborda la distribución probabilística hipergeométrica, acompañado de un glosario, listado de abreviaturas, apéndice y bibliografía correspondiente.

APÉNDICE

APÉNDICE A

PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES INDIVIDUALES DE x

APÉNDICE B

PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES ACUMULATIVOS DE x

APÉNDICE C

PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES INDIVIDUALES DE x

APÉNDICE D

PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES ACUMULATIVOS DE x

TABLA A: PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES INDIVIDUALES DE x

		p																		
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000	.1500	.1000	.0500
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000	.5500	.6000	.6500	.7000	.7500	.8000	.8500	.9000	.9500
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400	.0225	.0100	.0025
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	.4950	.4800	.4550	.4200	.3750	.3200	.2550	.1800	.0950
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	.3025	.3600	.4225	.4900	.5625	.6400	.7225	.8100	.9025
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0900	.0034	.0010	.0001
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	.3341	.2880	.2389	.1890	.1406	.0960	.0574	.0270	.0071
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	.4084	.4320	.4436	.4410	.4219	.3840	.3251	.2430	.1354
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250	.1664	.2160	.2746	.3430	.4219	.5120	.6141	.7290	.8574
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	.2005	.1536	.1115	.0756	.0469	.0256	.0115	.0036	.0005
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	.3675	.3456	.3105	.2646	.2109	.1536	.0975	.0486	.0135
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500	.2995	.3456	.3845	.4116	.4219	.4096	.3685	.2916	.1715
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625	.0915	.1296	.1785	.2401	.3164	.4096	.5220	.6561	.8745
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313	.0185	.0102	.0053	.0024	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.2036	.3281	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1563	.1128	.0768	.0488	.0284	.0146	.0064	.0022	.0004	.0000
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	.2757	.2304	.1811	.1323	.0879	.0512	.0244	.0081	.0011
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125	.3369	.3456	.3364	.3087	.2637	.2048	.1382	.0729	.0214
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0283	.0488	.0768	.1128	.1562	.2059	.2592	.3124	.3601	.3955	.4096	.3915	.3281	.2036
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312	.0503	.0778	.1160	.1681	.2373	.3277	.4437	.5905	.7738
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	.0083	.0041	.0018	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	.0609	.0369	.0205	.0102	.0044	.0015	.0004	.0001	.0000
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	.1861	.1382	.0951	.0595	.0330	.0154	.0055	.0012	.0001
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125	.3032	.2765	.2355	.1852	.1318	.0819	.0415	.0146	.0021
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344	.2780	.3110	.3280	.3241	.2966	.2458	.1762	.0984	.0305
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0937	.1359	.1866	.2437	.3025	.3560	.3932	.3993	.3543	.2321
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156	.0277	.0467	.0754	.1176	.1780	.2621	.3771	.5314	.7351
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	.0037	.0016	.0006	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547	.0320	.0172	.0084	.0036	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	.1172	.0774	.0466	.0250	.0115	.0043	.0012	.0002	.0000
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734	.2388	.1935	.1442	.0972	.0577	.0287	.0109	.0026	.0002
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734	.2918	.2903	.2679	.2269	.1730	.1147	.0617	.0230	.0036
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641	.2140	.2613	.2985	.3177	.3115	.2753	.2097	.1240	.0406
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547	.0872	.1306	.1848	.2471	.3115	.3670	.3960	.3720	.2573
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078	.0152	.0280	.0490	.0824	.1335	.2097	.3206	.4783	.6983

TABLA B: PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES ACUMULATIVOS DE x

		p																		
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000	.4500	.4000	.3500	.3000	.2500	.2000	.1500	.1000	.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	.2025	.1600	.1225	.0900	.0625	.0400	.0225	.0100	.0025
	1	.9975	.9900	.9975	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975	.7500	.6975	.6400	.5775	.5100	.4375	.3600	.2775	.1900	.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	.0911	.0640	.0429	.0270	.0156	.0080	.0034	.0010	.0001
	1	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7183	.6480	.5748	.5000	.4253	.3520	.2818	.2160	.1563	.1040	.0608	.0280	.0073
	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089	.8750	.8336	.7840	.7254	.6570	.5781	.4880	.3859	.2710	.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	.0410	.0256	.0150	.0081	.0039	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910	.3125	.2415	.1792	.1265	.0837	.0508	.0272	.0120	.0037	.0005
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585	.6875	.6090	.5248	.4370	.3483	.2617	.1808	.1095	.0523	.0140
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590	.9375	.9085	.8704	.8215	.7599	.6836	.5904	.4780	.3439	.1885
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313	.0185	.0102	.0053	.0024	.0010	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.9974	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562	.1875	.1312	.0870	.0540	.0308	.0156	.0067	.0022	.0005	.0000
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931	.5000	.4069	.3174	.2352	.1631	.1035	.0579	.0266	.0086	.0012
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688	.8125	.7438	.6630	.5716	.4718	.3672	.2627	.1648	.0815	.0226
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815	.9688	.9497	.9222	.8840	.8319	.7627	.6723	.5563	.4095	.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	.0083	.0041	.0018	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636	.1094	.0692	.0410	.0223	.0109	.0046	.0016	.0004	.0001	.0000
	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415	.3438	.2553	.1792	.1174	.0705	.0376	.0017	.0059	.0013	.0001
	3	.0999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447	.6563	.5585	.4557	.3529	.2557	.1694	.0989	.0473	.0159	.0022
	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9977	.9590	.9308	.8906	.8364	.7667	.6809	.5798	.4661	.3446	.2235	.1143	.0328
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917	.9844	.9723	.9533	.9246	.8824	.8220	.7379	.6229	.4686	.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	.0037	.0016	.0006	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024	.0625	.0357	.0188	.0090	.0038	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164	.2266	.1529	.0963	.0556	.0288	.0129	.0047	.0012	.0002	.0000
	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083	.5000	.3917	.2898	.1998	.1260	.0706	.0333	.0121	.0027	.0002
	4	1.0000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471	.7734	.6836	.5801	.4677	.3529	.2436	.1480	.0738	.0257	.0038
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643	.9375	.8976	.8414	.7662	.6706	.5551	.4233	.2834	.1497	.0444
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963	.9922	.9848	.9720	.9510	.9176	.8665	.7903	.6794	.5217	.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA C: PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES INDIVIDUALES DE x

x	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$	$\lambda = 1,0$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4		0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5				0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6						0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	
7									0.0001	

x	$\lambda = 1,1$	$\lambda = 1,2$	$\lambda = 1,3$	$\lambda = 1,4$	$\lambda = 1,5$	$\lambda = 1,6$	$\lambda = 1,7$	$\lambda = 1,8$	$\lambda = 1,9$	$\lambda = 2,0$
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8			0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9							0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	$\lambda = 2,1$	$\lambda = 2,2$	$\lambda = 2,3$	$\lambda = 2,4$	$\lambda = 2,5$	$\lambda = 2,6$	$\lambda = 2,7$	$\lambda = 2,8$	$\lambda = 2,9$	$\lambda = 3,0$
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11						0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12										0.0001

TABLA D: PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES ACUMULATIVOS DE x

x	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	$\lambda = 1{,}0$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9988	0.9889	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9967	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	$\lambda = 1{,}1$	$\lambda = 1{,}2$	$\lambda = 1{,}3$	$\lambda = 1{,}4$	$\lambda = 1{,}5$	$\lambda = 1{,}6$	$\lambda = 1{,}7$	$\lambda = 1{,}8$	$\lambda = 1{,}9$	$\lambda = 2{,}0$
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4338	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	$\lambda = 2{,}1$	$\lambda = 2{,}2$	$\lambda = 2{,}3$	$\lambda = 2{,}4$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2{,}6$	$\lambda = 2{,}7$	$\lambda = 2{,}8$	$\lambda = 2{,}9$	$\lambda = 3{,}0$
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9725	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

BIBLIOGRAFÍA

1. AVILA, ROBERTO. Estadística Elemental Lima: Estudios y Ediciones R. A. 2da Edición, 2001

2. CÓRDOVA, MANUEL. Estadística Inferencial Lima: Editorial MOSHERA S.R.L. 2da Edición, 2005.

3. ELORZA, HAROLDO. Estadística para Ciencias Sociales del Comportamiento y de la Salud. Lima: CENGASE 3era Edición, 2008.

4. HEINZ, KOHLER. Estadística para Negocios y Economía. México: Compañía Editorial Continental S.A. 3era Edición, 2002.

5. LEVIN, RUBIN. Estadística para Administradores. México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A. 3era Edición, 2007.

6. MASON, MARCHAL. Estadística para Administración y Economía México: Alfaomega Grupo Editor S.A. 1ª Edición, 2007.

7. MOYA, RUFINO. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Lima: Editorial San Marcos 1ª Edición, 2008.

8. MUCHAYPIÑA, JORGE. Estadística y Probabilidades. Lima: Empresa Editora Kano S.R.L. 2da Edición, 2007.

9. WEINER, RICHARD. Estadística. México: Compañía Editorial Continental S.A. 1ª Edición, 2007